УДК 519.1

О.В. МИРОНЕНКО

РАЗНОРАЗМЕРНЫЕ ДРЕВЕСНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

Исследуется задача разложения полных графов на деревья с различным количеством вершин типа цепей, звезд, комет и двойных звезд. Результаты приводятся в виде таблиц.

Введение. В работах [1–10] исследуются разложения полных графов на подграфы разных типов, в частности на деревья. Интересными и содержательными оказались задачи о существовании упомянутых разложений и их перечислении с точностью до изоморфизма.

В этой работе рассматриваются вопросы перечисления разноразмерных древесных разложений полных графов.

Пусть $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ ($n \geq 2$) – последовательность деревьев, такая, что дерево T_i имеет число вершин i ($i = 1, \ldots, n-1$). Семейство подграфов $\{g_1, g_2, \ldots, g_n-1\}$ полного графа K_n называют (T_1, T_2, …, T_n –1)-разложением графа K_n в том случае, если (1) любой подграф g_i (i=1, …, n–1) представляет собой дерево, изоморфное T_i ; (2) деревья g_i и g_j не имеют общих ребер при $i \neq j$ ($1 \leq i, j \leq n-1$); (3) $g_1 \cup g_2 \cup \ldots \cup g_{n-1} = K_n$.

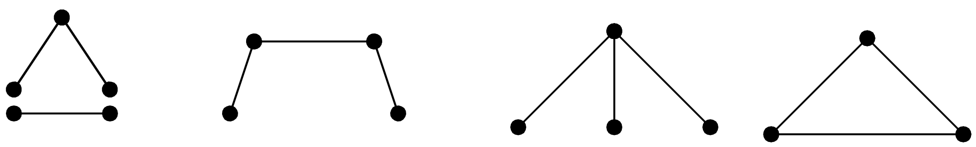
Вышеописанную последовательность T_1, T_2, …, T_{n-1} будем называть заголовком соответствующих (T_1, T_2, …, T_{n-1})-разложений. Деревья g_1, g_2, …, g_{n-1} называют компонентами (T_1, T_2, …, T_{n-1})-разложения, при этом компоненту g_{n-1} называют старшей.

Гьярфас и Легель [1] сформулировали следующую гипотезу: для всякого заголовка T_1, T_2, …, T_{n-1} существует (T_1, T_2, …, T_{n-1})-разложение. Они доказали, что эта гипотеза верна для заголовков, в которых только два дерева не звезды. В попытках доказать эту гипотезу появились новые задачи существования разложений рассматриваемых видов [2, 3].

Хобс, Бурже и Касирай [4] высказали и частично доказали другую гипотезу: $(T_1, T_2, \ldots, T_{n-1})$-разложение полного двудольного графа $K_{n-1,\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$ существует для всех возможных заголовков.

Автора заинтересовала задача о перечислении, с точностью до изоморфизма, $(T_1, T_2, \ldots, T_{n-1})$-разложений; в данной работе эта задача решена для определенных заголовков малых порядков n.

Первоначальная классификация разноразмерных древесных разложений. Для удобства мы разделяем множество всех $(T_1, T_2,\ldots, T_{n-1})$-разложений на четыре типа в соответствии с типами взаиморасположения компонент g_1 и g_2, которые определяются классами изоморфизма графов взаиморасположения $g_1 \cup g_2$, изображенных на рис.1.



Тип 1 Тип 2 Тип 3 Тип 4

РИС.1. Четыре типа $(T_1, T_2, \ldots, T_{n-1})$ – разложений

Разноразмерные звездные древесные разложения. Рассмотрим задачу перечисления в случае, если $T_i = Z_i$ ($i = 1,2,\ldots$), где Z_i – звезда с i ребрами. Следующая теорема решает указанную задачу при всех значениях n.

Звезду Z_i будем изображать в виде $(a)a_1a_2...a_i$, где a - центральная вершина звезды, а $a_1, a_2, ..., a_i$ – ее концевые вершины.

Теорема 1. С точностью до изоморфизма, существует единственное $(Z_1, Z_2, ..., Z_{n-1}\}$-разложение графа K_n для любого $n \geq 2$. Группа автоморфизмов этого разложения имеет порядок 2.

Доказательство. Существование докажем рекурсивным построением. Для $n = 2$ справедливость утверждения очевидна. Предположим, что оно справедливо для порядка $n - 1$. Тогда существует разноразмерное звездное разложение графа K_{n-1}, построенного на множестве вершин $\{1, ..., n\text{-}1\}$.

