УДК 518.9

О.Н. ТОКАРЕВА

К ВОПРОСУ ОПТИМИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Для рассмотренных оптимизационных моделей нелинейных упругодиссипативных динамических систем ключевым моментом предложенного алгоритма их решения является переход от сопряженной системы дифференциальных уравнений к векторному уравнению Фредгольма второго рода и решение последнего в явном виде спеткральным методом.

Запишем оптимизационную модель нелинейной динамической системы в виде нахождения минимума критериального функционала

$$\Psi_0\left(x(t),b\right)=g(b)+\int_0^T f\left(x(t),b,t\right)dt \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\Psi\left(x(t),b\right)=q(b)+\int_0^T p\left(x(t),b,t\right)dt\le 0, \quad (2)$$

$$q(b)=\left[0,\Psi^2(b)\right],\quad \int_0^T p\left(x(t),b,t\right)dt=$$

$$=\left[\Psi^1\left(x(t),b\right),0\right]^T,\Psi^2(b)\le 0, \qquad (3)$$

$$\Psi^1\left(x(t),b\right)=\int_0^T\left\langle h\left(x(t),b,t\right)\right\rangle dt=0,$$

$$\left\langle h\left(x(t),b,t\right)\right\rangle=\begin{cases}h\left(x(t),b,t\right), & h\left(x(t),b,t\right)\ge 0,\\ 0, & h\left(x(t),b,t\right)<0,\end{cases} \quad (4)$$

$$\dot x(t)=\varphi\left(x(t),b,y(t)\right),\ x(0)=x_0,t\in[0,T],$$
$$\dot x(t)=d\,x(t)/d\,t. \qquad (5)$$

Достаточно общего вида критериальный функционал (1) в частных случаях может представлять, например, вес конструкции, сумму инерционных масс, средние по времени t величины смещений $x(t)$ или напряжений $\sigma_i\left(x(t),b,t\right)$ в критических точках конструкции. Векторные ограничения $\Psi^1\left(x(t),b\right)$ – это интегральная форма ограничений

$$\left|x_i(t)\right|-\bar{x}_i \le 0,\ \left|\sigma_i(x(t),b,t)\right|-\bar{\sigma}_i \le 0,\ 0\le t\le T,$$

где $\bar{x}_i, \bar{\sigma}_i$ – наибольшие абсолютные значения смещений и напряжений. Ограничение (5) – это векторное дифференциальное уравнение в форме Коши, описывающее состояние динамической нелинейной системы; $x(t)$ – n-мерный вектор состояния системы; $y(t)$ – n-мерный вектор входного воздействия; x_0 – вектор начальных условий.

Совместное использование [1] метода Ньютона – Канторовича [2] и методов спектральной теории линейных систем [3] дает возможность получения решения (5) в явном виде, что часто требуется при исследовании нелинейных систем.

Цель данной работы – построение алгоритма решения задачи (1) – (5) (оптимизационный модуль TONAD), в котором блок Б1 для вычисления вектора состояния $x(t)$ на оптимизирующей последовательности $\{b^r\}$, $r=0,1,2,\ \dots$, и блок Б2 для нахождения производных по вектору b от функционалов модели, зависящих от вектора $x(t)$, используют указанный подход.

Блок Б1 на r-й итерации оптимизационного модуля TONAD образует последовательность решений $\{x_{k+1}(t)\}$, $k=0,1,2,\ \dots$

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t)&=x_{k+1}\left(t,b^r\right)=W^T(t)\alpha^{x_{k+1}}\left(b^r\right)= \\ &=W^T(t)\left(I+A_k\left(b^r\right)\right)^{-1}\left(\alpha^{u_k}\left(b^r\right)+\alpha^{x_0}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

спектральным методом векторных уравнений Фредгольма второго рода

$$x_{k+1}(t)+\int_0^T H^k(t,\tau)x_{k+1}(\tau)d\tau=u^k(t)+x(0). \tag{7}$$

Здесь

$$H^k(t,\tau)=diag\{U_+(t-\tau)\}\left(-\frac{\partial\varphi\left(x_k(\tau),b^r\right)}{\partial x}\right)=\left[h_{ij}^k(t,\tau)\right];\ i,j=\overline{1,n}\ - \tag{8}$$

квадратично суммируемое в области $[0,T]\times[0,T]$ ядро уравнения (7),

$$h_{ij}^k(t,\tau)=\begin{Bmatrix}-\varphi_{ij}^k, & \tau<t \\ 0, & \tau\ge t\end{Bmatrix},\ \varphi_{ij}=\frac{\partial\varphi_i\left(x_k(\tau),b^r\right)}{\partial x_j}; \tag{9}$$

