УДК 518.9

А.В. РУДЕНКО, М.Г. СИДОРЕНКО

О БЛИЗОСТИ *N*-ПОЗИЦИОННЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ТОПОЛОГИИ ИГОЛЬЧАТЫХ ВАРИАЦИЙ И ТОПОЛОГИИ СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМОВ

В классе N-позиционных управлений рассматриваются две метрики. Одна определяется как сумма длин интервалов, где функции не совпадают (игольчатые вариации). Другая, основанная на концепции управлений-мер, определяется как расстояние между траекториями, соответствующими N-позиционным сигналам в пространстве состояний N-позиционных супервизорных часов. Предельные пути – скользящие режимы. Их производные – управления-меры, которыми пополняется пространство обычных кусочно-постоянных N-позиционных управлений в метрике скользящих режимов.

© А.В. Руденко, М.Г. Сидоренко, 2007

Введение. В инженерной практике для управления системами с непрерывным временем и непрерывным пространством состояний часто используются технические решения, которые обеспечивают управление с помощью быстродействующих переключающих устройств.

Переключение, как правило, считается мгновенным, хотя физически оно характеризуется конечной длительностью и выделением тепла. Поэтому, даже когда выделением тепла пренебрегают, что характерно для многих направлений в теории гибридных систем, конечность быстродействия учитывается путем задания минимально допустимых интервалов между переключениями.

Примером является система управления током в обмотке регулирования токамака [1, 2], где управление осуществляется с помощью трехпозиционного тиристорного ключа, который коммутирует напряжения порядка десятков киловольт, а минимальное время выдержки каждого положения ключа зависит, как оказывается, от его предыдущего и последующего значений. Поэтому при преобразовании идеализированного непрерывного сигнала в трехпозиционный импульсный со значениями $\{+E, 0, -E\}$ нельзя воспользоваться алгоритмом аппроксимации обобщенных управлений (управлений-мер) обычными N-позиционными управлениями, применяемым в теории Янга – Варга – Гамкрелидзе.

Причина состоит в том, что этот алгоритм основан на идее, известной в технике как принцип интегральной широтно-импульсной модуляции (ШИМ). Это означает, что на выходе, в зависимости от входного сигнала, не исключается появление импульсов (пауз) сколь угодно малой длительности. На рис. 1 это показано в случае двухпозиционного ключа: по мере затухания входного сигнала ширина импульса становится сколь угодно малой.

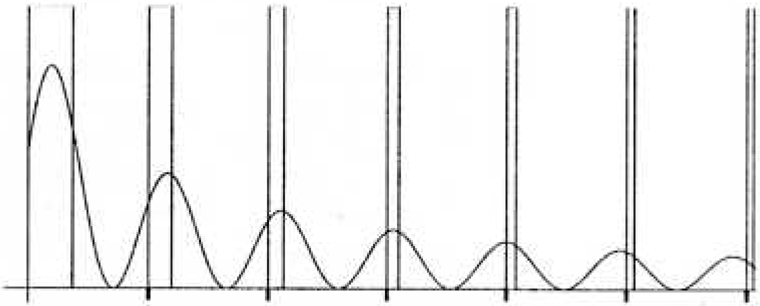

РИС. 1. Входной сигнал (затухающее колебание) и выходной импульсный сигнал, полученный по принципу интегральной ШИМ

Чтобы исправить положение понадобилось бы на каждом периоде импульсного сигнала каким-то адаптивным образом менять значение самого периода.

Имеется еще одно принципиальное ограничение: в системах реального времени будущие значения входного сигнала заранее, вообще говоря, не известны. Поэтому решить какую-то оптимизационную задачу и рассчитать наперед "моменты переключений" (при $N \geq 3$ надо еще указать "с чего на что") невозможно. Хотя с математической точки зрения такая постановка задачи (например, для тестирования и отладки) также имеет смысл.

