Розглянуто деякі стохастичні диференційні рівняння та знайдено їх розв'язки, що дозволяє прогнозувати відсоткову ставку на фінансовому ринку.

УДК 519.21

Т.В. ПЕПЕЛЯЄВА

ДЕЯКІ СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Вступ. Робота присвячена дослідженню нелінійних стохастичних диференційних рівнянь, за допомогою яких визначається коротка відсоткова ставка на ринку цінних паперів.

Розглянемо ринок цінних паперів, на якому діють бонди.

Означення 1. Бондом з датою сплати T, або T-бондом, називають контракт, який гарантує його власнику, що в момент часу T йому буде сплачено 1 гривня.

В силу того, що коротка відсоткова ставка, як і багато інших процесів економіки є стохастичними, то прийнято вважати, що його динаміка задається стохастичним диференціальним рівнянням, загальний вигляд якого

$$dr(t) = \mu\,(t, r(t))dt + \sigma\,(t, r(t))dW\,(t), \qquad (1)$$

де $r(t)$ – стохастичний процес для короткої ставки; $\mu(t, r)$ – функція зносу; $\sigma(t, r)$ – дифузія рівняння; $W(t)$ – вінерівський процес.

Нехай далі ціна T-бонда задається за допомогою деякої функції, а саме:

$$p(t, T) = R(t, r(t); T),$$

де R – гладка функція від трьох змінних.

Основне місце у методі, який викладено в даній роботі, займає поняття афінної структури моделі.

Означення 2. Вважають, що модель ціни T-бонда допускає афінну структуру, якщо $p(t,T) = R(t, r(t); T)$, де R має вигляд

$$R(t, r; T) = e^{A\,(t,\,T)\,-\,B\,(t,\,T)\,r}, \qquad (2)$$

де A, B – визначені функції, що не залежать від r.

Має місце наступний результат ([1]).

Теорема 1. Припустимо, що в рівнянні (1) μ і σ можна представити у вигляді

$$\begin{cases} \mu(t,r) = \alpha(t)r + \beta(t), \\ \sigma(t,r) = \sqrt{\gamma(t)r + \delta(t)}. \end{cases}$$

Тоді R допускає афінну структуру (2).

1.1. Рівняння Кокса–Інгерсолла–Росса має вигляд

$$dr(t) = ar(t)\,dt + \sigma\sqrt{r(t)}\,dW(t). \tag{3}$$

Теорема 2. Нехай відсоткова ставка r задовольняє рівняння (3). Тоді r має вигляд

$$r(t) = \frac{2\sigma^2 z^2 - 4u(T,t)v(T,t) \pm 2\sigma z\sqrt{\sigma^2 z^2 - 4u(T,t)v(T,t)}}{4u^2(T,t)},$$

де $z(t) = \int_t^T B(s)dW(s)$, $u(T, t) = B(T) - \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T B^2(s)ds$, $v(T, t) = a(T-t) - A(T)$,

$$A(t) = at, \quad B(t) = \frac{2a}{\sigma^2}.$$

Доведення. Щоб розв'язати рівняння (3), шукаємо функцію $R(t, r)$ таким чином, щоб стохастичне диференціальне рівняння відносно R мало вигляд

$$dR = a\,R\,dt + R'_r\,\sigma\sqrt{r}\,dW(t). \tag{4}$$

Рівняння (3) задовольняє умови теореми 1. Тоді $R(t, r)$ із (4) може бути представлене у вигляді (2).

