УДК 519.8

В.С. КИРИЛЮК

# О КОГЕРЕНТНЫХ МЕРАХ РИСКА И ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ

*Рассмотрена проблема построения эффективной границы для портфеля по соотношениям средняя доходность – полиэдральная когерентная мера риска. Показано, что задача минимизации меры риска при ограничениях на доходность и задача максимизации доходности при ограничениях на меру риска сводятся к задачам линейного программирования, следовательно, они допускают эффективное решение.*



**Введение**. В работах [1,2] изучались вопросы оценивания результатов наблюдений систем с риском, где в качестве величин, характеризующих риск, рассматривались некоторые детерминированные показатели. Однако ситуация существенно усложняется, если имеется некоторая последовательность наблюдений совокупности систем, подверженных определенному стохастическому влиянию, например финансового рынка. В таком случае для систем необходимо строить эффективную границу, основанную на наблюдениях этих распределений, точнее, на некоторых оценках риска по таким наблюдениям. В финансовой практике, как правило, объекты характеризуются соотношениями доходность–риск, или, более точно, средняя доходность – некоторая мера риска.

Для оптимизации портфеля активов давно известен подход Марковица [3], в котором для построения эффективной границы портфеля рассматривалось два критерия: средняя прибыльность портфеля и его дисперсия (стандартное отклонение). Позднее в ряде работ вместо дисперсии, имеющей очевидные недостатки, изучались некоторые другие функции риска (см. например [4,5]). Затем в широко цитируемой работе [6] были сформулированы аксиомы, которым должна удовлетворять подобная функция, названная когерентной мерой риска. Такой мерой оказалась, в частности, CVaR (условное среднее на хвосте распределения), детально изученная в [7,8]. Однако она является не единственной из возможных мер риска.

В данной работе обсуждаются условия эффективности портфеля активов по критериям средняя прибыльность – когерентная мера риска. Если когерентная мера является полиэдральной, т.е. строится как максимум линейных функций на выпуклом многограннике, то построение эффективной границы для портфеля по соотношениям средняя доходность – мера риска сводится к решению соответствующих задач линейного программирования. Такими, в частности, являются известные когерентные меры риска, примеры которых приведены ниже.

**Постановка задачи и необходимые условия экстремума.** Рассмотрим только дискретные распределения случайных величин, связанные с их наблюдениями по некоторому числу $n$ сценариев. Тогда каждому сценарию $i$=1,…, $n$ соответствует определенная вероятность $p_i$>0, т.е. задан некоторый вектор вероятностей $p_0 = (p_1^0,..., p_n^0),\ p_i^0 > 0, i = 1,..., n, \sum_1^n p_i^0 = 1$, а случайная величина $X$ характеризуется своим распределением $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, и, следовательно, отождествляется с этим $n$-мерным вектором.

Обозначим $\sum$ и $\in$ $n$-мерные векторы, состоящие из единиц и нулей соответственно, т.е. $\sum = (1, \ldots, 1)$, $\in = (0, \ldots, 0)$. Пусть $M$ – некоторое выпуклое множество, а $\varphi(.)$ – выпуклая функция. Введем следующие обозначения [9]: ri $M$ – относительная внутренность множества $M$; co $M$ $=\{\Sigma\lambda_i x_i$: $\lambda_i \geq 0$, $\Sigma\lambda_i = 1$, $x_i \in M$, $i$=1,2,…$\}$ – выпуклая оболочка множества $M$; con $M$ $=\{\lambda x$: $\lambda \geq 0$, $x \in M\}$ – конус по множеству $M$; $N_M(x) = \{y$: $\langle y, x\rangle \leq 0$, $y \in$ con $(M - x)\}$ – нормальный конус к множеству $M$ в точке $x$; $\partial\varphi(x_0) = \{U$: $\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq \langle u, x - x_0\rangle\}$ – субдифференциал функции $\varphi$; $S^n = \{x=(x_1,\ldots,x_n)$: $\Sigma\lambda_i x_i \leq 1$, $x_i \geq 0$, $i$=1,…, $n\}$ – единичный симплекс. Будем также понимать под соотношением $x_1 \geq x_2$ для $x_1, x_2 \in R^n$ соответствующее покомпонентное неравенство.

