УДК 519.853.4

В.И. НОРКИН, Б.О. ОНИЩЕНКО

О ГЛОБАЛЬНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ МИНИМУМА МЕТОДОМ МИНОРАНТ

Рассматриваются задачи стохастической глобальной минимизации, в которых целевая функция является математическим ожиданием функции минимума. Указаны способы построения касательных минорант для функций такого вида. Описан вариант метода ветвей и границ с минорантными оценками оптимальных значений целевой функции. Представлены результаты численных экспериментов.

Введение. В работе [1] показано, что известный метод глобальной оптимизации Пиявского [2–4], по существу является методом оптимизации функций максимума:

$$\left[\Phi(x)=\max\nolimits_{z\in Z} f(x,z)\right]\to \min\nolimits_{x\in X}. \qquad (1)$$

Метод Пиявского использует понятие касательных минорант для функции, минимум которой нужно найти.

Определение 1 [1]. Пусть X – топологическое пространство, функции $\Phi(x)$, $x\in X$, и $\varphi(x,y)$, $x\in X$, $y\in X$ связаны условиями:

(i) $\Phi(x)\ge\varphi(x,y)$ для всех $x\in X$, $y\in X$;

(ii) $\Phi(y)=\varphi(y,y)$ для всех $y\in X$;

(iii) функция $\varphi(x,y)$ непрерывна по x равностепенно по y.

Тогда функции $\{\varphi(\cdot,y),\ y\in X\}$ называются касательными (в точках y) минорантами для функции $\Phi(x)$.

Определение 2. Функция $\varphi(x,y)$ называется непрерывной по x равностепенно по $y\in X$ (возможно, разрывной по y), если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ (не зависящее от y) такое, что для любых $x^1,x^2\in X$, $\left\|x^1-x^2\right\|\le\delta$, будет $\left|\varphi(x^1,y)-\varphi(x^2,y)\right|\le\varepsilon$.

Лемма 1. Если функция $\varphi(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных (x,y), то она равномерно непрерывна по (x,y) и, следовательно, непрерывна по x равностепенно по y.

Таким образом, если $\lim_{k\to+\infty}\varphi(x^k, y^k) = \varphi(x,y)$ для любых последовательностей $x^k \to x$, $y^k \to y$, то $\varphi(x,y)$ непрерывна по x равностепенно по y.

Замечание 1. Аналогично определяются касательные мажоранты. Пиявский [2] рассматривал непрерывные по (x,y) миноранты, Норкин [1] изучал непрерывные по x равностепенно по y миноранты и построил исчисление минорант, а Хамисов [8] рассматривает вогнутые, возможно, разрывные по x миноранты. Ниже мы допускаем, например, квазивогнутые разрывные по x миноранты.

Для функции максимума $\Phi(x)$ из (1) определим $Z(x) = \arg\max_{z\in Z} f(x,z)$. Тогда функция $\varphi(x,y) = f(x, z(y))$, $z(y) \in Z(y)$, является касательной в точке y минорантой для $F(x)$.

Часто метод Пиявского применяется для оптимизации функций Липшица, т. е. функций удовлетворяющих условию $|\Phi(x) - \Phi(y)| \le L\|x-y\|$ для любых x, y из множества X и некоторой константы $L > 0$. В этом случае в качестве касательных минорант используют касательные конусы $\varphi(x,y) = \Phi(y) - L\|x-y\|$. В работе [1] для гладких функций с липшицевым градиентом в качестве касательных минорант предлагалось использовать касательные параболоиды, а в [5] показано, что это значительно увеличивает эффективность метода.

В настоящей работе мы распространяем метод минорант (Пиявского) на задачи минимизации функций минимума (или максимизации функции максимума)

$$\left[F(x) = \min_{z\in Z} f(x,z)\right] \to \min_{x\in X}. \tag{2}$$

Предположим, что функции $f(x,z)$ допускают при каждом фиксированном $z \in Z$ касательные в точках $y \in X$ миноранты $\phi(x,y,z)$. Заметим, что тогда функции $\varphi(x,y) = \min_{z\in Z}\phi(x,y,z)$ являются касательными минорантами для функции минимума $F(x)$.

Рассмотрим примеры практических задач, решение которых сводится к нахождению решения задачи вида (2).