$W^T(t)=diag\{[\omega_0(t),\omega_1(t),\ \dots\ ,\omega_{N-1}(t)]\}$ – диагональная клеточная матрица; $[\,\cdot\,]$ – вектор-строка; $\Omega=\{\omega_i(t);\ (\omega_i,\omega_j)=\delta_{ij};\ i=0,1,2,\dots;\ t\in[0,T]\}$ – некоторый ортонормированный базис; $\alpha^{x_{k+1}}, \alpha^{u_k}, \alpha^{x_0}$ – клеточные векторы

$\alpha^{\gamma}=\left[\alpha^{\gamma_1},\alpha^{\gamma_2},\dots,\alpha^{\gamma_n}\right]^T$, $\alpha^{\gamma_\nu}=\left[\alpha_0^{\gamma_\nu},\alpha_1^{\gamma_\nu},\dots,\alpha_{N-1}^{\gamma_\nu}\right]^T$ – структура ν-й клетки клеточного вектора α^{γ}.

$$\alpha_j^{\gamma_\nu}=\int_0^T \gamma_\nu(t)\omega_j(t)dt \; - \tag{10}$$

формула для j-го коэффициента Фурье в представлении функции $\gamma_\nu(t)$ по системе Ω; $\gamma_\nu(t)$ – ν-я компонента векторных функций $x_{k+1}(t)$, $u_k(t)$, x_0; символ “ T ” означает транспонирование;

$$u^k(t)=\int_0^t\left(q_1^k(\tau)+q_2^k(\tau)\right)d\tau,\; q_1^k(\tau)=-\left(\partial\varphi\left(x_k(\tau),b^r\right)/\partial x\right)x_k(\tau),$$

$$q_2(\tau)=\varphi\left(x_k(\tau),b^r,y(\tau)\right),\; \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right];\; i,j=\overline{1,n} \; -$$

матрица размерностью $n\times n$; I – единичная матрица; A_k – клеточная матрица размерностью $nN\times nN$ коэффициентов Фурье для ядра $H(t,\tau)$, ij – клетка которой имеет следующую структур:

$$A_{ijk}=\begin{bmatrix}\alpha_{00}^{ijk} & \alpha_{01}^{ijk} & \dots\ \alpha_{0,N-1}^{ijk}\\ \alpha_{10}^{ijk} & \alpha_{11}^{ijk} & \dots\ \alpha_{1,N-1}^{ijk}\\ . & . & \dots\ \ .\\ \alpha_{N-1,0}^{ijk} & \alpha_{N-1,1}^{ijk} & \dots\ \alpha_{N-1,N-1}^{ijk}\end{bmatrix},$$

$$\alpha_{sp}^{ijk}=\int_0^T\int_0^T\omega_s(t)h_{ij}^k(t,\tau)\omega_p(\tau)dt\,d\tau;\; s,p=\overline{0,N-1}. \tag{11}$$

Уравнение (7) построено для итерационной процедуры

$$\dot{x}_{k+1}(t)-\left[\frac{\partial\varphi\left(x_k(t),b^r\right)}{\partial x}\right]x_{k+1}(t)=q_1^k(t)+q_2^k(t).$$

Последняя получена линеаризацией операторного уравнения $A(x)=0,\ A(x)=\{\dot{x}(t)-\varphi(x(t),b,y(t)),\ x(0)-x_0\}$ в точке $x_k:\ A(x_k)+\dot{A}(x_k)\left(x_{k+1}-x_k\right)=0$, где $\dot{A}$ – дифференцируемый по Фреше оператор A.

Следуя приему, описанному в [4], построим соотношение для вычисления производных по вектору оптимизируемых параметров b от функционалов

$$\zeta_0(x(t),b)=\int_0^T f(x(t),b,t)dt,\quad \Psi_i^1(x(t),b)=\int_0^T\left\langle h_i(x(t),b,t)\right\rangle dt,$$

зависящих от вектора состояния $x(t)$:

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial b} = l^0 = \left[\frac{\partial \zeta_0}{\partial b_1}, \frac{\partial \zeta_0}{\partial b_2}, \dots, \frac{\partial \zeta_0}{\partial b_p}\right]^T = \int_0^T \left(-\frac{\partial \varphi^T}{\partial b}\lambda^0 + \frac{\partial f}{\partial b}\right) dt, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Psi_i^1}{\partial b} = l^i = \left[\frac{\partial \Psi_i^1}{\partial b_1}, \frac{\partial \Psi_i^1}{\partial b_2}, \dots, \frac{\partial \Psi_i^1}{\partial b_p}\right]^T = \int_0^T \left(-\frac{\partial \varphi^T}{\partial b}\lambda^i + sign\left(\left\langle h_i \right\rangle\right)\frac{\partial h_i}{\partial b}\right) dt, \quad (13)$$

где λ^0, λ^i – n - мерные векторы - столбцы сопряженных переменных, соответствующие функционалам ζ_0, Ψ_i^1; матрица $\dfrac{\partial \varphi^T}{\partial x}$ вычисляется в точке $\left(x^r(t), b^r\right)$; $x^r(t)$ – решение нелинейного векторного уравнения (5) на r-й итерации модуля TONAD.