Напомним, что в соответствии с [6] функция $\rho$: $R^n \rightarrow R$ называется когерентной мерой риска, если выполняются следующие аксиомы:

$A1$) $\rho(x+c\sum) = \rho(x) - c$ для $c \in R$;

$A2$) $\rho(\in)=0$, $\rho(\lambda x) = \lambda\,\rho(x)$ (положительная однородность);

$A3$) $\rho(x_1 + x_2) \leq \rho(x_1) + \rho(x_2)$ (субадитивность);

$A4$) $\rho(x_1) \leq \rho(x_2)$, если $x_1 \geq x_2$ (монотонность).

В работе [6] было показано, что когерентность меры $\rho(.)$ эквивалентна ее представлению в виде

$$\rho(x) = \sup\{E_p[-X] \,/\, p \in P\}, \tag{1}$$

где $P$ – некоторое множество вероятностных мер. Изучим далее ее свойства, непосредственно следующие из аксиом и аппарата выпуклого анализа.

**Утверждение 1.** Когерентная мера риска является непрерывной функцией для таких $x$, что $\|x\| < +\infty$.

*Доказательство.* Действительно, пусть имеется последовательность $x_k \rightarrow x$ при $k \rightarrow \infty$, покажем, что $\rho(x_k) \rightarrow \rho(x)$ при $k \rightarrow \infty$. Рассмотрим следующие две последовательности: $x_k^- = x - \|x_k - x\| \sum$ и $x_k^+ = x + \|x_k - x\| \sum$. Тогда из аксиом А1 и А2 легко следуют соотношения

$$\rho(x) - \|x_k - x\| = \rho(x_k^+) \le \rho(x_k) \le \rho(x_k^-) = \rho(x) + \|x_k - x\|,$$

которые гарантируют сходимость $\rho(x_k)$ к $\rho(x)$ при $x_k \to x$, если $\|x\| < +\infty$. Следовательно, для таких $x$ $\rho(.)$ является непрерывной функцией.

**Утверждение 2.** Когерентная мера риска $\rho(.)$ имеет следующий вид:

$$\rho(x) = \max\{E_p[-X] \ / \ p \in P\}, \tag{2}$$

где $P$– выпуклое замкнутое множество вероятностных мер.

*Доказательство* утверждения тривиально следует из выпуклого анализа. Действительно, поскольку $\rho(.)$ – выпуклая непрерывная положительно однородная функция, то она представима в виде опорной функции выпуклого замкнутого множества $M$, т.е. $\rho(x) = \sup\{\langle x, y\rangle \ / \ y \in M\}$[9]. Тогда из свойств А2) и А4) следует, что $\rho(x) \le 0$, если $x \ge 0$, а это означает, что $\rho(x) = \sup\{\langle -x, p\rangle : p \in -M\}$, где $-M \subseteq R_+^n$.

Рассмотрим теперь значение $\rho(.)$ в точках $\sum$ и $-\sum$. Как следует из аксиом А1) и А2), $\rho(-\sum) = -\rho(\sum) = 1$. Эти равенства означают, что ri $(-M)$, а, следовательно, и само множество $-M$ находятся на гиперплоскости $H = \{(h_1, \ldots, h_n): \sum_{i=1}^n h_i = 1\}$. Следовательно, $-M \subseteq R_+^n \cap H$. Это означает, что множество $-M \subseteq S^n$, где $S^n$ – единичный симплекс, т.е. $-M$ есть подмножество вероятностных мер. Поэтому выпуклое множество $-M$ ограничено и компактно, следовательно, супремум в представлении меры $\rho(.)$ достигается, и она имеет вид (2), где $P = -M$.

Как следует из (2), когерентная мера риска $\rho(.)$ есть не что иное, как максимум средних значений распределения со знаком "–" по соответствующему множеству мер, а задание $\rho(.)$ эквивалентно описанию множества мер $P$, которое зависит от исходного вектора вероятностей сценариев $p_0$. Рассмотрим теперь условия экстремума функции $\rho(x)$, представленной в виде (2).