Пример 1 (задача размещения сервисных центров) [7]. Предположим, что потребители некоторой услуги распределены в области $\Omega \subset R^m$ согласно распределению $P(d\omega)$. Пусть стоимость обслуживания клиента, живущего в точке $\omega \in \Omega$ из сервисного центра, расположенного в точке $x_i \in X \subset R^m$, задается функцией $c(x_i, \omega)$, например, $c(x_i,\omega) = c\left(\|x_i - \omega\|\right)$, в частности,

$$c(x_i,\omega) = \frac{\|x_i - \omega\|^{\alpha}}{\gamma + \|x_i - \omega\|^{\beta}},\ \alpha \ge \beta > 0,\ \ \gamma > 0. \tag{3}$$

Если имеется n сервисных центров в точках $x_1, \dots, x_n \in X$, а клиент выбирает ближайший центр, то стоимость обслуживания клиента ω задается функцией

$$f(x,\omega) = \min_{1\le i\le n} c(x_i,\omega)\,,\; x = (x_1,...,x_n)\,. \tag{4}$$

Задача состоит в размещении n сервисных центров так, чтобы совокупные ожидаемые затраты обслуживания всех потребителей услуги были минимальны:

$$F(x) = \int_\Omega \{\min_{1\le i\le n} c(x_i,\omega)\} P(d\omega) \to \min_{x\in D}\,, \tag{5}$$

где D – множество допустимых позиций центров. Координаты центров могут удовлетворять некоторым дополнительным ограничениям, например, они могут быть упорядочены по отношению к некоторому направлению $d \in R^m$, тогда

$$D = \{x = (x_1,...,x_n) \,|\, x_1 \in X,...,x_n \in X;\, dx_i \le dx_{i+1},\, i = 1,...,n-1\}.$$

Локальный минимум в (5) может быть найден следующим итерационным алгоритмом. Пусть начальное положение сервисных центров $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$. А на k-ой итерации положение сервисных центров пусть задается вектором $x^k = (x_1^k,...,x_n^k)$. Распределим клиентов между сервисными центрами $(x_1^k,...,x_n^k)$ так, чтобы каждый обслуживался ближайшим к нему центром, т. е. разобъем Ω на n непересекающихся подмножеств $\Omega_i^k, i = 1,...,n$, таким способом, что $i = \arg\min_{1\le i\le n} c(x_i^k,\omega)$ для всех $\omega \in \Omega_i^k$. Очередное приближение положения сервисного центра $x^{k+1} = (x_1^{k+1},...,x_n^{k+1})$ найдем как (приближенное) решение задачи выпуклого программирования

$$F^k(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i^k} c(x_i,\omega) P(d\omega) \to \min_{x\in D}\,.$$

Пусть функции стоимости $c(x,\omega)$ обслуживания фиксированного клиента ω из центра в точке x допускают касательные миноранты $\phi(x,y,\omega)$. Тогда функции

$$\varphi(x,y,\omega) = \min_{1\le i\le n} \phi(x_i,y_i,\omega) \tag{6}$$

являются касательными (в точках y) минорантами функции минимума $f(x,\omega) = \min_{1\le i\le n} c(x_i,\omega)$, а функции $\Phi(x,y) = \int_\Omega \varphi(x,y,\omega) P(d\omega)$ являются касательными минорантами $F(x)$.

Если $c(x,\omega)$ – гладкая по x функция с липшицевым градиентом, то в качестве касательных минорант $\phi(x,y,\omega)$ можно взять касательные параболоиды. Заметим также, что функция $c(x_i,\omega) = \|x_i - \omega\|^\alpha \big/ \left(\gamma + \|x_i - \omega\|^\beta\right)$ представима как разность двух выпуклых функций,

$$c(x,\omega)=\frac{1}{\gamma}\|x-\omega\|^{\alpha}-\frac{\|x-\omega\|^{\alpha+\beta}}{\gamma\left(\gamma+\|x-\omega\|^{\beta}\right)}.$$

Поэтому в качестве ее касательной в точке y миноранты можно взять вогнутую функцию

$$\phi(x,y,\omega)=\frac{1}{\gamma}\|y-\omega\|^{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\|y-\omega\|^{\alpha-2}\langle(y-\omega),x-y\rangle-\frac{\|x-\omega\|^{\alpha+\beta}}{\gamma\left(\gamma+\|x-\omega\|^{\beta}\right)}. \quad (7)$$

Пример 2 (сжатие данных). Пример 1 может быть интерпретирован как задача сжатия или экономного представления данных ω, имеющих распределение $P(d\omega)$, в виде конечномерного вектора $(x_1,\dots,x_n)$. При этом множество всех данных Ω разбивается на подмножества Ω_i точек ω, для которых x_i является ближайшей точкой из набора $(x_1,\dots,x_n)$. Таким образом, точке x_i можно приписать вес $P(\Omega_i)$.