Таким образом, речь идет не просто об алгоритме, а о приборе – конверторе, который в реальном времени осуществляет необходимое преобразование и управляет N-позиционным ключом на пределе быстродействия (отвод тепла и ряд других эффектов для упрощения анализа не учитываются). Для этого конвертор должен быть снабжен другим прибором, который обеспечивает контроль в каждый текущий момент времени за совокупностью временных длительностей и выполнением ограничений. Такой прибор известен и широко применяется в вычислительной технике (супервизорные N-позиционные часы в системах разделенного времени), а также в спортивной статистике (подсчитывается накопленное к текущему моменту t полное (индивидуальное или командное) время владения мячом). Физически это система N датчиков времени, $Д = (Д_1, \ldots, Д_N)$, работающих по принципу N-позиционных шахматных часов (рис. 2). В каждый момент времени идут только одни часы, остальные стоят. В случае двухпозиционного управления – это обычные шахматные часы (Shess Clock, Game Clock), усовершенствованные в свое время Фишером [3].

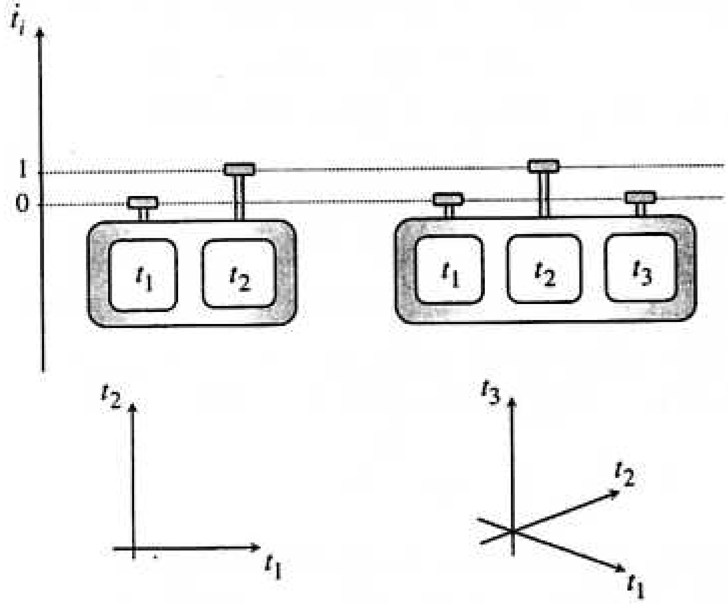

РИС. 2. Обычные двухпозиционные шахматные часы и их трехпозиционный аналог с пространством состояний $\mathbf{R}^3(t_1,t_2,t_3)$

Модель супервизорных часов и метрика скользящих режимов. Систему датчиков $Д=(Д_1,\ldots,Д_N)$ можно рассматривать как оператор, который каждому кусочно-постоянному управлению $u(t)$ ставит в соответствие N-компонентную вектор-функцию $\boldsymbol{t}(t)=\left(t_1(t),\ldots,t_N(t)\right)$, где, по определению, $t_i(t)$ – "полное время выдержки значения u_i при управлении $u(\cdot)$, реализованном к моменту t на промежутке $[0,t]$ (будущие значения могут быть неизвестны)". Это есть сумма длин всех интервалов из промежутка $[0,t]$, на которых $u(s)=u_i$, $0\le s\le t$, что можно записать формально следующим образом:

$$t_i(t) \;=\; \mathrm{mes}\{s\in[0,\ t]\colon\ u(s)=u_i\}\,.$$

В исчислении длительностей Чаочена (Duration Calculus, Zhou Chaochen [4]) – это первичное понятие ("accumulated presence time"), а в качестве первичных объектов используются булевозначные функции непрерывного времени t. Независимо оно было введено в 1987 г. в работе [5] и применялось далее в [6–9] в контексте задачи аппроксимации скользящих режимов и получении оценок.