Вектор $\lambda^{\pi r}(t)$, $\pi = 0, i$ находится из решения сопряженной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\lambda}^{\pi r}(t) + \frac{\partial \varphi^T}{\partial x}\lambda^{\pi r}(t) = w^{\pi r},\ \lambda^{\pi r}(T) = 0;\ w^{\pi r} = \partial f / \partial x,\ \pi = 0;$$

$$w^{\pi r} = sign\left(\left\langle h_i \right\rangle\right)\left(\frac{\partial h_i}{\partial x}\right),\ \pi = i. \quad (14)$$

Далее опустим итерационный индекс r. Перейдем от системы (14) к векторному уравнению Фредгольма второго рода

$$\lambda^\pi(t) + \int_0^T N(\tau,t)\lambda^\pi(\tau)d\tau = -\nu^\pi(t),\ \nu^\pi(t) = \int_t^T w^\pi(\tau)d\tau, \quad (15)$$

$$N(\tau,t) = diag\,U_+(\tau - t)\left[-\frac{\partial \varphi^T(x(\tau),b)}{\partial x}\right] = \left[n_{ij}(\tau,t)\right];\ i,j = \overline{1,n}\ – \quad (16)$$

квадратично суммируемое в области $([0,T]\times[0,T])$ ядро уравнения (15);

$$n_{ij}(\tau,t) = \begin{cases} -\varphi_{ji}(\tau),\ i \neq j;\ -\varphi_{ii}(\tau),\ i = j;\ \tau > t \\ 0 \qquad\qquad ;\ \tau \le t \end{cases}. \quad (17)$$

Уравнение (15) после представления компонент векторов $\lambda^\pi(t), \nu^\pi(t)$ и элементов ядра $N(\tau,t)$ в виде рядов Фурье по системе Ω примет форму

$$W^T(t)a^{\lambda^\pi} + W^T(t)A^c\int_0^T W(\tau)W^T(\tau)d\tau a^{\lambda^\pi} = -W^T a^{\nu^\pi}, \quad (18)$$

где $a^{\lambda^\pi}, a^{\nu^\pi}$ аналогичны α^γ и (10); $nN \times nN$ – матрица A^c имеет структуру, аналогичную матрице A из (6), с ij-клеткой, аналогичной (11), и элементом

$$a_{ru}^{ij} = \int_0^T \int_0^T \omega_r(t) n_{ij}(\tau, t) \omega_u(\tau) dt\, d\tau. \qquad (19)$$

От уравнения (18) переходим к уравнению $a^{\lambda^\pi} + A^c a^{\lambda^\pi} = -a^{\nu^\pi}$, которое представляет матричный эквивалент уравнения (15). Решая последнее, получаем

$$a^{\lambda^\pi} = -G^c a^{\nu^\pi},\ G^c = \left(I + A^c\right)^{-1},\ \lambda^\pi(t) = W^T(t) a^{\lambda^\pi} = -W^T\left(I + A^c\right)^{-1} a^{\nu^\pi}. \qquad (20)$$

Так как A^c, a^{ν^π} явно зависят от вектора b, то $\lambda^\pi(t), \dfrac{\partial \zeta_0}{\partial b}$ и $\dfrac{\partial \Psi_i^1}{\partial b}$ явно зависят от этого вектора.

Представим алгоритм метода оптимального проектирования нелинейных динамических систем с использованием внешней квадратичной штрафной функции P.

TONAD-алгоритм. Исходные данные:

$$b^0 \in E^p,\ r_0 > 0,\ \varepsilon_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right),\ 0 < \sigma < 1,\ 0 < \theta < 1,\ \varepsilon_2 > 0.$$

Шаг 1. Задаем начальное приближение b^0.

Шаг 2. Находим для b^r решение $x^r(t)$ уравнения (5) путем решения спектральным методом последовательности уравнений Фредгольма второго рода (7). При этом $x^r(t) = x_s\left(b^r, t\right)$, где $x_s\left(b^r, t\right)$ получено по формуле (6) для $k+1 = s$; s – число итераций метода Ньютона – Канторовича; r – номер итерации TONAD-алгоритма.

