УДК 519.21

Т.В. ПЕПЕЛЯЕВА

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ТОРГОВЫХ СТРАТЕГИЯХ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ

Исследуется вопрос о существовании оптимальных торговых стратегий на рынке ценных бумаг с помощью функции полезности.

Введение. В данной работе исследуются торговые стратегии на рынке ценных бумаг и некоторые функции полезности, с помощью которых агент, который оперирует на финансовом рынке, может выбрать наиболее оптимальную для себя стратегию.

Пусть (Ω, Φ, P) – вероятностное пространство, где Ω – множество состояний финансовой системы, $\forall t \geq 0$ $\Phi_t \subset \Phi$ – множество событий, которое соответствует информации, которая была получена к моменту времени t. Другими словами, если событие $B \in \Phi_t$, то в момент времени t известно, является ли это событие истинным или ложным. Далее будем предполагать, что Φ_t – неубывающий поток σ-алгебр, т.е. $\forall t < s$ $\Phi_t \subset \Phi_s$. Будем рассматривать так называемые адаптированые процессы.

Определение 1. Адаптированым процессом называется последовательность вида $X =\{X_0, X_1,... \}$, такая, что $\forall t \geq 0$ X_t является Φ_t-измеримой случайной величиной.

Пусть рынок ценных бумаг задается следующим образом. Будем считать, что ценная бумага – это требование к адаптированому процессу дивидендов δ, а δ_t означает дивиденды, заплаченные по ценной бумаге в момент времени t. Каждой ценной бумаге соответствует адаптированый процесс цены S, а S_t означает стоимость ценной бумаги (которую еще называют *ex*-дивидентом) в момент времени t. Другими словами, в любой момент времени t держателю ценной бумаги выплачивается дивиденд δ_t, и потом этот актив может быть продан по цене S_t. При этом имеется в виду, что δ_0 не играет роли в определении *ex*-дивидентной цены. Так называемая *cum*-дивидентная стоимость ценной бумаги в момент времени t равна $S_t + \delta_t$.

Предположим, что на рынке существует N ценных бумаг, которые определяют $\boldsymbol{R}^N$-измеримый адаптированный процесс $\delta = (\delta^1,\ldots,\delta^N)$. Предположим также, что эти ценные бумаги имеют некоторые процессы стоимостей $S = (S^1,\ldots,S^N)$.

Будем считать, что торговая стратегия – это адаптированный процесс $\theta\in\boldsymbol{R}^N$, а процесс $\theta_t = (\theta^1_t ,..., \theta^N_t)$ означает портфель, полученный после торговли в момент времени t.

Дивидендный процесс δ^θ определяется с помощью торговой стратегии θ следующим образом:

$$\delta^\theta_t = \theta_{t-1}(S_t + \delta_t) - \theta_t S_t, \text{ где } \theta_{-1} = 0. \tag{1}$$

Одним из основных понятий теории рынка является понятие арбитража.

При заданной паре дивиденд–цена (δ, S) торговая стратегия θ является арбитражем, если $\delta^\theta > 0$.

Обозначим Θ пространство торговых стратегий, и $\Theta \equiv L^N$, где L – пространство адаптированных процессов.

Для любых $\theta_1, \theta_2\in \Theta$ и $a, b\in\boldsymbol{R}$ справедливо следующее соотношение:

$$a\delta^{\theta_1} + b\delta^{\theta_2} = \delta^{a\theta_1+b\theta_2} .$$

Поэтому рыночное пространство $M = \{\delta^\theta\colon \theta\in\Theta\}$, т. е. пространство дивидендных процессов, которое определяет торговая стратегия θ – линейное подпространство пространства L.

Приведем еще некоторые понятия, которые касаются рынка ценных бумаг.

Введем в рассмотрение агента, который оперирует на финансовом рынке, с помощью строго возрастающей функции полезности U, определенной на L_+, множества неотрицательных адаптированных процессов потребления, и процесса взноса $e\in L_+$. При заданной паре (δ, S) торговая стратегия θ ставит в соответствие агенту процесс (суммарного общего) потребление $e + \delta^\theta$. Таким образом агент имеет множество возможных потреблений $X = \{c = e + \delta^\theta\in L_+ : \theta \in\Theta\}$.