Отже маємо

$$d\,e^{A(t)-B(t)r} = a\,e^{A(t)-B(t)r}\,dt - \sigma B(t)\,e^{A(t)-B(t)r}\sqrt{r}\,dW(t). \tag{5}$$

За формулою Іто для функції $R(t, r)$, де r задовольняє рівняння (3), маємо

$$dR(t, r) = [\,R'_t(t,r) + R'_r(t,r)\,ar + \frac{1}{2}R''_{rr}(t,r)\,\sigma^2 r]\,dt + R'_r(t,r)\,\sigma\sqrt{r}\,dW(t).$$

Підставимо в отримане рівняння замість $R(t, r)$ його представлення (2), отримаємо:

$$de^{A(t)-B(t)r} = e^{A(t)-B(t)r}[A'(t) - B'(t)\,r - B(t)\,a\,r + \frac{1}{2}\,B^2(t)\,\sigma^2 r]\,dt + $$
$$+ e^{A(t)-B(t)r}B(t)\,\sigma\sqrt{r}\,dW(t). \tag{6}$$

Прирівнявши коефіцієнти при dt у рівняннях (5) та (6), отримаємо наступне рівняння відносно $A(t)$ і $B(t)$:

$$A'(t) - r\,B'(t) - a\,r\,B(t) + \frac{\sigma^2 r}{2}B^2(t) - a = 0. \tag{7}$$

Нехай функції A і B такі, що

$$\begin{cases} A'(t) = a, \\ B'(t) + aB(t) - \dfrac{\sigma^2}{2} B^2(t) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

За цими обмеженнями рівняння (7) перетворюється у тотожність. Таким чином можемо обмежитися функціями $A(t)$ і $B(t)$, які задовольняють систему (8). Розв'язком системи (8) є:

$$\begin{cases} A(t) = at, \\ B(t) = \dfrac{2a}{\sigma^2}. \end{cases}$$

З іншого боку, зробимо в (4) заміну $z = \ln R$, тоді $dz = \dfrac{1}{R} dR$, $z = A(t) - rB(t)$.

Застосуємо до функції z і рівняння (4) формулу Іто [2], тоді приходимо до рівняння

$$dz(t) = (a - \frac{\sigma^2 r}{2} B^2(t)) \, dt - \sigma \sqrt{r} \, B(t) \, dW(t) \, ,$$

звідки

$$z(t) = a(T-t) - \frac{r\sigma^2}{2} \int_t^T B^2(s) ds \; - \sigma \sqrt{r} \int_t^T B(s) dW(s) \; ,$$

де T – фіксований час платежу.

Отже

$$R(t, r) = \exp \{ \, a(T-t) - \frac{r(t)\sigma^2}{2} \int_t^T B^2(t) dt \; - \sigma \sqrt{r(t)} \int_t^T B(t) dW(t) \, \}. \tag{9}$$

Підставивши замість функції $R(t,r)$ її представлення $e^{A(t) - r B(t)}$ і прологарифмувавши обидві частини рівності (9), отримуємо квадратне рівняння відносно функції r :

$$[\frac{\sigma^2}{2} \int_t^T B^2(t) \, dt - B(t)] \, r + [\sigma \int_t^T B(t) \, dW(t)] \sqrt{r} \; + [A(T) - a(T-t)] = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є

$$r(t) = \left[\frac{\sigma z \pm \sqrt{\sigma^2 z^2 - 4 \left(B(T) - \dfrac{\sigma^2}{2} \displaystyle\int_t^T B^2(s) ds \right) \big(a(T-t) - A(T) \big)}}{2 \left(B(T) - \dfrac{\sigma^2}{2} \displaystyle\int_t^T B^2(s) ds \right)} \right]^2 =$$

$$= \frac{2\sigma^2 z^2 - 4u(T,t)v(T,t) \pm 2\sigma z\sqrt{\sigma^2 z^2 - 4u(T,t)v(T,t)}}{4u^2(T,t)} \ ,$$

де $z(t) = \int_t^T B(s)dW(s)$, $u(T, t) = B(T) - \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T B^2(s)ds$, $v(T, t) = a(T - t) - A(T)$.

