УДК 519.8

В.С. КИРИЛЮК

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ КОГЕРЕНТНОЙ МЕРЫ РИСКА

Вводится понятие полиэдральной меры, обобщающее понятие полиэдральной когерентной меры риска. Это позволяет в рамках единого подхода изучить свойства более широкого класса, содержащего ряд известных мер риска (некогерентные также). Показывается, что задачи оптимизации портфеля для мер риска из этого класса сводятся к соответствующим задачам линейного программирования.

Введение. В данной работе обобщается понятие полиэдральной когерентной меры риска, изученное в [1 – 2]. Это понятие позволило выделить из множества введенных в [3] когерентных мер риска некоторый подкласс, обладающий следующим важным свойством. Задачи оптимизации портфеля по соотношению доходность-риск с использованием таких мер риска (см. [1 – 2]) сводятся к некоторым задачам линейного программирования (LP). Однако для возможности такого сведения не требуется когерентности используемой меры риска, для этого достаточно лишь свойства ее полиэдральности (в соответствующем смысле). Работа посвящена определенному продвижению в данном направлении, в ней вводится некоторое понятие полиэдральной меры, изучаются свойства такой меры риска, а также формулируются соответствующие LP задачи оптимизации портфеля для этой меры риска. Такое понятие оказывается важным, поскольку позволяет охватить как частные случаи некоторые используемые ранее меры риска, не являющиеся когерентными.

Определения, обозначения и примеры. Будем рассматривать только конечные распределения случайных величин, связанные с их наблюдениями по некоторому числу n сценариев. Каждому сценарию $i = 1,\ldots, n$ соответствует определенная вероятность $p_i>0$, т. е. задан некоторый вектор вероятностей $p_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0): p_i^0 \geq 0, \sum_1^n p_i^0 = 1$, а случайная величина X характеризуется распределением $x = (x_1,...,x_n) \in R^n$, следовательно, отождествляется с n-мерным вектором.

Введем следующие обозначения: $e = (1,\ldots,1)$ и $\theta = (0,\ldots,0)$ – n-мерные векторы, состоящие из единиц и нулей соответственно; S^n – единичный симплекс, т. е. $S^n = \{x = (x_1,...,x_n): \sum_1^n x_i = 1, 0 \le x_i \le 1\}$, $[\alpha]^+ = \max\{\alpha, 0\}$.

Определение. Будем называть полиэдральной мерой риска распределения x имеющую содержательный смысл функцию следующего вида:

$$\delta(x) = <-x, a> + \sigma(x), \tag{1}$$

где

$$\delta(x) = \max\{<-Ax, p> / Bp \le c, p \ge 0\}, \tag{2}$$

$<\cdot,\cdot>$ – скалярное произведение, A и B – некоторые матрицы размерностей $n\times n$ и $n\times m$ соответственно, a и c – некоторые вектора, $a \in R^n$, $c \in R^m$, причем множество $\{p \ge 0: Bp \le c\}$ непусто и ограничено.

Замечание 1. Условие $p \ge 0$ в (2) не является принципиальным. Формально более общий случай может быть сведен к допустимому множеству из (2) за счет соответствующей замены переменных и учета этой замены в параметрах a, B и c.

В работе [1] полиэдральная когерентная мера риска вводилась как следующая функция:

$$\rho(x) = \max\{<-x, p> / Bp \le c, p \ge 0\}, \tag{3}$$

причем $\{Bp \le c, p \ge 0\} \in S^n$. Поэтому новое определение позволяет существенно расширить класс изучаемых мер риска, а сами функции $\rho(\cdot)$ из (3) входят сюда как частный случай при условиях $a = \theta$, $A = I$ и $\{Bp \le c, p \ge 0\} \in S^n$.

Пример 1. Рассмотрим функции такого вида:

$$d(x; r) = -E[x] + r\rho(x), \tag{4}$$

где $r \ge 0$, а $\rho(x)$ – полиэдральные когерентные меры риска (3). Тогда параметры a и A из уравнений (1) – (2) описываются так: $a = p_0$, $A = r\,I$, а параметры B и c наследуются из (3).