Задачей, которая стоит перед агентом, есть максимизация функции полезности, которая показывает, насколько выгодной для инвестора является выбранная стратегия, т.е. нужно найти решение задачи: $\sup\limits_{c\in X} U(c)$.

Рассмотрим теперь для некоторых функций полезности задачу принятия решения для определения оптимальной стратегии. Введем сначала основные понятия и положения теории управления цепями Маркова, которые нам понадобятся в данной работе.

Пусть $Z = \{1,...,k\}$. Элементы множества Z будем называть состояниями. Пространство Z называют фазовым пространством. Будем рассматривать положения нашей системы как некоторую последовательность состояний $(z_0, z_1, z_2,...,)$, которые могут иметь место. Пусть $\Omega = Z^\infty$ и Φ – множество всех подмножеств Ω. Для каждого t определим случайное состояние системы в момент времени t $X_t : \Omega \to Z$ как случайную величину, которая задается следующим образом: $X_t(z_0, z_1, z_2,...,) = z_t$.

Для каждого $i \in Z$ вероятностная мера P_i на (Ω, Φ) определена единственным образом двумя условиями:

$$P_i(X_0 = i) = 1,$$

$$\forall t \geq 0 \; P_i(X_{t+1} = j \,/\, X_0, X_1,..., X_t) = P_i(X_{t+1} = j \,/\, X_t). \tag{2}$$

Соотношение (2) означает, что случайный процесс с дискретным временем $X = \{X_0, X_1,...,\}$ является марковским процессом, т.е. условное распределение X_{t+1} при известных $X_0,..., X_t$ в действительности зависит только от X_t.

Заметим, что соотношение (2) дает определение неуправляемой цепи. Для определения управляемой цепи предположим, что на рынке ценных бумаг задано пространство торговых стратегий Θ. (В задачах управления динамическими системами в общем случае пространство Θ принято называть пространством решений, или пространством значений управляющих воздействий.)

Пусть задан набор переходных вероятностей $P_i(X_{t+1} = j \,/\, X_t, \theta_t)$, $t \geq 0$, которые зависят от стратегии $\theta_t \in \Theta$. Будем считать, что в каждый момент времени $t \geq 0$ решение о выборе стратегии θ_t может осуществляться на основании результатов предыдущих наблюдений состояний $X_0, X_1,..., X_t$, т.е. $\theta_t = \theta_t(X_0, X_1,..., X_t)$.

Каждая из таких функций $\theta_t : Z_{t+1} \to \Theta$ задает некоторую стратегию в момент времени t. Другими словами, если результатами наблюдений в моменты времени $0, 1,..., t$ есть $z_0, z_1,..., z_t$ и выбрана стратегия $\theta_t(\cdot)$, то состояние системы в момент времени $t + 1$ определяется переходной вероятностью

$$P_i(X_{t+1} = z_{t+1} \,/\, X_t = z_t, \theta_t(z_0, z_1, \ldots, z_t)). \tag{3}$$

Будем считать, что набор $\theta = \{\theta_t, t \geq 0\}$ функций

$$\begin{gathered} \theta_0 = \theta_0(z_0), \\ \theta_1 = \theta_1(z_0, z_1), \\ \ldots\ldots \; \ldots\ldots \; \ldots\ldots \; \ldots\ldots \; \ldots. \\ \theta_t = \theta_t(z_0, z_1,..., z_t), \\ \ldots\ldots \; \ldots\ldots \; \ldots\ldots \; \ldots\ldots \; \ldots. \end{gathered}$$

задает управление θ.

Тогда вероятностная мера P_i для каждого начального состояния $i \in Z$ на (Ω, Φ) на самом деле определяется с помощью (3) при выбранном управлении θ.

Полученный процесс (X, θ) будем называть управляемой цепью (процессом X управляет набор стратегий θ).

Следует заметить, что в общем случае управляемая цепь не будет марковской, так как функции θ_t зависят не только от значений z_t, но и от предыдущих значений z_0, z_1,..., z_{t-1}. Известны также примеры управлений по неполным данным, когда в момент времени t известны не все значения z_0, z_1,..., z_t.

