УДК 519.8

В.І.БІЛЕЦЬКИЙ, Г.П.ДОНЕЦЬ, Е.І.НЕНАХОВ

# КОМБІНАТОРНЕ РОЗПІЗНАВАННЯ. ЗАДАЧІ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

*Наводиться постановка обмеженої та необмеженої задач комбінаторного розпізнавання. На прикладі задачі про вимикачі показано, яким способом треба розбити на групи множину вимикачів, щоб за мінімальну кількість спроб знайти потрібну кількість несправних вимикачів. Розглядується також задача вибору кількості однотипних елементів з двох заданих множин. Для кожної задачі приводяться формули оцінок мінімальної кількості спроб..*



Розглянемо типову задачу, що може мати широку інтерпретацію.

**Задача 1.** Нехай є в наявності $n$ альтернатив прийняття економічних рішень $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, про які відомо лише те, що серед них є $m$ прийнятних ($m < n$). Існує механізм, який для фіксованого $k$ ($k \le m$) дозволяє визначити, чи існує серед альтернатив довільної $k$-вибірки хоча б одна неприйнятна. Необхідно за мінімальну кількість $k$-вибірок знайти $k$ прийнятних альтернатив.

Поняття механізму, що дозволяє одержати відповідь на експеримент, можна трактувати в самому широкому розумінні слова. Наведемо кілька прикладів.

**Приклад 1. (Задача про вимикачі).** Нехай $n$ вимикачів незалежно приєднано до однієї лампочки. Відомо, що серед них $m$ зіпсованих. Експеримент складається в одночасному включенні $k$ вимикачів ($1 < k \le m$ ). Якщо серед них хоча б один справний, то лампочка запалюється. Необхідно за мінімальну кількість спроб знайти $k$ несправних вимикачів.

Багато задач про монети, серед яких зустрічаються фальшиві, можна звести до задачі 1, при цьому відповіддю на різні експерименти є результат зважування на двочасткових вагах визначених комбінацій монет.

Задача 1 може мати конкретне трактування для діяльності різних комерційних фірм, наприклад, банків, страхових компаній, що продають облігації, влаштовують лотереї і т.д. Щоб не збанкрутувати, вони повинні уміти вирішувати наступну задачу.

**Приклад 2.** (**Задача про лотерею).** Нехай задана множина натуральних чисел $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$... З неї випадковим чином вибирається підмножина виграшних чисел $M = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ $(m < n)$... Експеримент полягає у виборі $k$ чисел ($k \le m$) з $N_n$. Треба знайти мінімальну кількість таких $k$-вибірок, щоб хоча б одна з них належала $M$.

Знаючи розв’язок цієї задачі, будь-який підприємець зможе себе застрахувати від неприємних несподіванок.

Приклад 1 допомагає сформулювати задачу 1 у новій математичній постановці.

**Задача комбінаторного розпізнавання (ЗКР).** Нехай задана множина з $n$ чисел X=$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, яка складається з $m$ одиниць і $n$ - $m$ нулів. Експеримент полягає у виборі ***фіксованої*** кількості $k$ ($k \le m$) чисел, тим самим стає відомим їхній добуток. Необхідно за мінімальну кількість спроб знайти $k$ чисел, добуток яких дорівнює 1.

Зміст останнього речення у постановці цієї задачі дає не меншу підставу називати її також задачею комбінаторного пошуку. Тут єдиним обмеженням є фіксований обсяг вибірки. Можна ускладнювати умови задачі кількістю заданих множин, способом (черговістю) вибірок елементів з них і т.д. Всі задачі такого роду можна назвати обмеженими ЗКР.

Стратегія оптимального розв’язування обмежених ЗКР складається в такому розбитті вихідної множини чисел на групи, щоб потім, провівши експерименти за допомогою $k$–вибірок у кожній з них, знайти необхідну кількість визначених чисел [1].

Таким чином, розв’язок задачі має вигляд деякого розбиття вихідної множини чисел.

На відміну від розглянутих задач існує досить потужний клас задач, що умовно можна назвати необмеженими ЗКР. Наведемо їхню формальну постановку.

