УДК 519.8

О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ, Т.А. БАРДАДЫМ, Е.А. ЛИХОВИД

О ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ НА МНОГОГРАННОМ КОНУСЕ

Для нахождения минимального значения квадратичной функции на многогранном конусе применяются двойственные оценки с использованием функционально избыточных ограничений, полученых путем попарного перемножения исходных линейных ограничений. Сформулировано необходимое и достаточное условие, когда такой подход дает точное значение глобального минимума задачи.

В математическом моделировании экономических процессов (при геометрической интерпретации процессов экономического роста, прогнозировании, в задачах планирования и управления экономическими объектами и т. п.), впрочем как и в других областях, возникают задачи минимизации квадратичной функции на многогранном конусе $K = \{x \in R^n : B^T(x-c) \ge 0\}$, где матрица $B = (b_1, \ldots, b_m) \in R^{m \times n}$ задается нормальными векторами m гиперплоскостей в n-мерном пространстве, проходящих через общую точку $c \in R^n$ и образующих конус K с вершиной в c. Считая $c = 0$ (т.е. совместив вершину конуса с началом координат), что не ограничивает общности задачи, запишем задачу в следующем виде:

$$f^* = \min_{x \in \Re^n}(x^T A_0 x + b_0^T x) \qquad (1)$$

при ограничениях

$$b_i^T x \ge 0\,,\ i = \overline{1,m}\,. \qquad (2)$$

В общем случае задача (1)–(2) является *NP* трудной. (Отметим, например, связь задачи минимизации квадратичной функции на положительном ортанте с задачей линейной дополнительности – при $b_i = e_i$, $i = \overline{1,n}$, задача (1)–(2) сводится к задаче $f^* = \min_{x \in \Re^n}\{b_0^T x / 2 : A_0 x + b_0/2 \ge 0,\ x \ge 0,\ (A_0 x + b_0/2, x) = 0\}$. Здесь e_i – вектор, *i*-ая компонента которого равна единице, а остальные нулю).

Некоторые интересные результаты для рассматриваемой задачи можно получить, если для ее решения применить технику двойственных оценок с использованием функционально избыточных ограничений [1]. Принимая во внимание неоднозначность постановки оптимизационных задач, например, при использовании дополнительных (функционально избыточных) ограничений различного вида, можно получать различные результаты о возможности нахождения минимального значения f^*.

В качестве примера в данной работе расширим задачу (1)–(2) функционально избыточными ограничениями

$$x^T b_i b_j^T x \geq 0, \; i,j=\overline{1,m}, \tag{3}$$

которые являются следствием ограничений (2), и исследуем вопрос точности двойственной оценки для задачи (1)–(3).

Для дальнейшего изложения напомним, что двойственная оценка ψ^* оптимального значения целевой функции f^* квадратичной задачи общего вида

$$f^* = \inf\{f_0(x) : f_i(x) \leq 0, i \in I, f_i(x) = 0, j \in J; x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \Re^n\}, \tag{4}$$

где $f_i(x) = x^T A_i x + b^T{}_i x + c_i$, $i \in \{0\} \bigcup I \bigcup J$, определяется следующим способом:

$$\psi^* = \sup_{u \in D \cap U^+} \psi(u) \leq f^*, \tag{5}$$

где $\psi(u) = \inf_{x \in R^n} L(x,u)$, $L(x,u) = x^T A(u) x + b^T(u) x + c(u)$ – функция Лагранжа для задачи (4), $U^+ = \{u : u_i \geq 0, i \in I\}$, D – множество двойственных переменных $u \in \Re^m$ ($m = |I| + |J|$), при которых матрица $A(u)$ положительно определена. В случае, когда двойственная оценка для квадратичной задачи точная, будем говорить, что она обладает Ω-свойством [1].