Рассмотрим граф K_n с множеством вершин $\{1, 2, ..., n\}$. Пусть R – разноразмерное звездное разложение графа $K_{n-1}= K_n \backslash \{n\}$. Прибавив к звездам разложения R звезду $Z_n = (n)12...n\text{-}1$, получим искомое разноразмерное звездное разложение графа K_n, этим существование доказано.

Единственность. Применим метод математической индукции. В случае $n = 2$ единственность очевидна. Пусть $n > 2$. Предположим, что единственность имеет место для всех порядков, меньших, чем n. Пусть, вопреки утверждению теоремы, для графа K_n с множеством вершин $\{1, ..., n\}$ существуют два неизоморфные разноразмерные звездные разложения R_1, R_2. Если нужно, перенумеруем вершины основных графов этих разложений так, чтобы центры старших компонент совместились с вершиной n.

Изъяв из обоих разложений вершину n и старшие компоненты, получим разноразмерные звездные разложения (обозначим их $\check{R}_1$, $\check{R}_2$) графа K_{n-1}. По предположению индукции, эти разложения изоморфны. Итак, существует такая подстановка φ, которая переводит $\check{R}_1$ в $\check{R}_2$. Но тогда подстановка вершин графа K_n, которая действует на вершинах его подграфа K_{n-1} как φ и оставляет на месте вершину n, переводит R_1 в R_2, а это противоречит предположению, что R_1 и R_2 не изоморфны. Установленное противоречие доказывает единственность разноразмерного звездного разложения графа K_n для каждого значения $n \geq 2$.

Относительно группы автоморфизмов вышепостроенного разложения заметим, что под действием произвольного автоморфизма центр любой его звезды, кроме звезды Z_1, остается на месте. Поэтому автоморфизмом может быть лишь подстановка $\alpha = (1, 2)$. И она действительно является автоморфизмом этого разложения, так как вершины 1, 2 – концевые вершины всех его звезд, (поскольку в Z_1 центром можно считать любую из двух ее вершин, то в ней центр не указываем). Теорема доказана.

Разноразмерные цепные разложения. Цепью длины $n - 1$ называют граф P_{n-1} порядка n, у которого ровно две вершины имеют степень 1, а все остальные имеют степень 2. На рис. 2 изображено несколько цепей малых длин.

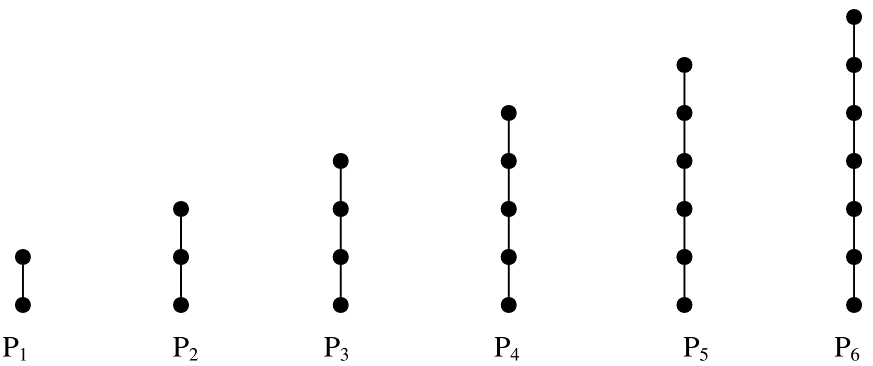


РИС. 2. Малые цепи

Цепь P_k будем изображать в виде последовательности $a_1a_2…a_k$, где a_j – вершины, а (a_1,a_2), (a_2, a_3),…, (a_{k-1}, a_k) – ребра цепи. Цепь $a_1a_2…a_k$ называем стандартной, если $a_1 < a_k$.

$(P_1, P_2, …, P_{n-1})$-разложения графа K_n будем называть разноразмерными цепными разложениями. Для этих разложений задача перечисления с точностью до изоморфизма не имеет такого красивого, лаконичного и универсального решения, как для разноразмерных звездных разложений.

Мы составили компьютерную программу, которая строит список неизоморфных разноразмерных цепных разложений порядка 7, и с ее помощью получили количественные результаты перечисления этих разложений, которые представлены в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1. Результаты перечисления разноразмерных цепных разложений графа K_7

Типы разложений	1	2	3	4	Всего
Количество разложений	42401	56412	24462	6732	130007
Из них симметричных	20	0	0	10	30

Очевидно, что группа автоморфизмов цепного разложения графа K_n является подгруппой группы автоморфизмов старшей компоненты этого разложения, т.е. , эта группа или тривиальная, или же вмещает единственную нетривиальную подстановку $\alpha = (a_1, a_n)\,(a_2, a_{n-1})\ldots(a_{\lfloor n/2 \rfloor}, a_{n-\lfloor n/2 \rfloor+1})$.