Из определения следует, что функции $t_i(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$t_i(t) \geq 0, \ \ t_1(t)+\ldots+t_N(t) \ \equiv \ t,$$

а также (почти всюду) дифференциальным уравнениям

$$\frac{dt_i}{dt} = \theta_i\left(u(t)\right), \ \ t_i(0)=0,$$

где $\theta_i(u)$ определяется как $\theta_i(u_j)=\delta_{ij}$ (аналог меры Дирака).

Здесь $\dot{t}_i = \dfrac{dt_i}{dt}$ – "скорость хода" i-го таймера, которая принимает только два значения: ноль (часы стоят) и единица (часы идут), причем имеет место тождество $\theta_1(u)+\ldots+\theta_N(u) \equiv 1$, а функции $t_i(t)$ вычисляются как интегралы

$$t_i(t) = \int_0^t \theta_i(u(s))ds.$$

В качестве первичных объектов в данной работе рассматриваются произвольные кусочно-постоянные функции $u(t)$ непрерывного времени $t \in [0,T]$ со значениями в конечном алфавите $U = \{u_1, \ \ldots \ , \ u_N\}$. При этом заранее не делается никаких предположений относительно природы элементов множества U. Такие управления для краткости называются N-позиционными.

Если имеются два таких управления, то возникает вопрос, по каким признакам можно судить, близки эти управления или нет и что означает их близость: 1) в топологии игольчатых вариаций; 2) в топологии скользящих режимов. Можно ли определить расстояние между ними так, чтобы полученное метрическое пространство N-позиционных управлений было неполным, а результатом его пополнения было пространство управлений-мер? Оказывается, такая возможность существует, и расстояние в этом случае определяется конструктивно, однако несколько необычным образом: не в терминах значений самих функций $u(t)$, $u^*(t)$, а в терминах соответствующих им непрерывных путей в пространстве частичных времен $\mathbf{R}^N(t_1, \ \ldots \ , \ t_N)$, которое играет роль пространства состояний супервизорных часов.

С точностью до значений управления $u(\cdot)$ в моменты переключений соответствие $Д = (Д_1,\ldots,Д_N): u(\cdot) \to \boldsymbol{t}(\cdot) = \left(t_1(\cdot),\ldots,t_N(\cdot)\right)$ является взаимно однозначным, и будет в точности взаимно однозначным, если под управлениями условиться понимать не индивидуальные функции $u(t)$, а классы их эквивалентности, отождествляя функции, совпадающие почти всюду (наглядно смысл этого соответствия поясняется на рис. 3). Это позволяет определить расстояние в пространстве N-позиционных управлений как расстояние между соответствующими им путями в пространстве частичных времен.