В финансовых приложениях при принятии решений в условиях неопределенности необходимо построить эффективную границу по соотношениям доходность-риск, на которой затем выбирается принимаемое решение. Поэтому если в качестве меры риска используется функция $\rho(\cdot)$ из (3), а в качестве первого критерия – средняя доходность $E[\cdot]$, то как задача максимизации доходности при ограничении на меру риска, так и задача минимизации меры риска при ограничении на доходность очевидным образом сводятся при соответствующем выборе параметра $r \ge 0$ к задаче $\min\{d(Hu; r): \sum_1^k u_i = 1, u \ge 0\}$, где u – описывает структуру портфеля, а Hu – распределение его доходности. Это оправдывает использование функции вида (4) в качестве меры риска. Кроме того, в этот класс попадают меры риска, основанные на абсолютном отклонении и полуотклонении от средней доходности из [4, 5] соответственно.

Пример 2. Рассмотрим меры, построенные по полуотклонению от средней доходности [5]:

$$\delta_S(x;r) = -E[x] + r\,E[(E[x]-x)^+] = \langle -x, p_0\rangle + r\rho_S(x), \tag{5}$$

где

$$\rho_S(x) = \max \langle\{\langle -A_1 x, p\rangle \;/\; I\,p \le p_0,\ p\ge 0\},\ \text{а } A_1 = I - \begin{pmatrix} p_0^T \\ \dots \\ p_0^T \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что параметры из (1)–(2) описываются так: $a = p_0$, $A = r\,A_1$, $B = I$, $c = p_0$.

Пример 3. Рассмотрим меры, связанные с абсолютным отклонением [4],

$$\delta_A(x;r) = -E[x] + r\,E[\,|x-E[x]|\,] = \langle -x, p_0\rangle + r\rho_A(x),$$

где

$$\rho_A(x) = \max\ \{\langle -A_1 x, p\rangle \;/\; -p_0 \le Ip \le p_0\},\ r \ge 0. \tag{7}$$

Воспользуемся теперь известным очевидным представлением: $\rho_A(x) = 2\rho_S(x)$. Тогда справедливо равенство

$$\delta_A(x;r) = \delta_S(x;r) + r\rho_S(x) = \langle -x, p_0\rangle + 2\,r\rho_S(x), \tag{8}$$

где функция $\rho_S(x)$ описывается соотношением (6). Тогда $a = p_0$, $A = 2\,r\,A_1$, $B = I$, $c = p_0$.

Свойства полиэдральных мер. В работе [3] когерентная мера риска вводилась как некоторая функция $\rho(\cdot)$ на распределении x, удовлетворяющая следующим четырем аксиомам:

*A*1) $\rho(x+ce) = \rho(x) - c$ для $c \in R$;

*A*2) $\rho(\theta) = 0$, $\rho(\lambda x) = \lambda\,\rho(x)$ (положительная однородность);

*A*3) $\rho(x_1+x_2) \le \rho(x_1) + \rho(x_2)$ (субаддитивность);

*A*4) $\rho(x_1) \le \rho(x_2)$, если $x_1 \ge x_2$ (монотонность).

Непосредственно из определения меры $\delta(\cdot)$ следуют ее очевидные свойства.

Утверждение 1. Полиэдральная мера удовлетворяет аксиомам *A*2 и *A*3, т. е. положительно однородна и субаддитивна.

Введем обозначения: $M = \{p\ge 0\colon Bp \le c\}$ – допустимое множество из определения полиэдральной меры, $M(x) = \{p \in M\colon \delta(x) = \langle -x, a\rangle + \langle -Ax, p\rangle\}$ – множество тех p, на которых достигается максимум, определяющий меру $\delta(\cdot)$. Рассмотрим условия выполнения оставшихся двух аксиом.