**Задача комбінаторного розпізнавання (необмежена).** Нехай задана множина з $n$ чисел X=$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, яка складається з $m$ одиниць і $n$ - $m$ нулів. Експеримент полягає у виборі ***довільної*** кількості $k$ ($k \le m$) чисел, після чого стає відомим їхній добуток. Необхідно за мінімальну кількість спроб знайти всі числа, що дорівнюють 0 (або, що те ж саме, дорівнюють 1).

Зупинимось на обмеженій задачі комбінаторного розпізнаваня. Розглянемо обмежену ЗКР на прикладі задачі про вимикачі. Позначимо мінімальну кількість спроб, за яку необхідно знайти $k$ несправних вимикачів через $F_m^k(n)$.

Розглянемо приклад 1 для таких значень: $n = 9$, $m = 4$ , $k = 2$.

Найпростішим розв'язком є такий. Пробуємо всі комбінації з двох вимикачів, поки не натрапимо на два зіпсованих, і тоді лампочка не засвітиться. Всього таких комбінацій $C_9^2 = 36$, серед них $C_4^2 = 6$ комбінацій з зіпсованими вимикачами. Отже в найгіршому випадку через 31 спробу буде знайдений розв'язок задачі.

Більш вдалий розв'язок отримаємо, коли 9 вимикачів розіб'ємо на дві групи, з яких в одній групі буде 5 вимикачів, в іншій – 4. Тоді обов'язково знайдеться група, в якій буде не менш двох зіпсованих вимикачів і, комбінуючи по два вимикачі у кожній групі, отримаємо розв'язок задачі.

Щоб отримати оцінку кількості спроб, треба розглянути всі варіанти розбиття чотирьох зіпсованих вимикачів на дві групи. Якщо в групі з $p$ вимикачів $q$ зіпсованих ($q \geq 2$), то кількість спроб дорівнює $C_p^2 - C_q^2 + 1$. Тоді серед розбиттів (0,4), (1,3), (2,2), (3,1) та (4,0) найгірший випадок (1,3), або (3,1) дає 14 спроб.

Можна розбити 9 вимикачів на чотири групи (3 + 2 + 2 + 2). Спочатку зробимо $C_3^2 + C_2^2 + C_2^2 + C_2^2 = 6$ спроб. Якщо лампочка засвітиться кожний раз, то це може бути тільки тоді, коли в кожній групі буде по одному зіпсованому вимикачу. Беремо дві групи по 2 вимикачі і комбінуємо з них 2 вимикачі, беручи по одному з кожної групи. Це вимагає 4 спроби, а в сумі розв'язок отримаємо за 10 спроб.

Але існує ще один розв'язок, коли 9 вимикачів розбиваємо на три групи (3 + 3 + 3). Тоді обов'язково знайдеться група, в якій не менш двох зіпсованих вимикачів. Кількість спроб тепер становить $C_3^2 + C_3^2 + C_3^2 = 9$, що і буде оптимальним розв'язком. Іншими словами $F_4^2(9) = 9$.

Очевидно, що $F_m^m(n) = C_n^m$, тому що набір з одиниць єдиний і для його знаходження в найгіршому випадку потрібно перебрати всі комбінації.

Для $k = 2$ вже є досвід розв'язування задачі 1[1]. При цьому був знайдений спосіб (**принцип оптимальності**), за яким краще всього треба розбивати всю множину чисел на групи. Він зводиться до наступного: для $k = 2$ всю множину чисел необхідно розбити на стільки груп, щоб хоча би в одній з них було не менш двох одиниць. Звідси витікає, що число груп повинно бути $m - 1$.

Позначимо $\lambda \equiv n \ (mod\ m - 1)$.

