Теорія оптимальних рішень

УДК 519.21

Т.В. ПЕПЕЛЯЕВА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ

Исследуется дробный винероский процесс. Доказана теорема существования оптимального управления решением стохастического дифференциального уравнения с дробным винеровским процессом.

Введение. В настоящей статье рассматриваются дробные винеровские процессы с параметром Харста $H\in(1/2,1)$. Как показали недавние исследования, реальное поведение стоимости ценных бумаг не всегда точно моделируется с помощью обычного винеровского процесса, который совпадает с дробным винеровским процессом с параметром Харста $H = 1/2$. Динамику некоторых процессов, протекающих на финансовом рынке, более точно моделируют дробные винеровские процессы с параметром Харста $H\in(0{,}7;\ 0{,}8)$. Поэтому исследования уравнений, приведенных в данной работе, и нахождение условий существования оптимального управления решением стохастического дифференциального уравнения с дробным винеровским процессом – важная задача и с теоретической, и с практической точек зрения.

В работе [1] приведен один из алгоритмов решения поставленной задачи. В настоящей статье задача оптимального управления исследуется другим методом.

Пусть $(\Omega,\Im,P)$ – вероятностное пространство, $(\Im_t)$, $t\in[0,\ 1]$ – семейство σ-подалгебр $\Im$, причем $\Im_s\subset\Im_t$, если $s\leq t$.

Пусть $L^2([0,1])$ пространство $\Im_t$ – измеримых процессов $\varphi=\{\varphi_t,\ t\in[0,1]\}$ такие, что

$$\int_0^1 E\,|\varphi_t(\omega)|^2dt<\infty.$$

И пусть $L^1([0,1])$ – пространство $\Im_t$ –измеримых процессов $\varphi=\{\varphi_t, t\in[0,1]\}$, для которых выполняется равенство

$$P\{\int_0^1 |\varphi_t(\omega)|^2 dt<\infty. \}=1.$$

Для функций из классов L^2 и L^1 определен стохастический интеграл следующим образом [2]:

$$I(\varphi)=\int_0^1 \varphi_t \, dW_t .$$

Пусть B_t^H – дробный винеровский процесс с параметром Харста $H\in(1/2,1)$, т. е. B_t^H – непрерывный гауссовский процесс, такой, что $B_0^H=0$, $E B_t^H=0$, $t\geq 0$, и ковариационная функция задается следующим образом:

$$E\,(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}),\ s,\ t\geq 0.$$

Заметим, что при H=1/2 случайный процесс B_t^H есть обычное броуновское движение.

Пусть $(C, \Re)$ – измеримое пространство непрерывных на [0, 1] функций с потоком σ-алгебр $\Re_t=\sigma\{f(s), s\leq t\}$, $\Re=\sigma\{f(t), t\in[0, 1]\}$.

Рассмотрим уравнения

$$\xi(t)=\xi_0+\int_0^t a(x,\xi,u)dx + B_t^H,\ t\in[0,1], \tag{1}$$

где a – $\Re_t$-измеримый функционал, u: $[0,1]\rightarrow \tilde{U}$ – управление, которое не зависит от будущего. Пусть U – класс всех тех управлений, для которых существует решение уравнения (1); A – σ-алгебра открытых подмножеств из [0,1], A_U – σ-алгебра борелевських подмножеств из U.

Пусть функционал $a(t, \xi, u(t, \xi))$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $a(t, x, u)$ есть $A\times\Re\times A_U$-измеримой функцией;

2) $\forall\ t\in[0,1]$ функция $a(t, x, u)$ есть $\Re\times A_U$ – измеримой;

3) $\forall\ t\in[0,1]$, $x\in C$ функция $a(t, x, u)$ непрерывна на U;

4) $\forall\ t\in[0,1]$, $x\in C$ множество $a(t, x, U)=\{\ a(t, x, u),\ u\in U\ \}$ выпукло и замкнуто;

5) $\exists L>0$, такое, что $|a(t, x, u)|^2\leq L(1+|x|^2)$;

6) $\exists M>0$, такое, что $|\ K^{-1}(\int_0^t a\ (s, x, u)ds)\ (t)\ |^2\leq M(1+|x(t)|^2)$.

Стоимость управления задается следующим образом:

$$F(u) = E\int_0^1 f(t, \xi^u(t), u(t, \xi^u(t))dt\,,$$

где $f(t, \xi, u)$ – непрерывная неотрицательная функция, $(t, \xi, u) \in [0,1] \times C \times U$, $\xi^u(t)$– решение уравнения (1), которое соответствует управлению $u = u(t, \xi^u(t))$.