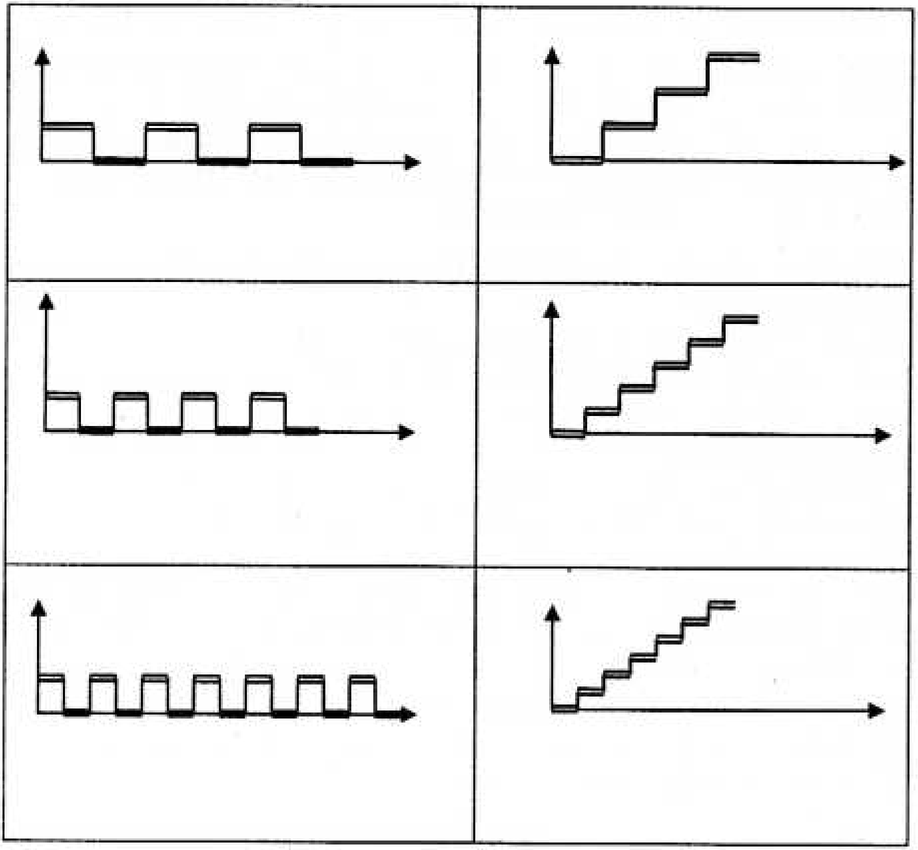

РИС. 3. Импульсные сигналы и соответствующие им пути в пространстве частичных времен $\mathbf{R}^2(t_l, t_p)$

Таким образом, управления-меры можно рассматривать как результат задачи пополнения метрического пространства N-позиционных управлений в метрике скользящих режимов. Она определяется так:

$$d_G(u(\cdot), u^*(\cdot)) \triangleq \max_{0\le t\le T}\left(\left|t_1(t)-t_1^*(t)\right|+\ldots+\left|t_N(t)-t_N^*(t)\right|\right).$$

Вообще говоря, в $\mathbf{R}^N(t_1, \ldots, t_N)$ можно использовать любую норму, но l_1 предпочтительна, так как в этом случае норма функции $t(t)=(t_1(t),\ldots,t_N(t))$ равна текущему моменту t, поскольку $t_i(t)\ge 0$ и $t_1(t)+\ldots+t_N(t)\equiv t$.

Таким образом,

$$d_G(u(\cdot),\ u^*(\cdot)) \triangleq \max_{0\le t\le T}\left(\left|\int_0^t(\theta_1(s)-\theta_1^*(s))ds\right|+\ldots+\left|\int_0^t(\theta_N(s)-\theta_N^*(s))ds\right|\right).$$

Лемма 1. В метрике d_G пространство кусочно-постоянных управлений является неполным, а его пополнением служит пространство управлений-мер.

Исходная конструкция состоит в том, что сначала пополняется пространство путей, а управления-меры определяются затем как производные пополненного пространства путей. Поскольку предельные пути абсолютно непрерывны, их производные существуют почти всюду.

Метрика игольчатых вариаций. Она является более грубой, но также представляет интерес.

В простейшем двухпозиционном случае, когда имеются два сигнала типа импульс – пауза, естественно возникает следующий вопрос: что означает, что эти сигналы мало отличаются друг от друга, и как это отличие численным образом охарактеризовать?

В работе [10, с. 12] Л.С. Понтрягин так характеризует игольчатые вариации, использованные В.Г. Болтянским: "Именно, он удачно выбрал класс управлений для сравнения с оптимальным, применив вариации Макшейна, т.е. рассмотрев те допустимые управления, которые отклоняются от оптимального лишь на конечном числе малых интервалов времени, но на каждом интервале отклоняются произвольно".

Рассмотрим, например, сигналы $\alpha(t)$, $\beta(t)$, принимающие значения 0, 1, и пусть на некотором малом отрезке времени они отличаются. Тогда, если расстояние между ними определить как

$$d_\infty\big(\alpha(\cdot),\ \beta(\cdot)\big) = \max_{0\le t\le T}|\alpha(t)-\beta(t)|,$$

оно будет равно 1, и равно 0 тогда и только тогда, когда они совпадают. Это пример так называемой дискретной метрики, когда расстояние между точками некоторого множества (пространства) абстрактно определяется как 0, если объекты совпадают, и как 1 – в противном случае.