**Лема 1.**
$$F_3^2(n) = \frac{n(n-2) + \lambda}{4}. \tag{1}$$

*Доведення*. Нехай $\lambda \equiv n \equiv 0 \ (mod\ 2)$. Тоді множина з $n$ чисел розбивається на дві однакові групи з $n/2$ чисел, і

$$F_3^2(n) = C_{n/2}^2 + C_{n/2}^2 = 2 \cdot \frac{n/2(n/2-1)}{2} = \frac{n(n-2)}{4}.$$

Якщо $\lambda \equiv 1(mod\ 2)$, то множина з $n$ чисел розбивається на дві різних групи з $\frac{n+1}{2}$ та $\frac{n-1}{2}$ числами відповідно. Тоді

$$F_3^2(n) = C^2_{\frac{n+1}{2}} + C^2_{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 .$$

Можна записати загальну формулу

$$F_3^2(n) = \frac{(n-\lambda)(n-2+\lambda)}{4} = \frac{n(n-2)+2\lambda-\lambda^2}{4} .$$

Враховуючи те, що $\lambda^2 \equiv \lambda(\mathrm{mod}\, 2)$, отримаємо формулу (1).

**Лема 2.** При поділу $n$ на $m-1$ груп отримаємо розбиття:

$$n = (m-1-\lambda)\left(\frac{n-\lambda}{m-1}\right) + \lambda\left(\frac{n-\lambda}{m-1}+1\right). \tag{2}$$

*Доведення*. При діленні числа $n$ на $q$ отримаємо залишок $n(\mathrm{mod}\ q)$.

Отож $n = q\left\lfloor\frac{n}{q}\right\rfloor + n(\mathrm{mod}\, q)$. Запишемо $q = [q - n\ (\mathrm{mod}\ q)] + n\ (\mathrm{mod}\ q)$, звідки $n = [q - n(\mathrm{mod}\, q)]\left\lfloor\frac{n}{q}\right\rfloor + n(\mathrm{mod}\, q)\left(\left\lfloor\frac{n}{q}\right\rfloor + 1\right)$. Підставляючи сюди $q = m-1$ та $\left\lfloor\frac{n}{m-1}\right\rfloor = \frac{n-\lambda}{m-1}$, отримаємо шукану формулу (2).

Звідси легко вивести загальну формулу

$$n = \sum_{i=0}^{q-1}\left\lfloor\frac{n+i}{q}\right\rfloor. \tag{3}$$

**Теорема 1.**

$$F_m^2(n) = \frac{(n-\lambda)(n+\lambda-m+1)}{2(m-1)} . \tag{4}$$

*Доведення*. Скористаємося результатами леми 2 при розбитті множини чисел на $m$ - 1 груп.

$$F_m^2(n)=(m-1-\lambda)\,C^2_{\frac{n-\lambda}{m-1}}+\lambda C^2_{\frac{n-\lambda}{2}+1}=\frac{m-1-\lambda}{2}\left(\frac{n-\lambda}{m-1}\right)\left(\frac{n-\lambda}{m-1}-1\right)+\frac{\lambda}{2}\left(\frac{n-\lambda}{m-\lambda}+1\right)\left(\frac{n-\lambda}{m-1}\right).$$

Після скорочень отримаємо формулу (4).

**Теорема 2.** Нехай $m=2r+1$. Тоді

$$F^3_{2r+1}(n)=\frac{1}{6r^2}(n-\lambda)(n-\lambda-r)(n-2r+2\lambda),\quad (r\ge 1). \tag{5}$$

*Доведення*. Для $k$ = 3 отриманий розв'язок будемо знаходити, користуючись принципом оптимальності. Треба розбити $n$ на $r$ приблизно рівних груп, тоді хоча б в одній з них буде не менш трьох одиниць. При цьому необхідно, щоб кожна група мала об'єм не менший трьох. Тому з (3) випливає

$$F^3_{2r+1}(n)=\sum_{i=0}^{r-1} C^3_{\left\lfloor\frac{n+i}{r}\right\rfloor}. \tag{6}$$

Якщо скористатись параметром $\lambda\equiv n(\mathrm{mod}\ r)$, то групи будуть складатись з $r-\lambda$ чисел по $\frac{n-\lambda}{r}$ і $\lambda$ чисел по $\frac{n-\lambda}{r}+1$.