Перейдем непосредственно к исходной задаче в постановке (1)–(3), для которой докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если $f^* > -\infty$, то двойственная оценка ψ^* для квадратичной задачи (1)–(3) точная, тогда и только тогда, когда матрица $A_\nu = \begin{pmatrix} A_0 & b_0/2 \\ b_0^T/2 & \nu \end{pmatrix}$ для некоторого ν представима в виде суммы неотрицательно-определенной матрицы и линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами матриц $\tilde{b}_i \tilde{b}_j^T$, $i,j = \overline{1,m+1}$, где $\tilde{b}_i^T = (b_i^T \, 0)$, $i = \overline{1,m}$, и $b_{m+1} = e_{n+1}$.

Доказательство. Преобразуем задачу (1)–(3) к однородному виду:

$$f^* = \min_{x \in \Re^n, y \in \Re^1} (x^T A_0 x + b_0^T x y) \tag{6}$$

при ограничениях

$$b_i^T x y \geq 0, \; i = \overline{1,m}, \tag{7}$$

$$x^T b_i b_j^T x \geq 0, \; i,j = \overline{1,m}, \tag{8}$$

$$y^2 - 1 = 0\,, \tag{9}$$

$$y^2 \ge 0\,. \tag{10}$$

В [2] доказано, что двойственные оценки (определенные согласно (5)) задачи (1)–(3) и задачи (6)–(9) равны. Последнее ограничение (10) также никак не влияет на значение двойственной оценки для задачи (6)–(9) и введено только для удобства дальнейшего изложения.

По теореме [3] необходимым и достаточным условием точности двойственной оценки (5) для задачи (4) ($\psi^* = f^*$) является существование такого вектора множителей Лагранжа u^*, при котором функция $L(u^*, x) - f^*$ представима в виде суммы квадратов линейных форм, т.е.

$$\exists u^* : L(u^*, x) - f^* = \sum_{i=1}^{k} l_i^2(x)\,. \tag{11}$$

Для задачи (6)–(10) функция Лагранжа при $u \ge 0$, $u \in \Re^{m\times m+m+1}$, записывается следующим образом:

$$L(x, y, u, v) = x^T A_0 x + b_0^T xy - \sum_{i=1}^{m} u_{i,n+1} b_i^T xy - \sum_{i,j=1}^{m} u_{ij} x^T b_i b_j^T x - u_{n+1,n+1} y^2 + v(y^2 - 1)\,,$$

и для нее условие (11) примет следующий вид: существует $\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix}$, такое что

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_0 & b_0/2 \\ b_0^T/2 & -v^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sum\limits_{i,j=1}^{m} u_{ij}^* b_i b_j^T & \sum\limits_{i=1}^{m} u_{i,n+1}^* b_i/2 \\ \sum\limits_{i=1}^{m} u_{i,n+1}^* b_i^T/2 & u_{n+1,n+1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - v^* - f^* = \sum_{i=1}^{k} l_i^2(x, y)$$

Другими словами, оценка является точной тогда и только тогда, когда для некоторого v^* во-первых, матрица $A_v(v^*) = \begin{pmatrix} A_0 & b_0/2 \\ b_0^T/2 & -v^* \end{pmatrix}$ представима в виде суммы неотрицательно определенной матрицы (соответствует сумме квадратов правой части равенства $\sum\limits_{i=1}^{k} l_i^2(x, y)$) и матрицы

$$A_u(u^*) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i,j=1}^{m} u_{ij}^* b_i b_j^T & \sum\limits_{i=1}^{m} u_{i,n+1}^* b_i/2 \\ \sum\limits_{i=1}^{m} u_{i,n+1}^* b_i^T/2 & u_{n+1,n+1}^* \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} u_{ij}^* \begin{pmatrix} b_i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_j \\ 0 \end{pmatrix}^T + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m} u_{i,n+1}^* \begin{pmatrix} b_i \\ 0 \end{pmatrix} e_{n+1}^T + \sum_{i=1}^{m} u_{i,n+1}^* e_{n+1} \begin{pmatrix} b_i \\ 0 \end{pmatrix}^T \right) + u_{n+1,n+1}^* e_{n+1} e_{n+1}^T\,, \tag{12}$$

и, во-вторых, $v^* + f^* = 0$. (Фактически это записано условие неотрицательной определенности матрицы функции Лагранжа $A(u,v) = A_v(v) - A_u(u)$ в точке $\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix}$, где $v^* = -f^*$).