Теперь для выпуклого ограниченного множества $M$ рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$\min\{\rho(x): x \in M\} = \min_{x \in M} \max_{p \in P} \langle -x, p\rangle. \tag{3}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 3.** Необходимое и достаточное условие минимума в задаче (3) имеет такой вид:

$$P(x) \cap N_M(x) \ne \phi, \tag{4}$$

где

$$P(x) = \{p: E_p[-X] = \rho(x)\}. \tag{5}$$

*Доказательство* есть очевидным следствием из выпуклого анализа, поскольку из представления (2) следует, что производная по направлению *u* функции $\rho(.)$ в точке $x$ имеет вид $\rho(x;\, u) = \max\,\{<-u, p>\colon p \in P(x)\}$, где $P(x)$ – выпуклое компактное множество (см., например [9]). Следовательно, $\partial\rho(x) = -P(x)$, и соотношение (4) является необходимым и достаточным условием экстремума задачи (3).

Отметим, что соотношения (4)-(5) могут быть использованы для построения поиска решения задачи (3), например, в виде квазиградиентного спуска с проектированием на множество $M$, в котором субдифференциал функции $\rho(.)$ имеет вид $\partial\rho(x) = -P(x)$, а $P(x)$ описывается в форме (5). Однако такой подход недостаточно эффективен, если необходимо решать значительное количество подобных задач большой размерности. Представляется важным изучить возможность сведения таких задач к стандартным методам, не требующих больших вычислительных затрат.

**Полиэдральные когерентные меры риска и их минимизация.** Перед дальнейшим изложением рассмотрим примеры известных когерентных мер риска. Пусть распределение $x = (x_1, \dots, x_n)$ описывает прибыль, получаемую при реализации соответствующих сценариев.

***Пример 1.*** WCR (worst-case risk) – случай наибольших потерь.
В этом случае $\rho_{WCR}(x) = \max\,\{-x_i\colon i=1,\dots,n\}$. Тогда, как нетрудно видеть, множество $P$ из представления меры в форме (2) имеет вид

$$P_{WCR} = \{p=(p_1,\dots,p_n)\colon p_i \ge 0,\ i=1,\dots,n,\ \textstyle\sum_1^n p_i = 1\}. \qquad (6)$$

***Пример 2.*** $\alpha$-CVaR (conditional value-at-risk) – условное среднее потерь на $\alpha$-хвосте распределения.

Чтобы избежать ненужных при изложении технических деталей, не будем приводить исходное определение из [7], а воспользуемся приведенной там его интерпретацией для конечных распределений.

$$\rho_{\alpha\text{-}CVaR}(x) = \max\left\{ \tfrac{1}{\alpha}\left(\left(\sum_{k_\alpha+1}^{n} p_{i_j}^0 - 1 + \alpha\right)(-x_{i_{k_\alpha+1}}) + \sum_1^{k_\alpha} p_{i_j}^0(-x_{i_j})\right) : \sum_1^{k_\alpha} p_{i_j}^0 < \alpha \le \sum_1^{k_\alpha+1} p_{i_j}^0 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что $k_\alpha$ значений (со знаком “–“) распределения учитываются с их исходными вероятностями, поделенными на $\alpha$, т.е. $\left(1/\alpha\right)p_{i_j}^0$, а следующее – ($k_\alpha$+1)-е значение учитывается с вероятностью, равной $1-\left(1/\alpha\right)\sum_{k_\alpha+1}^{n} p_{i_j}^0$. Это означает, что множество мер из единичного симплекса ограничено покомпонентно неравенствами $p_i \le p_i^0/\alpha$, $i=1,\dots,n$. Следовательно,

$$P_{CVaR}(\alpha) = \{p = (p_1,\dots,p_n)\colon p_i \le p_i^0/\alpha,\ p_i \ge 0,\ i=1,\dots,n,\ \textstyle\sum_1^n p_i = 1\}, \qquad (7)$$

где $p_0 = \left(p_1^0, \dots, p_n^0\right)$ – вектор исходных вероятностей сценариев.