Тому

$$\begin{aligned}F^3_{2r+1}(n)&=(r-\lambda)\,C^3_{\frac{n-\lambda}{r}}+\lambda C^3_{\frac{n-\lambda}{r}+1}=\left(\frac{r-\lambda}{6}\right)\left(\frac{n-\lambda}{r}\right)\left(\frac{n-\lambda}{r}-1\right)\left(\frac{n-\lambda}{r}-2\right)+\\&+\frac{\lambda}{6}\left(\frac{n-\lambda}{r}+1\right)\left(\frac{n-\lambda}{r}\right)\left(\frac{n-\lambda}{r}-1\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Спрощуючи цей вираз, отримаємо формулу (5).

Приведемо приклад. Нехай $n$ = 73, $m$ = 11. Тоді $r$ = 5, а $\lambda$=3.

По формулі (7) при розбитті числа 73 на 5 груп (14, 14, 15, 15, 15) отримаємо

$$F^3_{11}(73)=2C^3_{15}+3C^3_{14}=2\cdot 364+3\cdot 455=2093.$$

А по формулі (5) відповідно

$$F^3_{11}(73)=\frac{1}{6\cdot 25}(73-3)(73-3-5)(73-10+6)=\frac{70\cdot 65\cdot 69}{150}=2093.$$

Задача 1 може породити більш складну задачу, яка пригодиться для подальших викладень.

**Задача 2.** Нехай задані дві множини чисел X = $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}\}$ та Y = $\{y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}\}$, причому в першій множині міститься $m_1$ одиниць

($m_1 \le n_1$), а в другій – $m_2$ одиниць ($m_2 \le n_2$). Експеримент полягає у виборі $k$ ($k \ge 1$) чисел з будь-яких множин ($k \le m_1 + m_2$), після чого стає відомим їх добуток. Необхідно за мінімальну кількість спроб знайти $k$ чисел, добуток яких дорівнює 1. Позначимо цю кількість $F^k_{m_1,m_2}(n_1,n_2)$.

В загальному вигляді цю задачу ще не розв'язано. Розглянемо її частковий випадок для $k = 3$ і $m_1 = m_2 = 2$. Необхідно знайти $F^3_{2,2}(n_1,n_2)$. Очевидно, що всі комбінації по три повинні складатися з чисел із різних множин:: одне число з одної множини, а два – з другої. Можна перебрати в одній множині всі комбінації по два числа і по черзі приєднувати числа з другої множини. В кінці кінців натрапимо у першій множині на одну комбінацію з двох одиниць, а в другій - на одну одиницю після $n_2$-1 спроб. Це дає оцінку $F^3_{2,2}(n_1,n_2) \le C^2_{n_1}(n_2 - 1)$. Очевидно, що комбінувати по два числа треба в множині з меншою кількістю чисел, так як з $n_2 \ge n_1$ випливає

$$C^2_{n_2}(n_1 - 1) \ge C^2_{n_1}(n_2 - 1).$$

Але така стратегія в загальному вигляді не є оптимальною. Як показано в [2], оптимальною є покрокова стратегія, що зводиться до наступного.

1. Якщо $n_2 \ge n_1$, то беремо всі комбінації по два числа з множини X і одне число з множини Y, наприклад, $y_1$. Якщо добуток трьох чисел хоча би один раз дорівнюватиме 1, то задача розв'язана, в противному разі $y_1 = 0$. Вилучаємо $y_1$ з множини Y, об'єм її, таким чином, стає рівним $n_2 - 1$.

2. Нехай $s = \min(n_1, n_2)$. За $|n_2 - n_1| C^2_s$ спроб досягнемо ситуації, коли об'єм більшої множини зменшиться до рівня меншої множини, і треба знайти $F^3_{2,2}(s,s)$. Таким чином ситуація стає симетричною і можна комбінувати в будь-якій множині. За $C^2_s$ спроб перейдемо до ситуації з об'ємами множин (s, s – 1). Комбінуючи по два числа у меншій множині, за $C^2_{s-1}$ спроб перейдемо до ситуації з об'ємами множин (s - 1, s – 1).

3. На $i$ – му кроці ($3 \le i \le s$) за допомогою $C^2_i + C^2_{i-1}$ спроб переходимо до об'ємами множин ($i$ – 1, $i$ - 1). Якщо добуток трьох чисел в будь-який момент буде дорівнювати 1, то задача розв'язана, інакше продовжуємо спроби.