1.2. Рівняння Халла–Вайта (розширення Васічека) має вигляд

$$dr(t) = (\theta(t) - a(t)\, r(t))\, dt + \sigma(t)\, dW(t)\,, \quad (a(t) > 0). \tag{10}$$

Теорема 3. Нехай відсоткова ставка r задовольняє рівняння (10). Тоді r має вигляд

$$r(t) = \frac{1}{B(t)}\ [A(t) - \int_t^T \left(a(s) - \frac{1}{2}B^2(s)\sigma^2(s) \right) ds + \int_t^T B(s)\sigma(s)dW(s)\,],$$

де
$$A(t) = \int_0^t a(s)\, ds + \int \theta(t) e^{\int a(s)ds} \int_0^t \theta(s) e^{\int_0^s a(u)du} ds - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s) e^{2\int_0^s a(u)du} ds\,,$$

$$B(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}\ .$$

Доведення. Для того, щоб розв’язати рівняння (10), розглянемо наступне стохастичне рівняння відносно функції $R(t, r)$:

$$dR(t, r) = a(t)\, R(t, r)\, dt + R'_r(t,r)\sigma(t)\, dW(t). \tag{11}$$

Рівняння (10) задовольняє умови теореми 1, тому $R(t,r)$ може бути представлене у вигляді $R(t, r) = e^{A(t) - rB(t)}$. Застосуємо формулу Іто до (11), тоді маємо

$$dR(t, r) = [\, R'_t(t,r) + R'_r(t,r)\ \ (\theta(t) - a(t)r) + \frac{1}{2}R''_{rr}(t,r)\, \sigma^2(t)]dt + R'_r(t,r)\ \ \sigma(t)\, dW(t).$$

Скориставшись представленням (2), отримуємо:

$$de^{A(t) - r\,B(t)} = e^{A(t) - r\,B(t)}\ [A'(t) - r\,B'(t) - B(t)\,(\theta(t) - a(t)\, r) + \frac{1}{2}B^2(t)\, \sigma^2(t)\, r]\, dt +.$$
$$+\, e^{A(t) - r\,B(t)}\ B(t)\, \sigma(t)\, dW(t). \tag{12}$$

Прирівнявши коефіцієнти при dt у рівняннях (11) та (12), отримуємо співвідношення:

$$A'(t) - rB'(t) - B(t)\, [\theta(t) - a(t)\, r] + \frac{1}{2}B^2(t)\, \sigma^2(t) = a(t).$$

Нехай функції A і B такі, що

$$\begin{cases} A'(t) = a(t) + B(t)\theta(t) - \frac{1}{2}B^2(t)\sigma^2(t), \\ B'(t) - B(t)a(t) = 0\ . \end{cases}$$

Розв’язок цієї системи:

$$\begin{cases} A(t) = \int a(t)dt + \int \theta(t)e^{\int a(s)ds}dt - \frac{1}{2}\int \sigma^2(t)e^{2\int a(s)ds}dt, \\ B(t) = e^{\int a(t)dt}. \end{cases}$$

З іншого боку, зробимо в рівнянні (11) заміну $z = \ln R$. Застосуємо до функції z і рівняння (11) формулу Іто. Отримуємо

$$dz(t) = (a(t) - \frac{1}{2}B^2(t)\,\sigma^2(t))\,dt - B(t)\,\sigma(t)\,dW(t).$$

Тоді

$$z(t) = \int_t^T a(s)ds - \int_t^T \frac{1}{2}\sigma^2(s)B(s)ds - \int_t^T B(s)\sigma(s)dW(s).$$

Звідси

$$R(t, r) = \exp\left\{\int_t^T \left(a(s) - \frac{1}{2}B^2(s)\sigma^2(s)\right)ds + \int_t^T B(s)\sigma(s)dW(s)\right\}, \tag{13}$$

де T – фіксований час платежу.