***Пример 3.*** $\alpha$-WCE (worst conditional expectation) – наихудшее условное среднее [6].

$$\alpha\text{-WCE}(x)= \max\left\{\frac{1}{\sum_1^k p_{i_j}^0}\sum_1^k p_{i_j}^0(-x_{i_j}) : \sum_1^k p_{i_j}^0 > \alpha\right\}.$$

Следовательно,

$$P_{WCE}(\alpha) = \text{co}\{(p_1,\ldots,p_n)/ \text{ для } \sum_1^m p_{i_j}^0 > \alpha,\ p_{i_j} = p_{i_j}^0 / \sum_1^m p_{i_j}^0,\ j \le m;\ p_{i_j} = 0,\ j > m\}. \quad (8)$$

Приведенный перечень примеров когерентных мер риска не велик. Поэтому построение новых нетривиальных когерентных мер, отражающих важные стохастические характеристики систем с риском, по мнению автора, представляет несомненный научный интерес.

Отметим следующее важное общее обстоятельство приведенных примеров: множество вероятностных мер $P$, описывающих меры риска $\rho(x)$ в виде (2), есть выпуклая оболочка конечного числа точек, т.е.

$$P(p_0,\alpha) = \text{co}\{P_i(p_0, \alpha): i=1,\ldots, k\},$$

или, эквивалентно,

$$P(p_0,\alpha)=\{p : B(p_0,\alpha)\,p \le c(p_0,\alpha),\ p \ge 0\}, \quad (9)$$

где $p_0$ – вектор исходных вероятностей сценариев; $B(p_0,\alpha)$ и $c(p_0,\alpha)$ – матрица и вектор соответствующих размерностей, зависящие от указанных параметров. В соответствии с терминологией из [10] когерентные меры риска, представимые в форме (2) и (9), будем называть ***полиэдральными***.

По мнению автора, когерентные меры риска, возникающие на практике, являются полиэдральными, поскольку они максимизируют некоторый, пусть большой, но конечный набор возможных комбинаций вариантов, учитываемых лицом, принимающим решения. Это важное обстоятельство, поскольку поиск решений задачи (3) для случая, когда множества $M$ и $P$ – выпуклые многогранники, существенно упрощается и сводится к некоторой задаче линейного программирования.

**Теорема.** Пусть множества ограничений $M$ и $P$ из задачи (3) представляются в виде

$$M = \{x : Ax \le b\},\ P = \{p : Bp \le c,\ p \ge 0\}, \quad (10)$$

тогда решение (3) есть часть $x$ решения $(u,x)$ следующей задачи линейного программирования:

$$\min_{\substack{(u,x)\\ -B^T u - Ex \le 0\\ Ax \le b\\ u \ge 0}} \langle c, u\rangle \quad (11)$$

*Доказательство* элементарно следует из свойств задач линейного программирования, точнее, из следующего соотношения двойственности:

$$\rho(x) = \max_{\substack{Bp\le c\\ p\ge 0}} \langle -x, p\rangle = \min_{\substack{B^T u\ge -x\\ u\ge 0}} \langle c, u\rangle. \qquad (12)$$

Затем, выписав задачу (3) при ограничениях (10) и переходя во внутренней задаче линейного программирования к ее двойственной, имеем

$$\min_{Ax\le b} \max_{\substack{Bp\le c\\ p\ge 0}} \langle -x, p\rangle = \min_{Ax\le b} \min_{\substack{B^T u\ge -x\\ u\ge 0}} \langle c, u\rangle = \min_{\substack{-B^T u - Ex\le 0\\ Ax\le b\\ u\ge 0}} {}_{(u,x)} \langle c, u\rangle .$$

Отметим также, что данная теорема может быть получена как следствие известного результата для матричных игр [11].