Такое определение не соответствует интуитивному физическому представлению о том, что импульсные сигналы, хотя они существенно отличаются по значениям, в каком-то смысле могут быть близкими. Основываясь на вышеприведенном замечании Л.С. Понтрягина, более подходящим образом расстояние можно определить как сумму длин всех интервалов, на которых функции не совпадают. В данном примере это интеграл

$$d_1\big(\alpha(\cdot),\ \beta(\cdot)\big) = \int_0^T|\alpha(t)-\beta(t)|dt,$$

поскольку $|\alpha(t)-\beta(t)|=0$ при $\alpha(t)=\beta(t)$ и $|\alpha(t)-\beta(t)|=1$, если $\alpha(t)\ne\beta(t)$.

Метрики d_1, d_∞ связаны между собой соотношением

$$d_\infty = \lim_{p\to\infty} (d_1)^{\frac{1}{p}}.$$

Оно вытекает из того, что при любом $p = 1, 2, ...$

$$| \chi_A(t) - \chi_B(t) |^p \equiv | \chi_A(t) - \chi_B(t) |.$$

Для N-позиционных управлений $u(t), u^*(t)$ расстояние определяется аналогично – как сумма длин всех интервалов, где $u(t) \neq u^*(t)$:

$$d_1(u(\cdot),\ u^*(\cdot)) = \mathrm{mes}\ \left\{\ t \in [0,T]:\ u(t) \neq u^*(t)\ \right\}.$$

Можно показать, что в этом случае имеет место формула

$$d_1(u(\cdot),\ u^*(\cdot)) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^T |\,\theta_i(u(t)) - \theta_i(u^*(t))\,|\, dt.$$

Она доказывается, во-первых, путем введения дискретной метрики на U, т.е. метрики $l(u_i, u_j) = 1 - \delta_{ij}$, что позволяет оперировать характеристической функцией множества $E_{\neq}$, где $u(t) \neq u^*(t)$, а, во-вторых, с помощью тождества

$$1 - \delta_{pq} \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left|\delta_{ip} - \delta_{iq}\right|.$$

Определенную таким образом метрику можно рассматривать как метрику, описывающую близость в смысле игольчатых вариаций.

Оказывается, при $N = 2$ задача пополнения пространства кусочно-постоянных управлений в метрике игольчатых вариаций эквивалентна процедуре Лебегова продолжения меры [11], поскольку существует взаимно однозначное соответствие между так называемыми элементарными множествами и их характеристическими функциями, которые и являются кусочно-постоянными двухпозиционными сигналами типа импульс – пауза.

Функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ можно рассматривать как характеристические функции некоторых элементарных множеств $A, B \subset [0,T]$, т.е. $\alpha(t) = \chi_A(t)$, $\beta(t) = \chi_B(t)$. Напомним, что множество $E \subset \mathbf{R}$ называется элементарным, если его можно представить хотя бы одним способом как объединение конечного числа попарно непересекающихся открытых, замкнутых или полуоткрытых интервалов [11].

Пусть $\mu(E)$ – сумма длин таких интервалов (исходная мера). Тогда

$$\int_0^T |\chi_A(t) - \chi_B(t)|\, dt = \mu(A\Delta B),$$

где $A\Delta B$ – симметрическая разность, т.е. $d_1\left(\chi_A(\cdot),\ \chi_B(\cdot)\right) = \mu(A\Delta B)$.

Кроме того, поскольку

$$\left|\int_0^T \chi_A(t)dt - \int_0^T \chi_B(t)dt\right| \le \int_0^T |\chi_A(t) - \chi_B(t)|dt,$$

имеет место неравенство $|\mu(A) - \mu(B)| \le \mu(A\Delta B)$, используемое в теории меры [11, с. 258]. В нем, кстати, отражается связь между двумя метриками – скользящих режимов (левая часть) и игольчатых вариаций (правая).