Задача оптимизации управления решением уравнения (1) состоит в том, чтобы найти управление u^* в классе допустимых управлений, которое бы минимизировало стоимость управления F.

Обозначим $Z = \inf\limits_{u \in U} F(u)$. Величину Z назовем оптимальной стоимостью управления в классе U.

Цель данной работы – найти условия существования оптимального управления решением уравнения (1).

К дробному винеровскому процессу применим регуляризацию.

Согласно теореме 5.2 [3] B_t^H допускает интегральное представление

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t,s)dW_s\,,$$

где W_t – стандартный винеровский процесс, а ядро

$$K_H(t,s) = c_H\left[(t/s)^{H-1/2}(t-s)^{H-1/2} - (H-1/2)s^{1/2-H}\int_0^t u^{H-3/2}(u-s)^{H-1/2}du\right],$$

где $c_H = \left(\dfrac{2H\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\Gamma(2-2H)}\right)^{1/2}$ (Γ – гамма-функция).

Ядро K_H определяет оператор K_H в $L^2([0,1])$ следующим образом:

$$(K_H g)(t) = \int_0^t K_H(t,s)g(s)ds\,.$$

Обратный оператор K_H^{-1} определяется следующим образом

$$(K_H^{-1}g)(t) = t^{H-1/2}D_{0+}^{H-1/2}(s^{1/2-H}g'(s))(t)\,,\ H>1/2,$$

где $D_{0+}^{H-1/2}h(t) = \dfrac{1}{\Gamma(3/2-H)}\left(\dfrac{h(t)}{t^{H-1/2}} + (H-1/2)\displaystyle\int_0^t \dfrac{h(t)-h(s)}{(t-s)^{H+1/2}}ds\right).$

Вопросы существования слабого решения уравнения (1) исследованы в работе [4], где был получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 5) для функционала $a(t,x,u)$. Тогда уравнение (1) имеет слабое решение.

Положим $a_u(t, x) = a(t, x, u(t, x))$, $t \in [0,1]$, $x \in C$, $u \in U$.

Зафиксируем вероятностное пространство $(\Omega,\Im,P_0)$ с винеровским процессом $W=(Wt,\Im_t,P_0)$.

Пусть множество

$$D=\exp\{\zeta(a_u),\ u\in U\},$$

где

$$\zeta(a_u)=\int_0^1 (K_H^{-1}\int_0^t a_u(s,W)ds)(t)\,dWt-\frac{1}{2}\int_0^1 (K_H^{-1}\int_0^t a_u(s,W)ds)^2(t)dt.$$

Докажем, что множество плотностей D является слабым компактом в пространстве L^1. Для этого покажем, что D – равномерно интегрированное и слабо замкнутое множество в L^1.

Лемма 1. Пусть выполнены вышеприведенные условия 1) – 6) на функционал $a(t,x,u)$. Тогда существует константа $\gamma^*>1$, такая, что

$$\sup_{u\in U} E_0 \exp\{\gamma^*\zeta(a_u)\}<\infty.$$

Доказательство. $\exp\{\gamma\zeta(a_u)\}=\exp\{\zeta(\gamma a_u)+\frac{\gamma^2-\gamma}{2}\int_0^1 (K_H^{-1}\int_0^t a_u(s,W)ds)^2(t)dt\}\le$

$$\le\exp\{\zeta(\gamma a_u)+\frac{\gamma^2-\gamma}{2}M\int_0^1(1+|W_t|^2)dt\}.$$

Последнее неравенство вытекает из свойства 6) функционала a.

Пусть

$$\eta_t=W_t-\gamma\int_0^t K_H^{-1}(\int_0^s a_u(r,W)\,dr)(s)\,ds. \qquad (2)$$

Из соотношения (2), свойства 6) функционала a и неравенства Иенсена имеем

$$|W_t|^2=(\eta_t+\gamma\int_0^t K_H^{-1}(\int_0^s a_u(r,W)\,dr)(s)\,ds)^2\le 2|\eta_t|^2+2\gamma^2[\int_0^t K_H^{-1}(\int_0^s a_u(r,W)dr)(s)ds)]^2\le$$

$$\le 2|\eta_t|^2+2\gamma^2\int_0^t\left[K_H^{-1}(\int_0^s a_u(r,W)dr)(s)\right]^2 ds\le 2|\eta_t|^2+2\gamma^2 M(t+\int_0^t|W_s|^2\,ds).$$