Отсюда необходимость условия теоремы 1 очевидна – матрица A_u (12) и есть линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами матриц $\tilde{b}_i \tilde{b}_j^T$, $i, j = \overline{1, m+1}$).

Докажем достаточность условия теоремы 1. Пусть при некотором v матрица $A_v(v)$ может быть представлена в виде суммы неотрицательно определенной матрицы и линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами матриц $\tilde{b}_i \tilde{b}_j^T$, $i, j = \overline{1, m+1}$. Понятно, что множество таких v ограничено снизу некоторым конечным значением v^* ($v \geq v^*$), поскольку при отрицательных значениях указанное представление уже невозможно вне зависимости от переменных u.

Рассмотрим задачу

$$f_v^* = \min_{x \in \Re^n, y \in \Re^1} (x^T A_0 x + b_0^T xy + v(y^2 - 1)) \tag{13}$$

при ограничениях

$$b_i^T xy \geq 0, \ i = \overline{1, m}, \tag{14}$$

$$x^T b_i b_j^T x \geq 0, \ i, j = \overline{1, m}, \tag{15}$$

$$y^2 \geq 0 \tag{16}$$

(получена из задачи (6)–(10) путем исключения ограничения $y^2 - 1 = 0$ и добавления в целевую функцию соответствующего "лагранжевого" члена). Задача (13)–(16) при любом фиксированом $v \geq v^*$ имеет точную оценку

$$f_v^* = \psi_v^* = -v .$$

Это следует из того, что, с одной стороны, для задачи (13)–(16) f_v^* может принимать либо значение $-v$, либо $-\infty$. С другой стороны, если при v существует такой вектор u, что матрица функции Лагранжа $A(u,v) = A_v(v) - A_u(u)$ неотрицательно определена, то оценка ψ_v^* равна $-v$ (т.к. минимум внутренней задачи достигается при $x^* = 0$). При граничном значении v^* матрица $A(u, v^*)$ становится вырожденной и, соответственно, система уравнений

$$\begin{cases} L_x'(x, y, u, v^*) = 0 \\ L_y'(x, y, u, v^*) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad A(u, v^*) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

будет иметь неоднозначное решение (как минимум одна переменная "лишняя"). Т.е. для любого y существует x, такой что $f^*_{v^*} = \psi^*_{v^*} = -v^*$. Поскольку случаю $y = 1$ соответствует исходная задача (4)–(10), получаем, что $f^* = \psi^* = -v^*$ при таком $\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix}$, при котором матрица $A(u^*, v^*)$ неотрицательно определена (напомним, что это равносильно, согласно (12), представлению в виде суммы неотрицательно определенной матрицы и линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами матриц $\tilde{b}_i \tilde{b}_j^T$, $i, j = \overline{1, m+1}$).

Достаточность и теорема в целом доказано.

Из доказанной теоремы, в частности, следует результат Н. З. Шора для задачи минимизации квадратичной функции на положительном ортанте – $\{f^* = \min(x^T K_0 x + b_0^T x) : x \geq 0, i = \overline{1, n}\}$, сформулированный в виде следующей теоремы.

Теорема 2 [1, с. 117]. Если $f^* > -\infty$, то ψ^* для квадратичной задачи $\{f^* = \min(x^T K_0 x + b_0^T x) : x \geq 0, i = \overline{1, n}, x_i x_j \geq 0, i, j = \overline{1, n}, x \in \Re^n\}$ совпадает с f^* тогда и только тогда, когда матрица $\bar{K}_r = \begin{pmatrix} K_0 & b_0 / 2 \\ b_0^T / 2 & r \end{pmatrix}$ для некоторого $r > 0$ представима в виде суммы неотрицательной и неотрицательно определенной матрицы.