Разноразмерные цепные разложения, которые имеют нетривиальный автоморфизм, будем называть симметричными. Как видно выше из табл. 1, существует точно 30 симметричных разложений порядка 7.

Список всех 130007 разноразмерных цепных разложений порядка 7 в данной работе не помещается. Мы помещаем все симметричные разложения порядка 7. В изображениях этих разложений пропущена общая им всем старшая компонента 1234567.

Список симметричных разложений порядка 7

Тип 1

1.	136257 16427 3715 147 35	2.	136257 27416 1537 246 17
3.	136257 27416 3715 246 35	4.	136257 37415 2716 246 35
5.	152637 16427 3175 147 35	6.	152637 27416 1357 246 17
7.	152637 27416 3175 246 35	8.	152637 31457 2716 246 35
9.	251736 16427 1357 147 26	10.	251736 31475 1627 246 35
11.	257136 16427 1537 147 26	12.	257136 37415 1627 246 35
13.	273516 31475 3625 246 17	14.	273516 36425 3175 147 26
15.	275316 36425 3715 147 26	16.	275316 37415 3625 246 17
17.	316275 36425 3715 147 35	18.	316275 37415 2536 246 17
19.	372615 31475 2536 246 17	20.	372615 36425 3175 147 35

Тип 4

21.	136257 16427 1537 147 17	22.	152637 16427 1357 147 17
23.	163527 31475 3715 246 26	24.	163527 37415 3175 246 26
25.	251736 27416 1357 246 26	26.	257136 27416 1537 246 26
27.	316275 36425 1537 147 17	28.	361725 31475 1537 246 26

29. 361725 37415 1357 246 26 30. 372615 36425 1357 147 17

Заметим, что в состав симметричных разложений со старшей компонентой 12...n входят только такие компоненты $a_1a_2.. a_k$, в которых $a_i + a_{k-i+1} = n + 1$ ($i = 1, 2, ..., \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$); цепи с таким свойством естественно можно назвать симметричными. Отсутствие симметричных разложений типов 2 и 3 порядка 7 – не случайное явление. Следующее утверждение обобщает этот факт.

Теорема 2. Симметричные разложения порядка n типов 2 и 3 не существуют при всех значениях n.

Доказательство. Если бы существовало симметричное разложение графа K_n типа 2, то подстановка $\alpha = (1, n)\ (2, n-1)\ldots$ должна переводить рис.1 для типа 2 в этот же рисунок. Но это невозможно, так как тогда в общую вершину двух компонент перешли бы две вершины – противоположные концы двух наименьших компонент (компоненты под действием α неподвижными оставаться не могут). Из тех же соображений рис. 2, тип 3 не может переходить сам в себя под действием этой подстановки. Теорема доказана.

Заметим, что группа автоморфизмов любого $(T_1, T_2, \ldots, T_{n-1})$-разложения $R = \{g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}\}$ имеет вид $Aut\,(R) = Aut\,(g_1) \cap Aut\,(g_2) \cap \ldots \cap Aut\,(g_{n-1})$.

Учитывая это, не следует ждать мощных групп автоморфизмов у рассматриваемых разложений.

Разноразмерные кометные разложения. Вообще , (k, s)-кометой называют дерево, которое состоит из звезды Z_k и цепи Ps, единственная общая вершина которых является концевой вершиной в каждом из этих графов. В частном случае $(k, 0)$-комета представляет собой звезду Z_k , $(1, s)$-комета – цепь P_{s+1}.

В дальнейшем будем понимать под кометой Com_k $(k, 1)$-комету. Кометы малых размеров изображены на рис. 3.

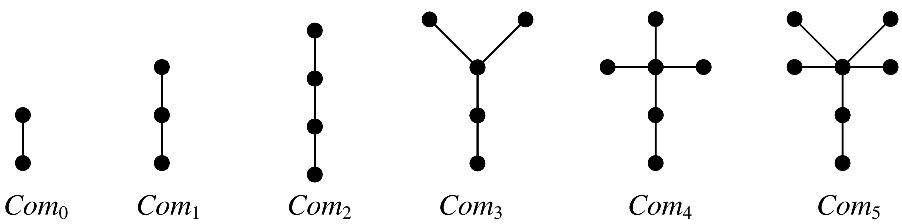


РИС. 3. Малые кометы

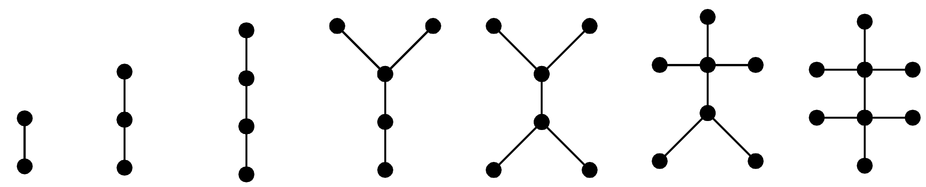
С помощью программы, аналогичной вышеиспользованной для перечисления цепных разложений, мы получили количественные результаты перечисления $(\mathrm{Com}_0, \mathrm{Com}_1, \ldots, \mathrm{Com}_{n-2})$-разложений, представленные в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2. Результаты перечисления кометных разложений графа K_7