Тогда из неравенства Гронвела – Беллмана вытекает, что

$$|W_t|^2\le 2(\gamma^2 M+|\eta_t|^2)\exp\{2\gamma^2 M\}.$$

Откуда

$$E\exp\{\gamma\zeta(a_u)\}\le E\exp\{\zeta(\gamma a_u)+\frac{\gamma^2-\gamma}{2}M\int_0^1(1+2(\gamma^2\mathrm{M}+|\eta_t|^2)\exp\{2\gamma^2\mathrm{M}\}dt\}=$$

$$=h(\gamma)E\exp\{\zeta(\gamma a_u)+(\gamma^2-\gamma)M\exp\{2\gamma^2\mathrm{M}\}\int_0^1|\eta_t|^2\ dt\},$$

где $h(\gamma)=\exp\{\frac{\gamma^2-\gamma}{2}M+2\gamma^2\mathrm{M}\exp\{2\gamma^2\mathrm{M}\}\}$.

Рассмотрим следующее стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi_t=f(t,\xi,u(t,\xi))\,dt+dW_t,\ t\in[0,1]. \qquad (3)$$

Для него плотность $\zeta_0^t(f)$ определяется таким образом [5]

$$\zeta_0^t(f)=\int_0^1 f(t,W,u)\,dW_t-\frac{1}{2}\int_0^1|f(t,W,u)|^2dt,\ t\in[0,1] \qquad (4)$$

и $E\exp\{\zeta_0^T(\gamma f)\}=1$ [5]. Условия 1) – 5) выполненные для $f(t,\xi,u(t,\xi))=$ $=(K^{-1}\int_0^t a_n(s,\xi)ds)(t)$.

Тогда

$$E\exp\{\zeta(\gamma f(t,W,u(t,W)))\}=E\exp\{\zeta_0^1(\gamma K_H^{-1}(\int_0^t a_s(s,W)ds))\}=1.$$

По теореме Гирсанова преобразования мер для дробных винеровских процессов [3] $P'(dw)=\exp\{\zeta(\gamma a_u)\}P_0(dw)$.

Тогда

$$E_0\exp\{\gamma\,\zeta(a_u)\}\le h(\gamma)E_0\exp\{M(\gamma^2-\gamma)\exp\{2\gamma^2\mathrm{M}\}|W_t|^2\}.$$

Легко проверить, что функция $h(\gamma)$ ограничена в окрестности точки $\gamma=1$. Возьмем $\gamma>1$, близкое к 1, тогда математическое ожидание в правой части последнего неравенства конечное и $E_0\exp\{\gamma\,\zeta(au)\}\le C<\infty$, где константа C зависит лишь от γ и M. Лемма доказана.

Докажем теперь замкнутость множества D.

Лемма 2. Пусть выполнены вышеприведенные условия 1) – 6) для функционала $a(t,x,u)$. Тогда множество D замкнутое в L^1.

Доказательство. Пусть последовательность элементов $\exp\{\zeta(a_n)\}$, $n=1,2,\ldots$ слабо сходится к случайной величине $\rho\in L^1$. Очевидно, что $E_0\rho=1$ и $\rho>0$ с вероятностью 1.

Рассмотрим теперь уравнение (3) и соответствующую ему плотность (4). По лемме 4 из [6] ρ есть интегрированная функция от винеровского процесса $W=\ =(W_t,\Im_t,P_0)$ и существует случайный процесс $\varphi=(\varphi_t)$, такой, что

$P_0\{\int_0^t |\varphi_t|^2\, dt<\infty\}=1$ и $E_0(\rho_1/\Im_t) - E_0(\rho_1/\Im_s)=\int_s^t \varphi_r\ dW_r$; ρ_1 – предельная точка последовательности $\exp\{\zeta_0^1(f)\}$ в L^1.

Пусть $f(t,W,u) = (K_H^{-1}\int_0^t a_u(s,W)\,ds)(t)$. Условия 1) - 5) для функции f выполнены, тогда существует процесс $\theta=\{\theta_t, t\in[0,1]\}$, такой, что

$$P_0\{\int_0^1 |\theta_t|^2\ dt<\infty\}=1, \tag{5}$$

$$E_0(\rho/\Im_t) - E_0(\rho/\Im_s)=\int_s^t \theta_r\, dW_r, \tag{6}$$

где $\theta = K_H^{-1}(\int_0^t \varphi(s)\ ds)$.

Положим $\rho_t= E_0(\rho/\Im_t)$. Семейство $(\Im_t, t\in[0,1])$ – непрерывно, тогда согласно теории мартингалов

$$P_0\{\inf_{0\le t\le 1}\rho_t>0\}=1. \tag{7}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi_t=\frac{\theta_t}{\rho_t}=\frac{K_H^{-1}\int_0^t \varphi_s ds}{1+\int_0^t (K_H^{-1}\int_0^s \varphi_r dr)(s)ds}\ . \tag{8}$$

Из условий (5) и (7) вытекает, что для ψ_t выполняется $P_0\{\int_0^1 |\psi_t|^2\ dt<\infty\}=1$.