Утверждение 2. Необходимым и достаточным условием когерентности полиэдральной меры является соотношение

$$A^T M + a \subseteq S^n. \tag{9}$$

Для выполнения аксиомы *A*4 достаточно выполнения следующего условия:

$$A^T M + a \subseteq R_+^n. \tag{10}$$

Доказательство состоит из элементарного преобразования функции $\delta(\cdot)$ и проверки соответствующих аксиом. Справедливо следующее представление:

$$\delta(x) = <-x, a> + \max\{<-Ax, p> / Bp \le c, p \ge 0\} =$$
$$= \max\{<-x, A^T p + a> / Bp \le c, p \ge 0\} = \max\{<-x, q> / q \in A^T M + a\}. \quad (11)$$

Тогда, как следует из утверждения 2 [1], условие (9) эквивалентно когерентности меры $\delta(\cdot)$.

Поскольку функция $\delta(\cdot)$ выпукла, как следует из утверждения 1, то нетрудно вычислить ее субдифференциал, воспользовавшись представлением (11): $\partial\delta(x) = -\{A^T M(x) + a\}$. Монотонность, постулируемая аксиомой $A4$, эквивалентна достижению минимума функции $\delta(x + \Delta x)$ в каждой точке x при ограничениях $\Delta x \in R^n_-$. Выпишем известные из выпуклого анализа необходимые и достаточные условия такого экстремума, умножив соотношения на (–1),

$$\{A^T M(x) + a\} \cap R^n_+ \ne \phi. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что условие (10) гарантирует выполнение (12) для любого $x \in R^n$, а, следовательно, и аксиомы $A4$.

Замечание 2. Выполнение соотношения (12) для любого x из единичной сферы (в силу положительной однородности $\delta(\cdot)$) является необходимым и достаточным условием монотонности $\delta(\cdot)$. Однако такое условие, в отличие от (10), трудно проверять.

Следствие 1. Функция $d(x;\ r)$ из (4) удовлетворяет аксиомам $A2$–$A4$, а функция $\delta(x) = -\lambda E[x] + (1-\lambda)\rho(x)$, где $0 \le \lambda \le 1$ и $\rho(\cdot)$ – мера риска из (3), является полиэдральной когерентной мерой риска.

В качестве доказательства отметим, что выполнение условия (9) очевидно.

Следствие 2. $\delta_S(x;\ r) = -E[x] + rE[(E[x]-x)^+]$ из (5) при $0 \le r \le 1$ является полиэдральной когерентной мерой риска.

Доказательство состоит в проверке условия (9). Действительно, тогда соответствующие A^T, M и a имеют вид: $A^T = r(\mathrm{I} - (p_0 \ldots p_0))$, $M = \{Ip \le p_0, p \ge 0\}$ и $a = p_0$. Проделав простейшие вычисления, можно получить, что
$$A^T M + a = \left\{(rp_1 + p_1^0(1 - r\sum_1^n p_i), \ldots, rp_n + p_n^0(1 - r\sum_1^n p_i)) : 0 \le p_i \le p_i^0, i = 1, \ldots, n\right\}.$$
Нетрудно видеть, что компоненты соответствующих векторов неотрицательные, причем их сумма равна $\sum_1^n p_i^0$. Следовательно, $A^T M + a \subseteq S^n$.

Замечание 3. Что касается функции $\delta_S(x;\ r)$ при $r > 1$, то она, не удовлетворяет аксиоме $A4$ (соотношение (10) не выполняется). Свойства функции $\delta_A(x;\ r)$ легко следуют из свойств $\delta_S(x;\ r)$ в силу известного равенства $\delta_A(x;\ r/2) = \delta_S(x;\ r)$.

Замечание 4. Функции $\delta(\cdot)$ из следствия 1 и $\delta_S(x;\ r)$ при $0 \le r \le 1$ как когерентные меры можно представить в стандартной для них форме в виде (3). Они, соответственно, имеют вид:

$$\delta(x) = \max\{<-x, p> / Bp \le (1-\lambda)c + \lambda p_0, p \ge 0\},$$

$$\delta_S(x;r) = \max\{<-x,p> / Ip \le (1+r)p_0 - rp_0^2, -Ip \le -(1-r)p_0 - rp_0^2, \sum_1^n p_i = 1, p \ge 0\}, (13$$

где p_0^2 – вектор, чьи компоненты есть квадраты компонент вектора p_0.