Підставляємо замість функції $R(t, r)$ її представлення $e^{A(t) - rB(t)}$ і прологарифмуємо обидві частини рівності (13), маємо

$$\int_t^T \left(a(s) - \frac{1}{2}B^2(s)\sigma^2(s)\right)ds + \int_t^T B(s)\sigma(s)dW(s) = A(t) - r(t)\,B(t).$$

Розв'язавши це рівняння відносно r, отримуємо, що

$$r(t) = \frac{1}{B(t)}\left[A(t) - \int_t^T \left(a(s) - \frac{1}{2}B^2(s)\sigma^2(s)\right)ds + \int_t^T B(s)\sigma(s)dW(s)\right].$$

1.3. Рівняння Халла–Вайта (розширення Кокса–Інгерсолла–Росса) має вигляд

$$dr(t) = (\theta(t) - a(t)\,r(t))\,dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}\,dW(t), \quad (a(t) > 0). \tag{14}$$

Теорема 4. Нехай відсоткова ставка r задовольняє рівняння (14). Тоді r має вигляд

$$r(t) = \left(\frac{\int_t^T B(s)\sigma(s)dW(s) \pm \sqrt{D}}{2\left[B(t) - \frac{1}{2}\int_t^T B^2(s)\sigma^2(s)ds\right]}\right)^2,$$

де $D = \left(\int_t^T B(s)\sigma(s)dW(s)\right)^2 - 4\left(B(t) - \frac{1}{2}\int_t^T B^2(s)\sigma^2(s)ds\right)\left(\int_t^T a(s)ds - A(t)\right)$,

$$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t B(s)\,\theta(s)\,ds,\; B(t) = -\frac{2e^{\int_0^t a(s)ds}}{\int_0^t \sigma^2(s) e^{\int_0^s a(u)du}\,ds}.$$

Доведення. Для того, щоб розв'язати це рівняння, розглядаємо

$$dR(t, r) = a(t)\, R(t, r)\, dt + R'_r(t,r)\, \sigma(t) \sqrt{r(t)}\; dW(t). \tag{15}$$

Рівняння (14) задовольняє умови теореми 1, тому $R(t, r)$ може бути представлене у вигляді $R(t, r) = e^{A(t) - rB(t)}$. Маємо

$$de^{A(t) - rB(t)} = a(t)\, e^{A(t) - rB(t)}\, dt - B(t)\, e^{A(t) - rB(t)}\, \sigma(t)\, \sqrt{r}\, dW(t).$$

Застосувавши формулу Іто до рівняння (15), отримуємо

$$dR(t, r) = [\, R'_t(t,r) + R'_r(t,r)\, (\theta(t) - a(t)\, r) + \frac{1}{2} R''_{rr}(t,r)\, \sigma^2(t) r]\, dt +$$
$$+ R'_r(t,r)\, \sigma(t) \sqrt{r}\, dW(t).$$

Підставивши в це рівняння замість R його експоненційне представленняня, отримуємо

$$d\, e^{A(t) - rB(t)} = e^{A(t) - rB(t)}\, [A'(t) - rB'(t) - B(t)\, (\theta(t) - a(t)\, r) + \frac{1}{2} B^2(t)\, \sigma^2(t)\, r]\, dt -$$
$$- B(t)\, \sigma(t)\, e^{A(t) - rB(t)} \sqrt{r}\;\, dW(t). \tag{16}$$

Тоді, прирівнявши коефіцієнти при dt у рівняннях (15) і (16), маємо

$$A'(t) - r(t)\, B'(t) - B(t)\, [\theta(t) - a(t)\, r(t)] + \frac{1}{2}\, B^2(t)\, \sigma^2(t)\, r(t) = a(t). \tag{17}$$

Нехай функції A і B такі, що

$$\begin{cases} A'(t) = a(t) + B(t)\theta(t), \\ B'(t) - B(t)a(t) - \frac{1}{2} B^2(t)\sigma^2(t) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