Определение 2. Управление θ называется марковским, если $\forall t \geq 0$, θ_t в действительности зависит только от последнего аргумента $\theta_t = \theta_t(z_t)$, т. е. для любых значений $z'_0, z'_1, ..., z'_{t-1}$ и $z''_0, z''_1, ..., z''_{t-1}$

$$\theta_t(z'_0, z'_1, \dots, z'_{t-1}, z_t) = \theta_t(z''_0, z''_1, \dots, z''_{t-1}, z_t).$$

Определение 3. Управление θ называется однородным марковским, если

$$\theta_{t_1}(z) \equiv \theta_{t_2}(z), \ \forall t_1, t_2 > 0.$$

Пусть Δ означает совокупность всех управлений θ. Обозначим $\Theta_t(z)$, $t \geq 0$ некоторые фиксированные подмножества (разные для различных значений $X_t = z$) пространства Θ, каждое из которых ограничивает область значений управления θ_t в момент времени t, если $X_t = z$.

Определение 4. Управление $\theta \in \Delta$ называется допустимым, если

$$\forall t \geq 0 : \theta_t(X_0, ..., X_{t-1}, z) \in \Theta_t(z) \subseteq \Theta.$$

Класс допустимых управлений будем обозначать Δ'. Очевидно, что выделение класса Δ', который характеризуется набором $\{\Theta_t(z), t \geq 0\}$, зависит от сути конкретной задачи.

Обозначим Δ'' класс тех допустимых управлений, для которых

$$\forall t \geq 0 : \ \Theta_t(z) \equiv \Theta(z) \ (\subseteq \Theta).$$

Таким образом, имеем на рынке ценных бумаг марковский процесс состояний $X = \{X_0, X_1, ..., \}$ такой, как вышеописан. Пусть L − пространство последовательностей случайных величин вида $c = \{c_0, c_1, c_2, \dots,\}$ и таких, что $\forall t \geq 0$ c_t есть Φ_t-измеримой, и существует константа k, такая, что $|c_t| \leq k$. Другими словами, L − это пространство ограниченных адаптированных процессов. Агент выбирает процесс потребления из множества L_+ неотрицательных процессов из L.

Пусть на рынке существует N ценных бумаг, причем n-я ценная бумага определяется процессом дивидендов δ^n из L, и ему соответствует процесс цены S^n из L. Торговой стратегией агента считаем $\theta = (\theta^1, ..., \theta^N)$, которая принадлежит множеству $\Theta \equiv L^N$. Каждая стратегия $\theta \in \Theta$ определяет дивидендный процесс δ^θ из L соотношением (1). Будем считать, что процесс X зависит от торговой стратегии θ, т.е. (X, θ) есть управляемой цепью.

Агенту, который оперирует на рынке ценных бумаг, поставим в соответствие процесс вклада $e\in L_+$ и при заданном начальном состоянии u функцию полезности U^i: $L_+ \to \boldsymbol{R}$, которая характеризует доход агента от выбранной стратегии θ и, таким образом, дает возможность судить о качестве того или иного управления.

Таким образом перед агентом стоит задача

$$\sup_{\theta\in\Theta(e)} U^i(e+\delta^\theta), \text{ где } \Theta(e)=\{\theta\in\Theta:\ e+\delta^\theta\geq 0\}.$$

Для любого t Φ_t означает множество событий, порожденное $\{X_0,\ldots, X_t\}$, т.е. информацию, доступную в момент времени t, полученную наблюдением процесса состояний X к моменту времени t.

Далее будем считать однородными по времени функцию полезности, процесс взноса и процесс дивидендов. При заданном начальном состоянии i рассмотрим функцию полезности U^i: $L_+ \to \boldsymbol{R}$, которую определяют величина переоценки $\rho\in(0,1)$ и строго возрастающая, ограниченная, вогнутая и непрерывная функция u: $\boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}$, такая, что

$$U^i(c) = E_i\left[\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(c_t)\right],$$

где E_i – математическое ожидание по вероятностной мере P_i, согласованное с начальным состоянием $X_0 = i$.