Рассмотрим некоторые операции для полиэдральных мер.

Утверждение 3. Умножение на неотрицательные числа, сложение, операция максимума и инфимальная конволюция не выводят из класса полиэдральных мер, причем справедливо следующее представление получаемых функций:

$$\delta(\lambda x) = <-x, \lambda a> + \max\{<-Ax, p> / Bp \le \lambda c, p \ge 0\};$$

$$\delta_1(x) + \delta_2(x) = <-x, a_1 + a_2> + \max\{<-x, q> / q \in A_1^T M_1 + A_2^T M_2\}; \qquad (14)$$

$$\max\{\delta_1(x), \delta_2(x)\} = \max\{<-x, q> / q \in \mathrm{co}\{A_1^T M_1 + a_1, A_2^T M_2 + a_2\}\}; \qquad (15)$$

$$\text{если } \{A_1^T M_1 + a_1\} \cap \{A_2^T M_2 + a_2\} \ne \phi, \text{ то}$$

$$\delta_1(x), \delta_2(x) = \max\{<-x, q> / q \in \{A_1^T M_1 + a_1\} \cap \{A_2^T M_2 + a_2\}\}. \qquad (16)$$

Доказательство утверждения легко следует из представления полиэдральной меры риска в виде (11) и использования стандартного аппарата выпуклого анализа.

Заметим, что правые части представления (14)–(16) отличны от формы представления меры в виде (1)–(2), где $a = \theta$, $A = I$, а допустимое множество $M \ni q$ представляет собой многогранник, который не обязательно принадлежит полупространству R_+^n. Это легко устраняется простым техническим приемом: выбирается некоторый вектор a_0, что $M + a_0 \subseteq R_+^n$. Тогда $a = a_0$, а вектор ограничений c соответственно корректируется.

Отметим, что операции над мерами существенно упрощаются в случае совпадения параметров, их определяющих, например, матриц A и / или B.

Важным понятием при принятии в условиях неопределенности является свойство стохастического доминирования второго порядка (SSD). Случайная величина x доминирует случайную величину y в смысле SSD ($x \ge_{SSD} y$), если для любой вогнутой неубывающей функции $u(\cdot)$ выполняется следующее неравенство для соответствующих математических ожиданий: $E[u(x)] \ge E[u(y)]$ (см., например, [6]). Мера риска $\delta(\cdot)$ называется согласованной с SSD, если справедливо соотношение:

$$x \ge_{SSD} y \Rightarrow \delta(x) \le \delta(y).$$

Тогда минимизация меры риска не ухудшает полезность решения для функций $u(\cdot)$ из этого класса. В противном случае, это свойство не гарантировано.

Приведем из [2] некоторое утверждение, адаптированное для изучения согласованности полиэдральной меры с SSD.

Утверждение 4. Пусть множество $\{A^T M + a\}$ из описания полиэдральной меры $\delta(\cdot)$ в форме (11) представляется как множество $\{Bp \le c, p \ge 0\}$, где матрица B и вектор c имеют вид

$$B=\begin{pmatrix} I \\ S_2 \end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix} \beta p_0 \\ c_2 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

причем I – единичная матрица размерностью $n\times n$, S_2 – матрица с одинаковыми столбцами размерностью $n\times k$ (для $k\geq 2$); $\beta\, p_0$ – вектор p_0, умноженный на некоторое число $\beta\geq 0$, c_2 – произвольный вектор размерности k. Тогда мера $\delta\,(\cdot)$ является согласованной с SSD.

Из этого утверждения, к сожалению, не следует согласованность меры $\delta_r(x;r)$ при $0\leq r\leq 1$ с SSD, хотя этот факт известен из [5], а мера близка к форме (17): при представлении этой меры в форме (13) ситуацию портит только добавка $(-r\,p_0^2)$ в первом из неравенств.