4. В найгіршому випадку в кінці кінців дійдемо до ситуації, коли залишаться дві множини $X_1 = Y_1 = (1,1)$. У цьому випадку можна брати довільні 3 елементи з цих множин, які є розв'язком задачі. Підрахуємо кількість спроб для найгіршого випадку, починаючи з об'ємів множин (s, s).

$$(C^2_s + C^2_{s-1}) + (C^2_{s-1} + C^2_{s-2}) + \ldots\ldots (C^2_3 + C^2_2) =$$

$$C_s^2 + 2\sum_{i=3}^{s-1} C_i^2 + C_2^2 = C_s^2 + 2C_s^3 - 1.$$

Тим самим доведена

**Лема 3.**

$$F_{2,2}^3(n_1, n_2) = (|n_2 - n_1| - 1)C_s^2 + 2C_s^3 - 1, \tag{8}$$

де s = min ($n_1$, $n_2$).

Зокрема, $F_{2,2}^3(s,s) = \dfrac{s(s-1)(2s-1)}{6} - 1$.

Розглянемо задачу для випадку, коли $m = 2r$, тобто необхідно знайти $F_{2r}^3(n)$. Можливі дві стратегії: розбивати $n$ на $r$ груп, або на $r - 1$ груп.

Розглянемо першу стратегію, її оцінку позначимо як $F_1$. Нехай $\left\lfloor \dfrac{n}{r} \right\rfloor = \alpha$, $\lambda_1 \equiv n(\operatorname{mod} r) = n - \alpha r$. Тоді число $n$ розбивається на $r$ - $\lambda_1$ груп по $\alpha$ чисел в кожній та $\lambda_1$ груп по $\alpha$ + 1 чисел в кожній. Виходячи із формули (7), необхідно зробити $(r - \lambda_1)C_\alpha^3 + \lambda_1 C_{\alpha+1}^3$ спроб. В найгіршому випадку цього не досить, бо може виникнути ситуація, коли кожна група має рівно по дві одиниці. Тоді треба скористуватися формулою (8) і зробити ще $F_{2,2}^3(\alpha, \alpha)$ спроб, якщо $\lambda \neq r - 1$, або $F_{2,2}^3(\alpha, \alpha+1)$ для $\lambda = r - 1$. Разом це дає

$$F_1 = (r - \lambda_1)\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} + \lambda_1 \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}[2 - \operatorname{sgn}(r - 1 - \lambda_1)] + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} - 1.$$

Після перетворень отримаємо

$$F_1 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{6}\left[r\alpha - 2r + 3\lambda_1 + 2\alpha - 3\operatorname{sgn}(r - 1 - \lambda_1) + 2\right].$$

Підставивши вираз для $\lambda_1$, остаточно отримаємо

$$F_1 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{6}[3(n - \operatorname{sgn}(r - 1 - \lambda_1)) - 2(\alpha+1)(r-1)] - 1. \tag{9}$$

Розглянемо другу стратегію, її оцінку позначимо як $F_2$. Нехай

$$\left\lfloor \frac{n}{r-1} \right\rfloor = \beta,\ \lambda_2 \equiv n(\operatorname{mod} r - 1) = n - (r-1)\beta .$$

Тоді число $n$ розбивається на $r$ – 1 - $\lambda_2$ груп по $\beta$ чисел в кожній та $\lambda_2$ груп по $\beta$ + 1 чисел в кожній. Але на відміну від першої стратегії, якщо після перевірки $r$ – 2 груп не буде отримано розв'язку, то тут це означає, що в ($r$ – 1)-й групі знаходяться не менше чотирьох одиниць. Якщо в цій групі чотири числа, то всі вони дорівнюють одиниці, тобто для розв'язку достатньо з цієї групи взяти будь-які 3 одиниці. Якщо група містить більше чотирьох чисел, то треба розбити її на дві частини. В залежності від величини останньої групи отримаємо дві оцінки другої стратегії. Якщо $\lambda_2 = 0$, то всі групи мають по $\beta$ чисел, в противному разі остання група має $\beta+1$ чисел. Це означає, що

$$F_2 = (r-1-\lambda_2)\,C_\beta^3 + (\lambda_2-1)\,C_{\beta+1}^3 + F_4^3(\beta+1) \qquad \text{для } \lambda_2 > 0,$$

$$F_2 = (r-2)\,C_\beta^3 + F_4^3(\beta) \qquad \text{для } \lambda_2 = 0. \tag{10}$$