Из формул (6) и (8) имеем

$$\rho_t=1+\int_0^t \rho_s(\ K_H^{-1}\int_0^s \varphi_r dr)(s)dW_s\ .$$

Согласно [7] из этого соотношения вытекает, что для $\theta= K_H^{-1}\int_0^t \varphi_s\ ds$ $\rho_{1_t}=\exp\{\zeta_0^t(\psi_{1_t})\}$, где $\psi_{1_t}=\frac{\varphi_t}{\rho_{1_t}}$. Отсюда $\rho_t= \exp\{\zeta_0^t\ (\psi)\}$ и $\rho=\rho_1=\exp\{\zeta_0^1(\psi)\}$.

Для любого $N>0$ положим $\tau_N=\min\{1, \inf t: \|Wt\|=N\}$, $\chi_N = \chi_N(t,W) = \chi_{\{\tau_N>t\}}$, $a_n^N = a_n\chi_N, \psi^N=\psi^N\chi_N$. Так как $\rho_{\tau_N} = E_0(\rho/\Im_{\tau_N})$, то $\exp\{\zeta_0^{\tau_N}(a_n)\}=E_0[\exp\{\zeta_0^1(a_n)\}/ / \Im_{\tau_N}]$. Семейство ($\Im_t$, $t\in[0,1]$) и мартингалы ($\exp\{\zeta_0^t(a_u)\}$) – непрерывны, тогда и (ρ_t) – непрерывно.

Для любой случайной величины λ

$$E_0\lambda E_0[\exp\{\zeta(a_n)\}/\Im_{\tau_N}] = E_0\exp\{\zeta(a_n)\}\, E_0(\lambda/\Im_{\tau_N}),$$

$$E_0\lambda E_0(\rho/\Im_{\tau_N})=E_0\rho E_0(\lambda/\Im_{\tau_N}).$$

Тогда для любого $N>0$

$$\exp\{\zeta(a_n^N)\}=\exp\{\zeta_0^{\tau_N}(a_n)\}\to\exp\{\zeta_0^{\tau_N}(\psi)\}=\exp\{\zeta(\psi^N)\}$$

слабо в L^1.

Из свойства 6) функционала a вытекает, что $a_n^N = a_n(t,W)\,\chi_N(t,W)$ ограничено той же константой, что и a, поэтому семейство функций $\{\exp\{\zeta(a_n^N)\}\ n\geq 1\}$ ограничено в L^2. Тогда это семейство компактно в L^2, из чего вытекает, что $\exp\{\zeta(\psi^N)\}\in L^2$ и

$$\exp\{\zeta(a_n^N)\}\to\exp\{\zeta(\psi^N)\}$$

слабо в L^2.

Согласно известному результату слабой сходимости существует последовательность выпуклых комбинаций $\sum_{k=1}^{k_n}\lambda_k^{(n)}\exp\{\zeta((K_H^{-1}\int_0^t a_u(s,W)ds)(t))\}$, n≥1, которая строго сходится к $\exp\{\zeta(\psi^N)\}$ в L^2.

Применим формулу Ито к процессу ξ_t, который удовлетворяет уравнению (1) и функцям $\exp(\xi_t)$. Получим

$$\sum_{k=1}^{k_n}\lambda_k^{(n)}\exp\{\zeta((K_H^{-1}\int_0^t a_u(s,W)ds)(t))\}=\exp\{\zeta(\eta_n)\},$$

где $\eta_n=\eta_n(t,W)= \sum_{k=1}^{k_n}\lambda_k^{(n)}\dfrac{\lambda_k^{(n)}\exp\{\zeta_0^t((K^{-1}\int_0^t a_k^N(s,W)ds)(t))\}}{\sum_{k=1}^{K_N}\lambda_k^{(n)}\exp\{\zeta((K^{-1}\int_0^t a_k^N(s,W)ds)(t))\}}(K_H^{-1}\int_0^t a_u(s,W)ds)(t).$

Из определения функции a_k^N вытекает, что $\eta_n(t,W)\in a(t,W,U)$ для $\|W\|<N$ (так как множество $a(t, x, U)$ есть выпуклым $\forall t\in[0,1]$, $x\in C$).