Оптимизация портфеля для полиэдральной меры риска. Рассмотрим теперь задачу минимизации полиэдральной меры риска (1)–(2) для портфеля:

$$\min_{\sum_1^k u_i=1, u\geq 0} \delta(Hu) = \min_{\sum_1^k u_i=1, u\geq 0}\left[<-Hu, a> + \max_{Bp\leq c,\, p\geq 0}\left[<-AHu, p>\right]\right], \tag{18}$$

где множество распределений доходности возможных k активов портфеля представлено в виде матрицы H размерностью $n\times k$, j–ый столбец которой описывает распределение доходности j–го актива, вектор $u=(u_1,\ldots, u_k)$ представляет структуру портфеля, причем $\sum_1^k u_i=1$, $u_i\geq 0$, $i=1,\ldots, k$, Hu – распределение его доходности, а матрицы A, B и векторы a, c являются параметрами меры $\delta\,(\cdot)$ из (1)–(2). Она может быть сведена к решению некоторой LP задачи.

Утверждение 5. Решение задачи минимизации полиэдральной меры риска для портфеля (18) есть часть u решения (v, u) следующей LP задачи:

$$\min_{\sum_1^k u_i=1, u\geq 0} \delta(Hu) = \min_{\substack{\sum_1^n u_i=1, u\geq 0 \\ AHu+B^T v\geq 0, v\geq 0}} \left[<-H^T a, u> + <c, v>\right]. \tag{19}$$

Доказательство легко следует из замены внутренней подзадачи из (19) ее LP двойственной задачей и элементарных рассуждений.

Если при выборе портфеля его средняя доходность портфеля должна быть не ниже некоторой заданной величины μ_0, то в этой постановке задачи нужно просто добавить соответствующее ограничение.

Утверждение 6. Решение задачи минимизации полиэдральной меры риска для портфеля с учетом ограничений на среднюю доходность есть часть u решения (v, u) следующей LP задачи:

$$\min_{\substack{\sum_1^k u_i=1, u\geq 0 \\ <u, H^T p_0>\geq \mu_0}} \delta(Hu) = \min_{\substack{\sum_1^n u_i=1, u\geq 0 \\ AHu+B^T v\geq 0, v\geq 0 \\ <u, H^T p_0>\geq \mu_0}} \left[<-H^T a, u> + <c, v>\right]. \tag{20}$$

Пусть теперь значение полиэдральной меры имеет некоторый реальный смысл и необходимо выбрать портфель с максимальной доходностью при ограничениях на значение меры δ_0 (например, $E\,[(E\,[x]-x)^+]\le\delta_0$). Тогда такая задача имеет следующий вид:

$$\max_{\substack{\sum_1^k u_i=1,\,u\ge 0\\ \delta(Hu)\le\delta_0}} \langle H^T p_0, u\rangle \tag{21}$$

и также может быть сведена к некоторой LP задаче.

Утверждение 7. Решение задачи максимизации средней доходности для портфеля с учетом ограничений на значение полиэдральной меры риска (21) есть часть u решения (v,u) следующей LP задачи:

$$\max_{\substack{\sum_1^n u_i=1,\,u\ge 0\\ AHu+B^T v\ge 0,\,v\ge 0\\ -\langle H^T a,u\rangle+\langle c,v\rangle\le\delta_0}} \langle H^T p_0, u\rangle. \tag{22}$$

Для проведения доказательства достаточно использовать стандартный прием, заключающийся в силу соотношений двойственности линейного программирования в следующем эквивалентном представлении:

$$\delta(Hu)\le\delta_0 \Leftrightarrow \langle -Hu,a\rangle + \max_{Bp\le c,\,p\ge 0}\langle -AHu,p\rangle\le\delta_0 \Leftrightarrow \langle -Hu,a\rangle +$$

$$+\min_{B^T v+AHu\ge 0,\,v\ge 0}\langle c,v\rangle\le\delta_0 \Leftrightarrow \exists\, v\ge 0:\ B^T v+AHu\ge 0,\ \langle -Hu,a\rangle+\langle c,v\rangle\le\delta_0.$$

Используя аналогичные рассуждения, можно представить задачу максимизации доходности портфеля и при ограничениях m значений некоторых полиэдральных мер.