Иными словами, в случае произвольного N имеет место следующий результат.

Лемма 2. В метрике игольчатых вариаций пространство кусочно-постоянных управлений является неполным, а его пополнением служит пространство измеримых по Лебегу функций со значениями в том же множестве U.

Однако, если в пополненном таким образом пространстве ввести дополнительно метрику скользящих режимов, то оно снова окажется неполным, а его пополнением будет пространство управлений-мер (таблица).

ТАБЛИЦА

Пространство функций	Метрика	Результат пополнения
Кусочно-постоянные функции $u(\cdot):[0,T] \to U = \{u_1,\dots,u_N\}$	игольчатых вариаций	Измеримые по Лебегу функции $u(\cdot):[0,T] \to U = \{u_1,\dots,u_N\}$
	скользящих режимов	Измеримые по Лебегу функции $\theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_N(t))$, $\theta(\cdot) : [0,T] \to \Delta^{N-1} = \mathbf{P}(U)$ со значениями в пространстве вероятностных мер на U

Пример. Функции Радемахера. Пусть $r_1(t)$ – кусочно-постоянная функция непрерывного времени t со значениями в двухсимвольном абстрактном алфавите $U = \{u_1, u_2\}$, определенная на промежутке $[0,T]$ следующим образом: на первой его половине она принимает значение u_1, а на второй – значение u_2. Ее периодически можно распространить на всю вещественную ось $\mathbf{R}$ и записать аналитически как суперпозицию двух функций – периодической функции $\sin(\omega t)$, где $\omega = 2\pi/T$, и абстрактной функции Хевисайда

$$H(x) = \begin{cases} u_1, & x \ge 0, \\ u_2, & x < 0. \end{cases}$$

Функции $r_k(t)$ определяются с помощью удвоения частоты: $r_{k+1}(t) = r_k(2t)$. В случае $U = \{1, -1\}$ это функции Радемахера $r_k(t) = \operatorname{sign}\sin(2^{k-1}\omega t)$, последовательность которых ни в каком обычном смысле не сходится. В частности, $d_1\left(r_m(\cdot), r_n(\cdot)\right) = T/2$ при $m \neq n$. Однако соответствующие пути в $\mathbf{R}^2(t_+, t_-)$ (рис. 4) сходятся к диагональному скользящему режиму $\left(t_+(t),\ t_-(t)\right) \equiv \left(\frac{1}{2}t,\ \frac{1}{2}t\right)$. Его производная есть, по определению, управление-мера $\left(\theta_+(t), \theta_-(t)\right) \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

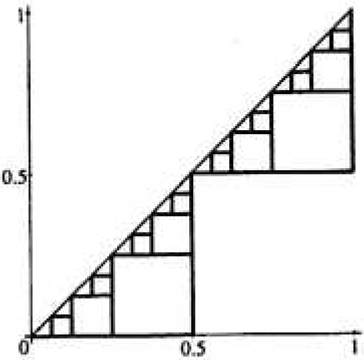

РИС. 4. Пути в $\mathbf{R}^2(t_+, t_-)$, соответствующие функциям Радемахера

Аналогичным свойством обладает последовательность управлений

$$u_{(k)}(t) = \begin{cases} u_1, \ \sin k\omega t \geq 0, \\ u_2, \ \sin k\omega t < 0, \end{cases}$$

которая в теории обобщенных управлений часто приводится в качестве примера. В работах [8, 9] она использовалась при изучении аналогии между скользящими режимами и мультипликативной формулой Ли для матричных экспонент:

$$\lim_{k \to \infty} \left(e^{At/k} e^{Bt/k}\right)^k = e^{(A+B)t}.$$

Связь между метрикой скользящих режимов и метрикой игольчатых вариаций (они не эквивалентны) состоит в следующем:

$$d_G\left(u(\cdot), u^*(\cdot)\right) \leq 2d_1\left(u(\cdot), u^*(\cdot)\right).$$