**Задача оптимизации портфеля** состоит в построении эффективной границы по соотношениям доходность–риск для портфеля активов, где в качестве оптимизируемой переменной является структура портфеля. Рассмотрим сначала задачу минимизации меры риска портфеля при ограничениях на среднюю доходность величиной $\mu$. Пусть множество распределений доходности всевозможных активов $z_j$, $j$=1,…,$k$ портфеля представлено в виде матрицы $H$ размерностью $k\times n$, $j$–й столбец которой описывает распределение доходности $j$–го актива. В качестве переменной рассматривается вектор $x=(x_1,\ldots, x_k)$, описывающий структуру портфеля, причем $\sum_1^k x_i = 1$, $x_i \ge 0$, $i$=1,…,$k$. Тогда множество ограничений $M$, налагаемых на состав портфеля $x$, имеет вид

$$M = \{\langle x, \Sigma\rangle \le 1, \langle x, -\Sigma\rangle \le -1, \langle x, -Hp^0\rangle \le -\mu, x \ge 0\},$$

где $p^0$ – вектор, описывающий вероятности сценариев. Тогда, как нетрудно видеть, $M = \{x : Ax \le b, x \ge 0\}$, где матрица $A$ и вектор $b$ имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \quad 1\ldots \quad 1 \\ -1-1\ldots-1 \\ -p_0^T H^T \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\mu \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Пусть множество ограничений на меры имеет вид $P = \{p : Bp \le c,\, p \ge 0\}$, где

$$B = \begin{pmatrix} 1 \quad 1\ldots \quad 1 \\ -1-1\ldots-1 \\ B_1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_1 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Тогда задача минимизации полиэдральной когерентной меры риска при ограничениях на среднюю доходность может быть сформулирована в виде

$$\min_{x\in M} \max_{p\in P} \langle -x,p\rangle = \min_{Ax\le b, x\ge 0} \max_{Bp\le c, p\ge 0} \langle -x,p\rangle, \qquad (15)$$

где матрицы $A$, $B$ и векторы $b$, $c$ описаны соотношениями (13) и (14). Это позволяет получить прямое следствие теоремы 1, сформулированное в виде утверждения.

**Утверждение 4.** Решение задачи оптимизации портфеля (13)-(15) – это часть $x$ решения $(u, x)$ следующей задачи линейного программирования:

$$\min_{\substack{(u,x) \\ -B^T u - Ex \le 0 \\ Ax \le b \\ u \ge 0, x \ge 0}} \langle c, u \rangle . \qquad (16)$$

Уточним теперь ограничение на меры, выражаемое в конкретном описании матрицы $B_1$ и вектора $c_1$ из представления (14) для рассмотренных ранее примеров. Так для случаев WCR и $\alpha$-CVaR это уточнение имеет, соответственно, следующий вид:

$$B_1,\ c_1 \text{ отсутствуют (WCR)}, \qquad (17)$$

$$B_1 = E,\ c_1 = (1/\alpha)\, p_0 \ (\alpha\text{-CVaR}). \qquad (18)$$

Заметим, что это можно сделать и для случая $\alpha$-WCE, если представить множество (8) в виде системы линейных неравенств.

**Примечание.** В работах [7,8] детально изучалась $\alpha$-CVaR, а также задачи оптимизации портфеля с этой мерой риска, причем изложение не ограничивалось конечными распределениями случайных величин. Используя специфический вид $\alpha$-CVaR, в этих работах задача (13)-(15), (18) сводилась к следующей оптимизационной задаче:

$$\min_{\substack{(u,x) \\ Ax \le b, x \ge 0}} \left(u + \frac{1}{\alpha} \langle [Hx - u]^+, p_0 \rangle\right), \text{где } [t]^+ = \max\{0, t\} \text{ покомпонентно}, \qquad (19)$$

которая в свою очередь за счет введения дополнительных переменных сводилась к задаче линейного программирования. Последняя предпочтительнее задачи (13)-(14), (16) поскольку, во-первых, это задача меньшей размерности, а во-вторых, задача (19) имеет связь с такой мерой риска как VaR (value-at-risk) [4], которая, хотя и не когерентная, широко применяется в практике.