Рассмотрим другую функцию полезности, которая определяет для стратегии θ средний доход в единицу времени

$$U_1^i(c)=\liminf_{\mathrm{T}\to\infty}\frac{1}{\mathrm{T}}\sum_{t=0}^{\mathrm{T}} E_i\, u(c_t).$$

Пусть функции g: $Z \to \boldsymbol{R}_{++}$, f: $Z \to R_{++}^N$ такие, что $\forall t$ вклад $e_t = g(X_t)$ и дивиденды $\delta_t = f(X_t)$. Предположим, что стоимость ценных бумаг задана некоторой функцией S: $Z\to R_{++}^N$ таким образом: $\forall t$: $S_t = S(X_t)$.

Зафиксируем портфель $b\in R_{++}^N$, и пусть $-b$ – нижняя граница короткой позиции, и капитал ограничен снизу величиной $\underline{w}=\min\limits_{i\in Z} -b[S(i)+f(i)]$.

Обозначим $D = Z \times [\underline{w}, \infty)$. Будем считать, что функция F: $D \to \boldsymbol{R}$ относится к пространству, которое обозначим $B(D)$, если $\forall i \in Z$ $F(i,\cdot)$: $[\underline{w}, \infty) \to \boldsymbol{R}$ является ограниченной, непрерывной и вогнутой функцией.

Для функции $U^i(c)$ определим функцию $V\in B(D)$, такую, что

$$V(i,w) = \sup_{(c,\theta)\in L_+\times\theta} U^i(c),$$

и выполнены условия

$$W_0^{\theta} = w,$$
$$W_t^{\theta} = \theta_{t-1}[S(X_t) + f(X_t)],\ t \ge 1,$$
$$c_t + \theta_t\, S(X_t) \le W_t^{\theta} + g(X_t),\ t \ge 0,$$
$$\theta_t \ge -b,\ t \ge 0.$$

Определение 5. Управление $\tilde{\theta} \in \Delta'$ называется оптимальным по U-критерию, если $\forall u \in Z : V(i, w) = U^i(e, \tilde{\theta})$.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда (X, θ) – управляемая цепь (не обязательно марковская), а функция u – ограниченная (свойства выпуклости, неубывающей функции и т.д. не требуются). В работе [1] доказан ряд лемм о существовании оптимальных управлений для критерия полезности выбранного управления вида U^i. Применив данные утверждения к нашему рынку ценных бумаг, где X_t задает процесс состояний системы, $\theta = \{\theta_t,\ t \ge 0\}$ – процесс торговых стратегий, можно сформулировать следующие теоремы существования оптимальной торговой стратегии.

Теорема 1. Пусть на рынке ценных бумаг пространство состояний управляемой системы Z и пространство возможных торговых стратегий Θ – конечны, $0 \le u(c) \le K < \infty$. Тогда в классе Δ'' существует оптимальная по U-критерию стратегия.

Заметим, что это утверждение остается справедливым и в случае, когда Z – топологическое хаусдорфовое пространство, Θ – компактное хаусдорфовое пространство, $E_i\, u(c_t)$ – непрерывная функция в окресности c_t при каждом начальном состоянии i. Это вытекает из доказательства леммы 1 в [1].

Теорема 2. Пусть на рынке ценных бумаг пространство состояний управляемой системы Z и пространство возможных торговых стратегий Θ – конечны, и функции полезности U^i, такие, что для них $\theta \in \Delta'$. Тогда в классе допустимых стратегий Δ' существует оптимальная по U-критерию марковская стратегия.

Теорема 3. Пусть на рынке ценных бумаг пространство состояний управляемой системы Z и пространство возможных торговых стратегий Θ – конечные пространства. Тогда в классе Δ'' существует однородная марковская стратегия $\tilde{\theta}$ (которая, вообще, не зависит от дисконта ρ), и достигает своего максимума на Δ'': $V_i^{\tilde{\theta}}(\rho) = \max\limits_{\theta \in \Delta''} V_i^{\theta}(\rho)$.

Рассмотрим теперь другой критерий полезности $V_1(i,w) = \sup\limits_{(c,\theta) \in L_+ \times \theta} U_1^i(c)$.