О.В. Руденко, М.Г. Сидоренко

ПРО БЛИЗЬКІСТЬ *N*-ПОЗИЦІЙНИХ КЕРУВАНЬ У ТОПОЛОГІЇ ГОЛЧАТИХ ВАРІАЦІЙ І ТОПОЛОГІЇ КОВЗНИХ РЕЖИМІВ

У класі *N*-позиційних керувань розглядаються дві метрики. Одна визначається як сума довжин інтервалів, де функції не збігаються (голчаті варіації). Друга, у відповідності з теорією Янга – Варга – Гамкрелідзе, визначається як відстань між траєкторіями, що відповідають *N*-позиційним керуванням у просторі станів *N*-позиційних супервізорних часів. Граничні траєкторії – ковзні режими. Їх похідні – керування-міри, якими поповнюється метричний простір кусково-сталих *N*-позиційних керувань у топології ковзних режимів.

A.V. Rudenko, M.G. Sidorenko

ON A PROXIMITY OF *N*-POSITIONAL CONTROLS IN A TOPOLOGY OF NEEDLE-SHAPED VARIATIONS AND A TOPOLOGY OF SLIDING MODES

Two metrics are considered in a space of *N*-positional signals. The first one is defined as a sum of the length of all time intervals where signals are not coincided (needle-shaped variations).The second one accordingly to Yung – Warga – Gamkrelidze theory is defined as a distance between trajectories generated by *N*-positional signals in a state space of *N*-positional supervisory clock. Limiting trajectories are sliding modes. And their derivatives are just relaxed controls. The latter are completion of the metric space of piece-wise constant *N*-positional controls in a topology of sliding modes.

1. *Самойленко Ю.И., Губарев В.Ф., Кривонос Ю.Г.* Управление быстропротекающими процессами в термоядерных установках. – Киев: Наук. думка, 1988. – 284 с.
2. *Кривонос Ю.Г., Руденко А.В., Сидоренко М.Г.* О конвертации управлений-мер в допустимые *N*-позиционные сигналы // Dynamical system modeling and stability investigation: Thesis of Conf. Reports, May 22–25, 2007. – Kyiv, 2007. – С. 58.
3. *Fischer, Robert J.* Digital chess clock // U.S. Patent 4,884,255. – August 5, 1988.
4. *Chaochen Zhou, Hoare C.A.R., Ravn A.P.* A calculus of durations // Inform. Proc. Letters. – 1991. – **40** (5). – P. 269 – 276.
5. *Руденко А.В.* Об аппроксимации скользящих режимов в системах с ограничениями на частоту переключений // Кибернетика и вычисл. техника. – Киев: Наук. думка, 1987. – Вып. 75. – С. 44 – 48.
6. *Руденко А.В.* Прикладная концепция близости *N*-позиционных управлений в топологии скользящих режимов // Сложные системы управления. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1989. – С. 72 – 78.
7. *Руденко А.В.* Алгоритм синтеза *N*-позиционных управлений с фиксированными минимально допустимыми интервалами между переключениями // Кибернетика и вычисл. техника. – 1994. – Вып. 101. – С. 16 – 25.

8. *Руденко О.В.* Гарантовані мажорантні оцінки непереставності матрицевих експонент, ковзні режими та мультиплікативні формули Лі // Доп. НАН України. – 1995. № 8. – С. 13 – 17.
9. *Rudenko A.* The Concept of a Supervisory *N*-position Chess-Like Clock, Relaxed Controls, and a Time-Sharing Mechanism in Hybrid System Theory // Abstracts of Int. Conf. dedicated to 90th Anniversary of L.S. Pontryagin. – Moscow, 1998 – Vol. "Optimal Control & Appendices". – P. 167 – 170.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
11. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М: Наука, 1981. – 544 с.

Получено 24.05.2007