Утверждение 8. Справедливо следующее представление задачи максимизации средней доходности при ограничениях на значения соответствующих полиэдральных мер риска:

$$\max_{\substack{\sum_1^k u_i=1,\,u\ge 0\\ \delta_1(Hu)\le\delta_1^0\\ \cdots\cdots\\ \delta_m(Hu)\le\delta_m^0}} \langle H^T p_0, u\rangle = \max_{\substack{\sum_1^n u_i=1,\,u\ge 0\\ A_1Hu+B^T v_1\ge 0,\,v_1\ge 0\\ -\langle H^T a_1,u\rangle+\langle c_1,v_1\rangle\le\delta_1^0\\ \cdots\cdots\\ A_mHu+B_m^T v_m\ge 0,\,v_m\ge 0\\ -\langle H^T a_m,u\rangle+\langle c_m,v_m\rangle\le\delta_m^0}} \langle H^T p_0, u\rangle,$$

где матрицы A_i, B_i и векторы a_i, c_i – параметры мер $\delta_i(\cdot)$ для $i=1,\ldots,m$.

Заключение. В работе вводится и изучается понятие полиэдральной меры, обобщающее соответствующее понятие из [1 – 2]. Это позволяет рассмотреть в рамках единого подхода более широкий класс мер риска. В частности, в этом классе содержатся меры, основанные на полуотклонении и абсолютном отклонении от средней доходности, а также меры риска, которые не являются когерентными.

Помимо изучения ряда свойств таких мер, в работе показано, что как задача минимизации мер риска из этого класса для портфеля, так и задача максимизации доходности при ограничениях на меру риска сводятся к некоторым LP задачам, следовательно, они могут быть эффективно решены стандартными методами оптимизации.

В.С. Кирилюк

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОЛІЕДРАЛЬНОЇ КОГЕРЕНТНОЇ МІРИ РИЗИКУ

Вводиться поняття поліедральної міри, що узагальнює поняття поліедральної когерентної міри ризику. Це дозволяє у рамках єдиного підходу вивчати властивості більш широкого класу, що містить ряд відомих мір ризику (некогерентні також). Показано, що задачі оптимізації портфеля для мір ризику з цього класу зводяться до відповідних задач лінійного програмування.

V.S. Kirilyuk

ON A GENERALIZATION OF POLYHEDRAL COHERENT RISK MEASURE

A notion of the polyhedral measure, which generalizes the notion of the polyhedral coherent risk measure, is introduced. It allows within the framework of the uniform approach to study properties of wider class, which contains a number known risk measures (non-coherent as well). As shown, portfolio optimization problems for risk measures from this class are reduced to appropriate linear programming problems.

1. *Кирилюк В.С.* О когерентных мерах риска и задаче оптимизации портфеля // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2/2003. – С. 111–119.
2. *Кирилюк В.С.* О классе полиэдральных когерентных мер риска // Кибернетика и системный анализ.– 2004.– № 4. – С. 155–168.
3. *Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D.* Coherent Measures of Risks // Mathematical Finance. – 1999. – **9**. – P. 203–227.
4. *Konno H., Yamazaki H.* Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market // Management Science. – 1991. – **37**. – P. 519–531.
5. *Ogryczak W., Ruszczynski A.* From Stochastic Dominance to Mean-Risk Models: Semideviation as Risk Measures // European J. of Operation Research. – 1999. – **116**. – P. 33–50.
6. *Levy H.* Stochastic Dominance and Expected Utility: Survey and Analysis // Management Science. – 1992. – **38**. – P. 555–593.

Получено 17.05.2004