За цими обмеженнями рівняння (17) перетворюється у тотожність. Таким чином можемо обмежитися функціями $A(t)$ і $B(t)$, які задовольняють систему (18). Розв'язком системи (18) є

$$\begin{cases} A(t) = \int a(t)dt + \int B(t)\theta(t)dt, \\ B(t) = -\dfrac{2e^{\int a(t)dt}}{\int \sigma^2(t) e^{\int a(s)ds} dt}. \end{cases}$$

З іншого боку, зробимо в (15) заміну $z = \ln R$, отримуємо

$$dz(t) = [\frac{1}{R}\; a(t)\, R - \frac{1}{2}\; B^2(t)\, \sigma^2(t)\, r]\, dt - B(t)\, \sigma(t) \sqrt{r}\, dW(t).$$

Проінтегрувавши отриману рівність, отримуємо

$$R(t,r) = \exp\left\{ \int_t^T \left(a(s) - \frac{1}{2} B^2(s)\sigma^2(s) r(s) \right) ds - \int_t^T B(s)\sigma(s)\sqrt{r(s)}\, dW(s) \right\},$$

де T – фіксований час платежу.

Тоді маємо

$$\int_t^T \left(a(s) - \frac{1}{2} B^2(s)\sigma^2(s) r(s) \right) ds - \int_t^T B(s)\sigma(s)\sqrt{r(s)}\, dW(s) = A(t) - r\, B(t).$$

Отримаємо квадратне рівняння відносно r, а саме

$$\left(B(t) - \frac{1}{2}\int_t^T B^2(s)\sigma^2(s) ds \right) r - \left(\int_t^T B(s)\sigma(s) dW(s) \right) \sqrt{r} + \left(\int a(s) ds - A(t) \right) = 0.$$

Звідси

$$D = \left(\int_t^T B(s)\sigma(s) dW(s) \right)^2 - 4\left(B(t) - \frac{1}{2}\int_t^T B^2(s)\sigma^2(s) ds \right)\left(\int a(s) ds - A(t) \right).$$

$$r(t) = \left(\frac{\int_t^T B(s)\sigma(s) dW(s) \pm \sqrt{D}}{2\left[B(t) - \frac{1}{2}\int_t^T B^2(s)\sigma^2(s) ds \right]} \right)^2.$$

Нещодавні дослідження показали, що дробовий вінерівський процес більш точно моделює динамічні системи фінансової математики. Це підтверджено експериментальним шляхом та оцінюванням реальних даних ([3]). Тому запропонована далі модель, яка базується на рівнянні (10), може давати більш точний прогноз відсоткової ставки на ринку цінних паперів.

Розглянемо рівняння Халла–Вайта (розширення Васічека) з дробовим білим шумом:

$$dr(t) = (\theta(t) — a(t)\, r(t))\, dt + \sigma(t)\, dB_H(t), \tag{19}$$

де B_t^H – дробовий вінерівський процес з параметром Харста $H \in (1/2, 1)$, тобто B_t^H – неперервний гауссівський процес, такий, що $B_0^H = 0$, $EB_t^H = 0$, $t \geq 0$, та коваріаційна функція задається таким чином:

$$E(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H} \right),\ s,\ t \geq 0.$$

Відмітимо, що при H = 1/2 випадковий процес B_t^H – звичайний броунівський рух.

У роботі [4] доведено наступне представлення дробового вінерівського процесу через звичайний:

$$B^H(t) = c^H\, t^H - 1/2 \int_0^t (t-s)^{H-3/2} M_s ds \; - C^H (H - 1/2) \int_0^t s^{H-3/2} (\int_0^s (s-v)^{H-3/2} M_v dv) ds\,,$$

де $M_t = \int_0^t s^{1/2-H} dW_s$ або $dM_t = t^{\,1/2-H}\, dW_t$.