Розбиваючи останню групу на дві, можемо скористатися формулами (3) та (8). В першому випадку отримаємо розбиття групи на дві компоненти $\left(\left\lfloor \frac{\beta+1}{2} \right\rfloor,\ \beta+1-\left\lfloor \frac{\beta+1}{2} \right\rfloor\right)$, в другому випадку, враховуючи формулу (3), на такі $\left(\left\lfloor \frac{\beta}{2} \right\rfloor,\ \beta-\left\lfloor \frac{\beta}{2} \right\rfloor\right) = \left(\beta-\left\lfloor \frac{\beta+1}{2} \right\rfloor,\ \left\lfloor \frac{\beta}{2} \right\rfloor\right)$ . Позначимо $\left\lfloor \frac{\beta+1}{2} \right\rfloor = \gamma$. Для перевірки необхідно зробити в першому випадку $C_\gamma^3 + C_{\beta+1-\gamma}^3$ спроб, а в найгіршому випадку ще $F_{2,2}^3(\gamma, \beta+1-\gamma)$. Враховуючи вираз для $\lambda_2$, після перетворень першої формули отримаємо остаточний вигляд

$$F_2 = \frac{\beta(\beta-1)}{6}[3n-(\beta+1)(2r-1) + C^3_{\left\lfloor \frac{\beta}{2} \right\rfloor+1} + \left\lfloor \frac{\beta}{2} \right\rfloor C^2_{\left\lfloor \frac{\beta+1}{2} \right\rfloor} - 1 \qquad \text{для } \lambda_2 > 0. \tag{11}$$

Для другого випадку необхідно спочатку зробити $C_{\beta-\gamma}^3 + C_\gamma^3$ перевірок, а потім ще $F_{2,2}^3(\beta-\gamma,\ \gamma)$ спроб. В результаті перетворень остаточно отримаємо

$$F_2 = \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{6}(r-2) + C^3_{\left\lfloor \frac{\beta+1}{2} \right\rfloor} + \left\lfloor \frac{\beta-1}{2} \right\rfloor C^2_{\left\lfloor \frac{\beta+1}{2} \right\rfloor} - 1 \qquad \text{для } \lambda_2 = 0. \tag{12}$$

Оцінити, яка стратегія з двох краща, поки що не вдалося. На чисельних експериментах в залежності від різних значень $r$ та $n$ висновок про перевагу якоїнебудь з них неоднозначний.

Для $k$ > 3 виведення формул ускладнюється, а кількість стратегій збільшується.

*В.И. Билецкий, Г.А.Донец, Э.И.Ненахов*

КОМБИНАТОРНОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ. ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЯ

Приводится постановка ограниченной и неограниченной задач комбинаторного распознавания. На примере задачи о выключателях показано, каким способом нужно разбить на группы множество выключателей, чтобы за минимальное число проб найти нужное количество неисправных выключателей. Рассматривается также задача выбора количества однотипних элементов из двух заданных множеств. Для каждой задачи приводяться формулы оценок минимального числа проб.

*V.I. Biletsky, G.A. Donets, E.I. Nenakhov*

COMBINATORIAL RECOGNITION. THE PROBLEMS AND THEIR SOLVING

The bounded and unbounded combinatorial recognition problems are defined. Using a problem of switches as an example, we show how to divide the subset of switches into groups so that by minimal number of tests the given number of faulty switches could be found. We also consider the problem of choosing the number of same type elements of the two given sets. For every problem we give evaluating formulas for minimal number of tests.

1. *Донец Г.А.* Задачи комбинаторного распознавания // Материалы XVI Международной конф. „Проблемы теоретической кибернетики" – Нижний Новгород: 2011. - С. 142 - 144.
2. *Донец Г.А.* Методы комбинаторного распознавания // Материалы Международнай конф. „Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии" – Кишинев: – 24-26 марта 2010. – С. 142 – 147.

Отримано 14.05.2012