Определение 6. Управление $\tilde{\theta} \in \Delta'$ называется оптимальным по U_1-критерию, если $\forall u \in Z : V_1(i,w) = U_1^i(e, \tilde{\theta})$.

Имеет место следующий результат, который вытекает из [1].

Теорема 4. Пусть на рынке ценных бумаг пространство состояний управляемой системы Z и пространство допустимых торговых стратегий Θ – конечны, $0 \le u(c) \le K < \infty$. Тогда в классе Δ'' существует оптимальная по U_1-критерию однородная марковская торговая стратегия.

Рассмотрим задачу оптимизации торговой стратегии на финансовом рынке в случае, когда фазовое пространство управляемой системы и пространство выбора допустимых стратегий являются компактными или счетными множествами.

Приведем утверждения и определения, которые нам понадобятся для дальнейшего изложения.

Обозначим Θ_0 – класс стационарных нерандомизированых стратегий; $M(Z)$ – банаховое пространство ограниченных измеримых по Борелю функций на Z; $C(Z)$ – банаховое пространство ограниченных непрерывных на Z функций; $C_1(Z)$ – полное метрическое пространство ограниченных полунепрерывных сверху функций на Z, B – σ-алгебра борелевськиx подмножеств Z.

Определение 7. Отображение F, которое сопоставляет каждому $z \in Z$ некоторое непустое замкнутое множество $F(x) \subseteq \Theta$ называется открыто-, замкнуто- или борелевски-измеримым, если $\{x : F(x) \cap E \ne \varnothing\} \in$ B, где E – соответственно произвольное открытое, замкнутое или борелевськое множество в Θ.

Определение 8. Замкнуто- (открыто-) измеримое отображение F называется полунепрерывным сверху (снизу), если для любого замкнутого (открытого) множества $E \subseteq \Theta$ множество $\{x : F(x) \cap E \ne \varnothing\} \in$ B замкнуто (открыто).

Определение 9. Отображение F называется непрерывным, если оно полунепрерывно сверху и снизу одновременно.

Определение 10. Функция $f : Z \to \Theta$ называется селектором отображения F, если $f(x) \in F(x)$, $z \in Z$.

Теорема выбора [2]. Измеримое в смысле определения 7 отображение имеет измеримый по Борелю селектор.

Теорема выбора для полунепрерывных отображений [2]. Если Θ – компакт, то полунепрерывное отображение имеет селектор, который относится к бэровскому классу 1.

Таким образом, для того, чтобы класс Θ_0 был непустым, достаточно выполнения условия об измеримости отображения $F : z \to \Theta(z)$, $z \in Z$ в смысле определения 7.

Далее считаем F: $z \to \Theta(z)$, $z \in Z$ измеримым. В частности, если $\Theta(z) \equiv \Theta$, отображение F измеримо и класс Θ_0 совпадает с множеством всех борелевских функций, которые отображают Z в Θ.

Предположим, что переходная вероятность (3) – строго положительна. В работе [3] доказан следующий результат, который дает достаточные условия существования оптимальной по U_1-критерию стационарной нерандомизированой стратегии.

Теорема 5. Пусть существуют постоянная g и ограниченная борелевская функция $v(z)$ на Z, такие, что

$$g + v(z) = \sup_{\theta\in\Theta(z)} \left\{ u(z,\theta) + \int v(y)P(dy/z,\theta)\right\},\ z\in Z,$$

тогда $\sup\limits_{\theta\in\Theta} U_1(z,\theta) \le g$.

Если при этом

$$g + v(z) = \max_{\theta\in\Theta(z)} \left\{ u(z,\theta) + \int v(y)P(dy/z,\theta)\right\},\ z\in Z \tag{4}$$

и для некоторой стратегии $\theta^*\in\Theta_0$

$$g + v(z) = u(z,\theta) + \int v(y)P(dy/z,\theta), \quad z\in Z, \tag{5}$$

то θ^* – оптимальная по U_1-критерию стратегия и $U_1(z,\theta^*) \equiv g$.