Знайдемо $dB_H(t)$ за формулою Іто [2]. Для цього знайдемо такі часткові похідні:

$$B_t'(t) = (c^H - C^H)\,(\mathrm{H} - 1/2)\, t^H - 3/2 \int_0^t (t-s)^{H-3/2} M_s ds \; +$$

$$+\, c^H (H - 3/2)\;\; t^H - 1/2 \int_0^t (t-s)^{H-5/2} M_s ds\,,$$

$$B_M'(t) = (c^H - 2C^H)\;\frac{1}{H - 1/2}\;t^{2H-1},\;\; B_M''(t) = 0.$$

За формулою Іто отримуємо, що

$$dB^H(t, M_t) = (c^H - C^H)(H - 1/2)\,[t^H - 3/2 \int_0^t (t-s)^{H-3/2} M_s ds\,]dt\, +$$

$$+\,(c^H\,\frac{1}{H - 1/2}\; - \;C^H (H - 1/2))\; t\; dWt.$$

Підставимо отриманий вираз для $dB^H(t)$ у рівняння (19). Маємо

$$dr(t) = [\theta(t) — a(t)\, r(t) + \sigma(t)\,(c^H - C^H)(H - 1/2)\; t^H - 3/2 \int_0^t (t-s)^{H-3/2} M_s ds\;]\; dt\, +$$

$$+\,\sigma(t)\,(c^H\,\frac{1}{H - 1/2}\; - C^H (H - 1/2))\; t\; dW(t).$$

Тобто ми прийшли до рівняння Халла–Вайта (розширення Васічека) із звичайним вінерівським процесом вигляду (10), але з іншими коефіцієнтами

$$dr(t) = (\theta_1(t) — a(t)\; r(t))\; dt + \sigma_1(t)\; dW(t), \tag{20}$$

де $\theta_1(t) = \theta(t) + \sigma(t)\,(c^H – \mathrm{C}^{\mathrm{H}})\,(\mathrm{H}–1/2)\; t^H - 3/2 \int_0^t (t-s)^{H-3/2} M_s ds$,

$\sigma_1(t) = (c^H\,\dfrac{1}{H - 1/2}\; - C^H (H - 1/2))\; t.$

За теоремою 3 розв'язком рівняння (20) є

$$r(t) = \frac{1}{B(t)}\;[A(t) - \int_t^T \left(a(s) - \frac{1}{2} B^2(s) \sigma_1{}^2(s) \right) ds + \int_t^T B(s) \sigma_1(s) dW(s)\;],$$

де $$A(t) = \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t \theta_1(s) e^{\int_0^s a(u)du}\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_1{}^2(s) e^{2\int_0^s a(u)du}\,ds\,,\; B(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}.$$

Заключення. Доведені теореми дають розв'язок стохастичних диференційних рівнянь в явному вигляді. Це дозволяє прогнозувати відсоткову на ринку цінних паперів. Стохастичне диференційне рівняння з дробовим вінерівським процесом, який досліджується у роботі, дозволяє робити прогноз більш точним.

Т.В. Пепеляева

НЕКОТОРЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Рассмотрены некоторые стохастические дифференциальные уравнения и найдены их решения, что дает возможность прогнозировать процентную ставку на финансовом рынке.

T.V. Pepelyaeva

THE SOME STOCHASTIC MODELS OF FINANCIAL MATHEMATICS

The some stochastic differential equetions are considered and the desissions of tem are founded. It's allow to do presicion an interesting rate on the financial market.

1. *Bjork T.* Arbitrage theory in continuous time. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1988. – 312 p.
2. *Скороход А.В.* Лекції з теорії випадкових процесів. – К.: Либідь, 1990. – 168 с.
3. *Leland W.E., Taqqu M.S., Willinger W, Wilson D.* On the self-similar nature ethernet traffic // Trans. Networking 2. – 1994. – P.1–15.
4. *Mishura Yu.* Fractional stochastic integration and Black-Scholes equation for fractional Brownian model with stochastic volatility / Department of Mathematics, University of Helsinki. − Prepr., Helsinki, 2002. – 34 p.

Получено 03.05.2007