Доказательство ее очевидно – в случае, когда $b_i = e_i$, $i = \overline{1, n}$ ($m = n$), матрица A_u при $u \geq 0$

$$A_u = \sum_{i,j=1}^{m} u_{ij}^* \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_j \\ 0 \end{pmatrix}^T + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{m} u_{i,n+1}^* e_{n+1} \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix}^T + \sum_{i=1}^{m} u_{i,n+1}^* \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix} e_{n+1}^T \right) + u_{n+1,n+1}^* e_{n+1} e_{n+1}^T$$

есть ни что иное, как произвольная неотрицательная матрица.

На практике для вычисления нижней двойственной оценки ψ^* в конкретных численных примерах для задачи (1)–(3) использовалась программа DSQTPR с использованием модификации *r*-алгоритма [4], предназначенная для поиска двойственных лагранжевых оценок в квадратичных задачах общего вида (рассматривались примеры небольшой размерности – $n \approx 1 \div 10$, $m \approx 5 \div 20$). Выбор программы, реализующей алгоритм для общего случая, а не алгоритм для случая однородной квадратичной задачи (6)–(9) (например, типа программы "Знаходження верхньої оцінки цільової функції в багатоекстремальній задачі з однорідними квадратичними функціями", Свидетельство о регистрации авторского права № 40068 от 09.09.2011 г.), обусловлен интересом к возможности нахождения допустимой точки решения задачи. Напомним, что в случае однородности всех квадратичных форм задачи в результате условия положительной определенности матрицы функции Лагранжа всегда получаем значение оценки ψ^* при нулевом векторе прямых переменных, т.е. для задачи (6)–(9) в точке $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = 0$, которая не является допустимой. В случае, когда решение не единственно, недопустимость полученного вектора прямых переменных возникает и в задачах общего вида. Поэтому для получения конкретного решения (точнее, приближения к одному из решений) использовались дополнительные средства – ε-возмущения членов матрицы A_0 и вектора b_0.

Работа выполнена частично в рамках проекта №IZ73ZO_127962 (SNSF, Швейцария).

О.А. Березовський, Т.О. Бардадым, Є.О. Лиховид

ПРО ЗАДАЧУ МІНІМІЗАЦІЇ КВАДРАТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ НА БАГАТОГРАННОМУ КОНУСІ

Для знаходження мінімального значення квадратичної функції на багатогранному конусі застосовуються двоїсті оцінки з використанням функціонально надлишкових обмежень, отриманих шляхом попарного перемноження вихідних лінійних обмежень. Сформульовано необхідну та достатню умову, коли такий підхід дає точне значення глобального мінімуму задачі.

O.A. Berezovskyi, T.O. Bardadym, E.O.Lykhovyd

ON MINIMIZATION OF QUADRATIC FUNCTION ON A POLYHEDRAL CONE

Dual bounds calculated with the use of functionally redundant constraints received by pairwise multiplication of original linear constraints are used for finding the minimum value of quadratic function on a polyhedral cone. Necessary and sufficient condition for finding an exact value of the global minimum is formulated.

1. *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
2. *Березовский О.А., Стецюк П.И.* Об одном способе нахождения двойственных квадратичных оценок Шора // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №2. – С.89–99.
3. *Березовский О.А.* О точности двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – №.1. – С. 33–39.
4. *N.Z.Shor, P.I.Stetsyuk* Dual Solution of Quadratic-Type Problems by r-algorithm (subroutine DSQTPr) // Abstracts of Second International Workshop "Recent Advances in Non-Differentiable Optimization", (October, 1–4, 2001, Kyiv, Ukraine). – P. 36.

Получено 07.05.2012