Пример 3. Задача максимизации среднего времени жизни сети имеет вид:

$$\max_{x\in X}\left[F(x)=E_{\omega}\max_{z\in Z}\min_{e\in z}\tau_{ze}(x,\omega)\right],$$

где z – путь из конечного множества путей Z, соединяющих "вход" и "выход" сети; $\tau_{ze}(x,\omega)$ – случайное время жизни элемента e пути z; x – вектор оптимизируемых параметров, например, инвестиции ресурсов в элементы сети; ω – вектор случайных факторов; E_{ω} – символ математического ожидания по ω. Проблема состоит в нахождении глобального максимума $F(x)$ на допустимом множестве X.

Обозначим $\tau_z(x,\omega)=\min_{e\in z}\tau_{ze}(x,\omega)$ – случайное время жизни пути z, $z(x,\omega)\in\arg\min_{e\in z}\tau_{ze}(x,\omega)$. Тогда функции $\varphi(x,y,z,\omega)=\tau_{ze(y,\omega)}(x,\omega)$ являются касательными в точках y мажорантами для величины $\tau_z(x,\omega)$, функции $\phi(x,y,\omega)=\max_{z\in Z}\tau_{ze(y,\omega)}(x,\omega)$ являются стохастическими касательными в точках y мажорантами для $f_z(x,\omega)=\max_{z\in Z}\tau_z(x,\omega)$ – случайного времени жизни сети. Функции $\phi(x,y)=E_{\omega}\phi(x,y,\omega)$ являются касательными в точках y мажорантами для $F(x)$.

Метод минорант. В работе [6] описан стохастический метод ветвей и границ с минорантными оценками снизу целевой функции. Так как предполагается, что функция $F(x)$ в задаче (2) допускает касательные миноранты, то для ее решения возможно использование алгоритма, использующего указанный метод.

Пусть $F(x)=E\min_{z\in X}f(x,z,\omega)$. Если вероятностная мера дискретна, то операция взятия математического ожидания сводится к нахождению суммы:

$F(x)=\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega \min_{z\in X} f(x,z,\omega)$, где p_ω – значения вероятности элементарного события ω. В случае общей вероятностной меры аппроксимируем задачу (2) эмпирическими средними:

$$\min_{x\in X}[F_N(x)=1/N\sum_{k=1}^{N}\min_{z\in X} f(x,z,\omega^k)], \qquad (8)$$

где ω^k – независимые наблюдения случайного параметра ω. Если функции $F_N(x)$ равномерно сходятся к $F(x)=E\min_{z\in X} f(x,z,\omega)$, то вместо исходной задачи (2) можно решать приближенную задачу (8) [6].

В методе ветвей и границ на каждой итерации N имеется текущее разбиение Σ_N исходного множества X. Для каждого элемента $Y\in\Sigma_N$ имеются текущие верхняя $U_N(Y)$ и нижняя $L_N(Y)$ оценки величины оптимального значения $F_N^*=\min_{y\in Y}F_N(y)$, т. е. $L_N(Y)\le F_N^*\le U_N(Y)$. Обозначим Y_N – рекордное множество разбиения Σ_N, т.е. $L_N(Y_N)=\min_{Y\in\Sigma_N}L(Y)$. Алгоритм метода состоит из последовательности следующих операций.

Шаг 1 (ветвление). Пусть множество Y_N выбирается для ветвления, т. е. оно может быть представлено в виде объединения нескольких подмножеств вида $Y_{Nk}\subset Y_N$, $k=1,2,\ldots$, так, что $Y_N=\bigcup_k Y_{Nk}$. Таким образом новое разбиение имеет вид $\Sigma_{N+1}=(\Sigma_N\setminus Y_N)\bigcup\left(\bigcup_k Y_{Nk}\right)$.

Шаг 2 (оценка). Для элементов $Y\in\Sigma_{N+1}$ нового разбиения Σ_{N+1} перевычисляются величины оценок $L_{N+1}(Y)$ и $U_{N+1}(Y)$ оптимального значения $F_{N+1}^*=\min_{y\in Y}F_{N+1}(y)$ функции $F_{N+1}(y)$ на элементе Y. В качестве оценки $U_{N+1}(Y)$ можно взять значение функции $F_{N+1}(\overline{y})$ в некоторой точке $\overline{y}\in Y$, например, точке локального минимума $F_{N+1}(y)$ на Y. В качестве $L_{N+1}(Y)$ можно взять минимум миноранты $\Phi_{N+1}(x,\overline{y})=\dfrac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N+1}\varphi(x,\overline{y},\omega^k)$ на Y, где $\overline{y}$ – некоторая фиксированная точка $\overline{y}\in Y$, или другие подобные оценки.