Шаг 3. В точке $\left\{x^r(t), b^r\right\}$ составляем множество B индексов ε-активных ограничений: $B = C \cup D,\ C \cap D = \varnothing,\ C = \left\{i \in [1:u] / h_i(x(t), b, t) \ge -\varepsilon, \varepsilon > 0\right.$ для $\left. t \le T\right\}$, $D = \left\{i \in [1:\mu] / \Psi_i^2(b) \ge -\varepsilon\right\}$. Строим вектор-столбец $\tilde{\Psi} = \Big[\Psi_i^1(x(t), b) =$ $= \int_0^T \left\langle h_i(x(t), b, t)\right\rangle dt,\ i \in C;\ \Psi_i^2(b),\ i \in D\Big]^T$ ε-активных ограничений.

Шаг 4. Определяем по формуле (20) векторы $\lambda^{\pi r}(t);\ \pi = 0, i;\ i \in C$, удовлетворяющие векторным сопряженным уравнениям (14) в точке $\left\{x^r(t), b^r\right\}$, путем решения спектральным методом соответствующих уравнений Фредгольма второго рода (15).

Шаг 5. Вычисляем элементы $\left(|C| + |D|\right) \times p$-матрицы $\bar{l}^T = \dfrac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial b}$ с использованием формул (13).

Шаг 6. Находим штрафной параметр r_r по формуле $r_r = \theta r_{r-1}$. Вычисляем оценку вектора множителей Лагранжа в точке $\{x^r(t), b^r\}$ из соотношения $\rho = -\left(\frac{r_r}{2} I + \bar{l}^T \bar{l}\right)^{-1} \left(\bar{l}^T l^0 - \tilde{\Psi}\right)$, где I – единичная матрица, l^0 вычисляется согласно (12).

Шаг 7. В точке $\{x^r(t), b^r\}$ определяем вариацию δb вектора оптимизируемых параметров b по формуле $\delta b = -l^0 - \bar{l}\rho$. Находим $b^{r+1} = b^r + \sigma^{\gamma_r} \delta b^r$, где γ_r – наименьшее неотрицательное целое, для которого справедливо условие

$$P\left(r_r, x^r, b^r + \sigma^{\gamma_r} \delta b^r\right) - P\left(r_r, x^r, b^r\right) < \varepsilon_1 \sigma^{\gamma_r} \delta P\left(r_r, x^r, b^r\right),$$

$$P(r, x, b) = \Psi_0 + \frac{1}{r} \tilde{\Psi}^T \tilde{\Psi},\ \delta P\left(r_r, x^r, b^r\right) = \delta \Psi_0^r + \frac{2}{r_r} \tilde{\Psi}^{T\,r} \delta \tilde{\Psi}^r,$$

$$\delta \Psi_0^r = l^{0T\,r} \delta b^r,\ \delta \tilde{\Psi}^r = \bar{l}^{T\,r} \delta b^r. \tag{21}$$

Шаг 8. Если все ограничения выполнены и $\|\delta b\| = \left(\delta b^T \delta b\right)^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon_2$, то конец вычислений. В противном случае осуществляется возврат к шагу 2 с новым значением переменной проектирования b^{r+1}.

TONAD-алгоритм рекомендуется к применению при проектировании широкого круга динамических систем. Данный алгоритм был конкретизирован на примере крутильно-колебательных систем силовых передач мобильных машин с нелинейными упругодиссипативными характеристиками отдельных соединений.

О.М. Токарєва

ДО ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ

Для розглянутих оптимізаційних моделей нелінійних пружнодисипативних динамічних систем ключовим моментом запропонованого алгоритму їх розв′язку став перехід від спряженої системи диференціальних рівнянь до векторного рівняння Фредгольма другого роду і розв′язування останнього в явному вигляді спектральним методом.

O.N.Tokareva

ON OPTIMIZATION OF NONLINEAR OSCILLATORY SYSTEM

For the considered optimization models of nonlinear elastic dissipative dynamic systems, the key moment for the proposed algorithm that solves them is transition from a conjugate differential equation system to a vector second – type Fredholm equation and anexplicit solution to the laller by the spectral method.

1. *Годжаев З.А., Корнюшин Ю.П.* Новые методы исследования нелинейных систем трансмиссий мобильных машин // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1993. – № 10. – С. 9 – 12.
2. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
3. *Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов И.Д.* Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. – М.: Машиностроение, 1986. – 440 с.
4. *Токарева О.Н.* Последовательная оптимизация и штрафы при проектировании динамических механических систем конструкций // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2000. – С. 39 – 43.

Получено 30.05.2006