Типы разложений	1	2	3	4	Всего
Количество разложений	879	1276	894	252	3361

Заметим, что все кометные разложения порядка 7 имеют тривиальные группы автоморфизмов.

Разноразмерные разложения на двойные звезды. Двойной звездой DS_{2k+2} ($k = 0,1,2, \ldots$) называют дерево порядка $2k+2$, в котором все вершины концевые, кроме двух смежных вершин, степени которых равны k. В случае нечетного порядка будем называть двойной звездой DS_{2k+1} ($k = 1,2, \ldots$) дерево порядка $2k + 1$, все вершины которого концевые, кроме двух смежных вершин, степени которых равны k и k–1. На рис. 4. изображены двойные звезды порядков, которые не превышают 7.



DS_1 DS_2 DS_3 DS_4 DS_5 DS_6 DS_7

РИС. 4. Малые двойные звезды

Полученные в этом случае компьютерные количественные результаты перечисления (DS_1, DS_2, DS_3, DS_4, DS_5, DS_6, DS_7) – разложений приведены в табл. 3.

ТАБЛИЦА 3. Результаты перечисления разноразмерных разложений графа K_7 на двойные звезды

Типы разложений	1	2	3	4	Всего
Количество разложений	1211	1582	610	0	3403

Сокращенное изложение части приведенных результатов представлено в тезисах [11].

О.В. Мироненко

РІЗНОРОЗМІРНІ ДЕРЕВНІ РОЗКЛАДИ ПОВНИХ ГРАФІВ

Досліджується задача розкладу повних графів на дерева з різною кількістю вершин типу ланцюгів, зірок, комет та подвійних зірок. Отримані результати наводяться у вигляді таблиць.

O.V. Mironenko

DECOMPOSITION OF COMPLETE GRAPHS INTO TREES OF VARIOUS DIMENTION

In this paper we explore the problem on decomposition of complete graphs into trees with various amounts of chain-, star-, comet-, and double-star-like vertices. The results of stadies are presented in the form of tables.

1. *Gyarfas A., Lehel J.* Packing trees of different order into Kn, Combinatorics (Proc. Fifth Hungar. Colloq. Keszthely 1976) Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 18, North. – Holland, New York. – 1976. – P.75 – 82.
2. *Fishburn P.G.* Packing graphs with odd and even trees, J. Graphs Theory. – 1983. – №7. – P. 369 – 383.
3. *Balakrishnan R., Paulraja P., Basha A. Rahim* Packing half – complete graphs with trees, Utilitas Mathematica. – 1987. – 31. – P. 131–148.
4. *Hobbs A.V., Bourgeois B.A., Kasiraj J.* Packing trees in complete graphs, Discrete Math. – 1987, – 67. – P. 27–42.
5. *Huang C., Rosa A.* Decomposition of complete graphs into trees, ARS Combinatoria. – 1978. – 5. – P. 23–63.
6. *Petrenjuk A.J.* Enumeration of minimal tree decompositions of complete graphs, JCMCC. – 1992. – 12. – P. 197–199.
7. *Petrenjuk A. J.* On tree factorizations of K_{10}., J. of Combin. Math. and Combin. Computing (in print).
8. *Донец А.Г., Петренюк А. Я.* О перечислении разнокомпонентных древесных разложений // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин–т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2000. – С. 70–75.
9. *Петренюк А. Я.* Древесные факторизации полных графов: существование, построение, перечисление // Мат. 7 Междунар. семинара "Дискретная математика и ее приложения". – М. – 2001. – С. 26–30.
10. *Петренюк А. Я.* Півобертові деревні факторизації повних графів // Укр. матем. журнал. – 2001. – 53, №5. – С. 710–716.
11. *Мироненко О.В.* Різнорозмірні деревні розклади повних графів // Матеріали II Міжнар. наук. – практичної конф. "Динаміка наукових досліджень,2003", (Дніпропетровськ–Кіровоград–Одеса, 20–27 жовтня 2003). – Дніпропетровськ: Математика, 2003. – т. 32. – С. 27–30.

Получено 10.06.2004