Шаг 3 (удаление). Если $N+1\ge M$, то из разбиения Σ_{N+1} удаляются бесперспективные множества Y' такие, что $L_{N+1}(Y')>\min_{Y\in\Sigma_{N+1}}U_{N+1}(Y)+\varepsilon$, и т. д.

Это стандартный метод ветвей и границ, за исключением того, что на каждой его итерации используются оценки подмножеств не на основе исходной функции $F(x)$, а на основе приближенных функций $F_N(x)$.

Обозначим $\varepsilon_M=\sup_{N\ge M}\sup_{x\in X}\left|F(x)-F_N(x)\right|$. Очевидно, в силу равномерной сходимости $F_N(x)$ к $F(x)$ на X имеет место $\lim_{M\to\infty}\varepsilon_M=0$.

Теорема 1 (о сходимости). Пусть $F(x)$ – непрерывная функция, последовательность $\{F_N(x),N=1,2,\ldots\}$ равномерно сходится к $F(x)$ на X, $\varepsilon_M\le\varepsilon/2$.

Сделаем предположение, что оценки подмножеств обладают свойством, что $\lim_{N\to\infty}(U_N(Z_N)-L_N(Z_N))=0$ для любой последовательности множеств $\{Z_N\}$ такой, что $diam(Z_N)\to 0$ при $N\to\infty$. Предположим, что разбиения осуществляются так, что диаметры получающихся множеств стремятся к нулю, при неограниченном числе делений. Тогда последовательность $\{Y_N\}$ бесконечна и для любой предельной точки y рекордных множеств Y_N выполнено:

$$F(y)-\min_{x\in X}F(x)\le 2\varepsilon_M .$$

Численные эксперименты. Для иллюстрации работы вышеописанного алгоритма использовалась задача о размещении сервисных центров, описанная в примере 1. В функции (3) $\alpha=\beta=2$, а $\gamma=0.1$. Размещение потребителей $\omega_1,\dots,\omega_m$ – равномерно распределенные случайные величины на отрезке [0,1] с вероятностями $p_{\omega_1},\dots,p_{\omega_m}$ соответственно. Для $m=20$ значения ω_i и p_{ω_i} представлены в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1. Распределение потребителей

Значение Вероятность	0.037991 2.15658E-02	0.100437 3.55347E-03	0.193362 8.26707E-02	0.260176 9.97986E-02	0.326991 2.58563E-02
Значение Вероятность	0.442882 1.20332E-01	0.453538 1.42203E-01	0.480874 9.61612E-02	0.518605 7.31521E-02	0.518865 2.01054E-02
Значение Вероятность	0.595109 7.57130E-02	0.606194 8.86943E-02	0.646899 4.32473E-02	0.720796 1.66506E-02	0.747336 3.97192E-02
Значение Вероятность	0.835398 2.55506E-02	0.847773 1.52854E-02	0.885398 8.41436E-03	0.933185 1.32620E-03	0.999739 7.08675E-08

В методе ветвей и границ использовалась оценка снизу значения целевой функции (5) вида [6]:

$$L(Y)=0.5\left(E\max_{y\in Z}\varphi(\bar{x},y,\omega)+E\min_{y\in Z}\varphi(\bar{x},y,\omega)\right),$$

где Z – конечное множество точек (вершин) из Y; $\bar{x}\in Y$, $\varphi(x,y,\omega)$ – касательные в точках y миноранты к функции (5), вычисленные в форме (6), в которой касательные миноранты к функции стоимости обслуживания клиента (3) – $\varphi(x,y,\omega)$ брались в виде касательных конусов (К), параболоидов (П), а также в виде (7) (А). Константа Липшица для функции (3) $l=3/8\sqrt{3/\gamma}\approx 2{,}053959$ и ее градиента $L=2/\gamma=20$. В алгоритме исходное множество $[0;1]^n$ разбивалось на симплексы, которые в процессе ветвления дробились по наибольшему ребру на два подсимплекса. Точность вычислений равна $\varepsilon = 10^{-6}$. Завершение итерационного процесса происходит когда достигается указанная точность. Результаты работы алгоритма представлены в табл. 2.