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} E_0 |\exp\{\zeta(\eta_n)\} - \exp\{\zeta(\psi^N)\}|^2 = 0,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} E_0 |\exp\{\zeta_0^t(\eta_n)\} - \exp\{\zeta_0^t(\psi^N)\}|^2 = 0,\ t\in[0,1].$$

Из уравнений

$$\exp\{\zeta_0^1(\eta_n)\} = 1 + \int_0^1 \exp\{\zeta_0^t(\eta_n)\}\eta_n(t)dW_t,$$

$$\exp\{\zeta_0^1(\psi^N)\} = 1 + \int_0^1 \exp\{\zeta_0^t(\psi^N)\}\psi_t^N\, dW_t,$$

и свойства 3) стохастических интегралов имеем

$$\lim_{n\to\infty} E_0 \int_0^1 |\exp\{\zeta_0^t(\eta_n)\}\eta_n(t) - \exp\{\zeta_0^t(\psi^N)\}\ \psi_t^N\ |^2\, dt.$$

Таким образом, для некоторой подпоследовательности n_k

$$\lim_{n\to\infty} \exp\{\zeta_0^t(\eta_{n_k})\} = \exp\{\zeta_0^t(\psi^N)\},$$

$$\lim_{n\to\infty} \exp\{\zeta_0^t(\eta_{n_k})\}\,\eta_{n_k} = \exp\{\zeta_0^t(\psi^N)\}\ \psi_t^N, \text{ п. н.}$$

Получим

$$\lim_{n\to\infty} \eta_{n_k} = \psi_t^N \text{ почти наверное,}$$

так как $\exp\{\zeta_0^t(\psi^N)\}$ положительно.

С другой стороны, $\eta_{n_k}(t,W)\in a(t,W,\tilde{U})$ для $\|W\|<N$. Из того, что $f(t,x,U)$, $t\in[0,1]$, $x\in C$ замкнутое множество, вытекает $\psi_t(W)\in f(t,W,U)$ почти наверное. По лемме 5 [5] имеем, что существует $u\in U$, такое, что

$$\psi_t(W)\in f(t,W,u(t,W)) = a_n(t,W).$$

Лемма доказана.

Следовательно, из лемм 1 и 2 вытекает, что множество D слабо компактно в L^l. Функционал $F(u)$ есть непрерывным. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполняются вышеприведенные условия 1) – 6) для функционала $a(t,x,u)$. Тогда существует управление $u^*\in U$, такое, что

$$F(u^*) = \inf_{u\in U} F(u).$$

Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы о том, что непрерывная функция достигает своего минимума на компакте.

Выводы. Доказанная теорема дает возможность строить оптимальные торговые стратегии на финансовых рынках. Результаты, полученные в настоящей работе могут быть также использованы в тех областях человеческой деятельности, где возникают проблемы управления стохастическими системами, например, в экономике, гидрологии, телекоммуникационных сетях и др.

Т.В. Пепеляєва

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ КЕРУВАННЯ СТОХАСТИЧНОЮ СИСТЕМОЮ НА ФІНАНСОВОМУ РИНКУ

Досліджується дробовий вінерівський процес. Доведено теорему існування оптимального керування розв'язком стохастичного диференційного рівняння з дробовим вінерівським процесом.

T.V. Pepeljaeva

ABOUT SOME CONTROL PROBLEM OF THE STOCHASTIC SYSTEM ON THE FINANCIAL MARKET

The fractional Wiener process is investigated. The existence theorem of optimal control of the solution of stochastic differential equation with the fractional Wiener process is proved

1. *Дериева Е.Н., Пепеляева Т.В.* Об одной задаче управления случайными процессами // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 1. – С. 116–121.
2. *Daletskii Yu.L.* Infinite-dimensional elliptic operators and the corresponding parabolic equations, Uspekhi Math. Nauk – 1967. – **22**, N 4(136). – P. 3–54.
3. *Noros I., Valkeila E., Virtamo J.* An elementary approach to a Girsanov formula and another analytical results on fractional Brownian motion. Bernoulli 5, 1999. – P. 571–587.
4. *Nualart D., Ouknine Yo.* Stochastic differential equations with additive fractional noise locally unbounded drift // Barcelona. – Math. Prepr. Ser.; N 316. – 2002. – 14 p.
5. *Benes V.E.* Existence of optimal stochastic control laws // SIAM J. Control Opt. – 1971. – **9**, N 3. – P. 446–472.
6. *Shtatland B.S., Shtatland E.S.* Absolute continuite and equivalence of measures corresponding to cenrtain stochastic processes with values in a Hilbert spase, and filtoring problems // Theory of random processes. Questions of statistics and control, Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrain. SSR. – Kiev, 1974. – P. 238–256.
7. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 695 с.

Получено 20.07.2004