Пусть выполняются следующие условия:
существует неотрицательная мера μ на (Z, B) такая,что

$$\mu(B) \le P(B/z,\theta),\ (z,\theta)\in\Delta,\ B\in \mathrm{B} \text{ и } \mu(Z) > 0. \tag{6}$$

Определим в $M(Z)$ оператор Υ' с помощью уравнения

$$\Upsilon' u(z) = \sup_{\theta\in\Theta(z)} \{r(z,\theta)+\int u(y)P'(dy/z,\theta)\},$$

где $P'(B/z,\theta) = P(B/z,\theta) - \mu(B)$.

Для любой функции $u\in M(Z)$ обозначим

$$A'_u(z) = \{\theta : \theta \in \Theta(z),\ \Upsilon' u(z) = r(z,\theta) + \int u(y)P'(dy/z,\theta)\}.$$

Множество $A'_u(z)$ может быть пустым.

Введем отображения F'_u, которые сопоставляют каждому $z \in Z$ множество $A'_u(z)$.

Приведем ряд теорем, которые дают условия, при которых выполнены условия (4) и (5). Таким образом эти теоремы дают условия существования оптимальной по U_1-критерию торговой стратегии на рынке ценных бумаг.

Теорема 6. Пусть выполнено предположение (6) и, кроме того:

1) оператор Υ' переводит некоторое полное метрическое пространство $S(Z) \subseteq M(Z)$ с метрикой ρ, индуцированной нормой пространства $M(Z)$, в себя;

2) отображение F'_u измеримо для любой функции $u\in S(Z)$.

Тогда в Δ' существует оптимальная по U_1-критерию стратегия.

Доказательство. Так как у нас переходные вероятности (3) строго положительные, то условие (6) выполнено. Следовательно доказательство вытекает из [3].

Теорема 7. Пусть на рынке ценных бумаг пространство допустимых торговых стратегий Θ – компактно, отображение F непрерывно и выполнены условия (6). Тогда, если:

1) функция $r(z, \theta)$ непрерывна по z, θ $((x, \theta)\in\Delta$;

2) переходная вероятность $P(\cdot/x, \theta)$ слабо непрерывна по z, θ $((z, \theta)\in\Delta)$,

то в Θ_0 существует оптимальная по U_1-критерию стратегия.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

Теорема 8. Пусть на рынке ценных бумаг пространство возможных торговых стратегий Θ – компактно, отображение F полунепрерывно сверху и выполнены условия (6). Тогда, если:

1) функция $r(z, \theta)$ полунепрерывна сверху по z, θ $((z, \theta)\in\Delta)$;

2) переходная вероятность $P(\cdot/x, a)$ слабо непрерывна по z, θ $((z, \theta)\in\Delta)$,

то в Θ_0 существует оптимальная по U_1-критерию стратегия.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

Теорема 9. Пусть на рынке ценных бумаг пространство возможных торговых стратегий Θ – счетное множество, а множество $\Theta(z)$, $z \in Z$ – конечно, пусть также выполнены условия (6). Тогда в Θ_0 существует оптимальная по U_1-критерию стратегия.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

Заключение. Полученные результаты показывают, что оптимальные торговые стратегии на финансовом рынке существуют, и указывают на условия существования таких стратегий.

Т.В. Пепеляєва

ПРО ОПТИМАЛЬНІ ТОРГОВІ СТРАТЕГІЇ НА ФІНАНСОВОМУ РИНКУ

Досліджується питання про існування торгових стратегій на ринку цінних паперів за допомогою функцій корисності.

T.V. Pepeljaeva

ON OPTIMAL MARKET STRATEGIES AT FINANCIAL MARKET

The problem of existense of market strategies at an market of expensive paper market are investigated by the functions.

1. *Висков О.В.*, *Ширяев А.Н.* Об управлениях, приводящих к оптимальным стационарным режимам // Тр. МИАН. – LXX1. – С. 35 – 45.
2. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1969, – **2**. – 480 с.
3. *Губенко Л.Г., Штатланд Э.С.* Об управляемых марковских процесах с дискретным временем // Теория вероятности и математической статистики – 1972. – № 7. – С. 51 – 66.

Получено 28.03.2005