По результатам эксперимента видно, что использование минорант в виде касательных конусов не эффективно, если есть возможность использования касательных параболоидов (целевая функция имеет липшицевый градиент) или касательных минорант в форме (7) (целевая функция представима в виде разности двух выпуклых функций). Также видно, что является естественным, возрастание общего числа итераций с увеличением размерности задачи, и возрастание числа не удаленных элементов разбиения допустимого множества задачи.

ТАБЛИЦА 2. Результаты работы алгоритма

n	Вид минорант	Итерации	Оставленные Симплексы	X^*
1	(К)	2091	1301	(0.485959)
	(П)	18	5	(0.486084)
	(А)	19	4	(0.486084)
2	(К)	349550	261436	(0.227470; 0.528999)
	(П)	329	23	(0.227783; 0.529541)
	(А)	865	111	(0.228043; 0.529785)
3	(П)	9289	577	(0.227539; 0.469727; 0.657715)
	(А)	13592	1128	(0.227417; 0.469604; 0.657654)
4	(П)	588145	34777	(0.227539; 0.469727; 0.610352; 0.790527)
	(А)	668906	13106	(0.227661; 0.469604; 0.610229; 0.790649)

Заключение. В работе рассмотрена задача стохастической глобальной минимизации, в которой целевая функция представляет собой математическое ожидание функции минимума. В частности показано, что для решения таких задач тоже применим метод минорант (Пиявского), который раньше применялся, в основном, для минимизации функции максимума. Также указаны способы построения касательных минорант для функций, являющихся функциями минимума. Для этого достаточно уметь строить миноранты для функций, которые находятся под знаком минимума. Рассмотрены три примера задач оптимизации, для решения которых необходимо решить задачу стохастической глобальной минимизации функции минимума или максимизации функции максимума. Построен также вариант стохастического метода ветвей и границ с минорантными оценками минимального значения целевой функции. Представлены результаты численных экспериментов для задачи из первого примера, полученные с помощью описанного в работе алгоритма.

В.І. Норкін, Б.О. Онищенко

ПРО ГЛОБАЛЬНУ МІНІМІЗАЦІЮ ФУНКЦІЇ МІНІМУМУ МЕТОДОМ МІНОРАНТ

Розглядаються задачі стохастичної глобальної мінімізації, у яких цільова функція є математичним очікуванням функції мінімуму. Зазначені способи побудови дотичних мінорант для функцій такого вигляду. Описаний варіант методу гілок і меж з мінорантними оцінками оптимальних значень цільової функції. Представлені результати чисельних експериментів.

V.I. Norkin, B.O. Onischenko

ON THE GLOBAL MINIMIZATION OF MINIMUM FUNCTIONS
BY THE MINORANT METHOD

Stochastic global minimization problems with objective functions in the form of mathematical expectation of a minimum function are considered. Ways to construct tangent minorants for such functions are specified. A variant of the branch and bound method with minorants estimations of optimum values is described. Results of numerical experiments are presented.

1. *Норкин В.И.* О методе Пиявского для решения общей задачи глобальной оптимизации // Вычислительная математика и математическая физика. – 1992. – **32**, № 7. – С. 992–1007.
2. *Пиявский С.А.* Алгоритм отыскания абсолютного минимума функций // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1967. – Вып. 2. – С.13–24.
3. *Данилин Ю.М., Пиявский А.С.* Об одном алгоритме отыскания абсолютного минимума // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1967. – Вып. 2. – С. 25–37.
4. *Пиявский С.А.* Один алгоритм отыскания абсолютного минимума функций // Вычислительная математика и математическая физика. – 1972. – **12**, № 4. – С. 888–896.
5. *Норкин В.И., Онищенко Б.О.* О стохастическом аналоге метода глобальной оптимизации Пиявского // Теорія оптимальних рішень. – Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2003. – Вип. 2. – С. 61–67.
6. *Норкин В.И., Онищенко Б.О.* Метод ветвей и границ с минорантными оценками для решения задач стохастической глобальной оптимизации // Компьютерная математика. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2004. – Вып. 1. – С. 91–101.
7. *Norkin V., Pflug G.Ch., Ruszczynski A.* A branch and bound method for stochastic global optimization // Math. Progr. – 1998. – Vol. 83. – P. 425–450.
8. *Khamisov O.* On Optimization Properties of Functions, with a Concave Minorant // J. Of Global Optimization. – 1999. – Vol. 14, № 1. – P. 79–101.

Получено 18.05.2004