Как следует из вышеизложенного, для полиэдральной когерентной меры можно построить эффективную границу по соотношениям средняя доходность – мера риска, решая задачу (16) для каждого значения средней доходности. Однако зачастую возникает необходимость решения обратных задач, т.е. максимизации доходности при ограничении значений меры риска величиной $\sigma$. Такая задача имеет следующий вид:

$$\max_{\substack{\sum_1^n x_i = 1, x_i \ge 0 \\ \rho(x) \le \sigma}} \langle Hx, p_0 \rangle . \qquad (20)$$

Если, как и ранее, мера риска $\rho(.)$ является полиэдральной и когерентной, она представима в форме (12). Воспользовавшись ее двойственным представлением, нетрудно видеть, что тогда ограничение на $x$ в виде $\rho(x) \le \sigma$ можно заменить на эквивалентное соотношение

$$\rho(x) \le \sigma \Leftrightarrow \exists u :< c, u > \le \sigma, B^T u \ge -x, u \ge 0 .$$

Это позволяет сформулировать следующее утверждение.

**Утверждение 5.** Решение задачи (12),(20) – это часть $x$ решения $(u, x)$ такой задачи линейного программирования:

$$\max_{\substack{(u,x) \\ -B^T u - Ex \le 0 \\ <c,u> \le \sigma \\ \sum_1^n x_i = 1 \\ u \ge 0, x \ge 0}} <Hx, p_0>. \tag{21}$$

Отметим, что в задаче (21) матрица $B$ и вектор $c$ описывают множество мер в форме (14) и допускают естественное уточнение для конкретного вида мер риска, например, как это было сделано в (17), (18).

Подобные соображения по преобразованию исходной задачи могут быть использованы для поиска максимальной доходности портфеля и при наличии нескольких ограничений на полиэдральные когерентные меры риска. Например, если задано $m$ таких мер в виде

$$\rho_i(x) = \max_{\substack{p \\ B_i p \le c_i \\ p \ge 0}} <-x, p>, \ i = 1,\ldots,m \tag{22}$$

и рассматривается задача оптимизации портфеля в виде

$$\max_{\substack{\sum_1^n x_i = 1, x_i \ge 0 \\ \rho_i(x) \le \sigma_i, i=1,\ldots,m}} <Hx, p_0>, \tag{23}$$

то нетрудно сформулировать соответствующее утверждение.

**Утверждение 6.** Решение задачи (22)-(23) – это часть $x$ решения следующей задачи линейного программирования:

$$\max_{\substack{(u_1,\ldots,u_m,x) \\ -B_1^T u - Ex \le 0 \\ <c_1,u> \le \sigma_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ -B_m^T v - Ex \le 0 \\ <c_m,v> \le \sigma_m \\ \sum_1^n x_i = 1 \\ u_1 \ge 0,\ldots,u_m \ge 0, x \ge 0}} <Hx, p_0>.$$

Заметим, что подобный подход, основанный на представлении $\alpha$-CVaR в виде (19), уже использовался в [8] для поиска решений при заданных ограничениях на $\alpha$-CVaR.

**Заключение.** Таким образом, проблема построения эффективной границы по соотношениям средняя доходность – полиэдральная когерентная мера риска допускает эффективное решение даже при больших размерностях, поскольку и задача минимизации меры риска при ограничениях на доходность, и задача максимизации доходности при ограничениях на меру риска сводятся к поиску решений соответствующих задач линейного программирования. При этом известные когерентные меры риска являются полиэдральными.

*В.С. Кирилюк*

ПРО КОГЕРЕНТНІ МІРИ РИЗИКУ ТА ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОРТФЕЛЯ

Розглянута проблема побудови ефективної границі для портфеля за співвідношеннями середня доходність – політопна когерентна міра ризику. Показано, що задача мінімізації міри ризику за обмежень на доходність та задача максимізації доходності за обмежень на міру ризику зводяться до задач лінійного програмування і можуть бути ефективно розв’язані.

*V.S.. Kirilyuk*

ON COHERENT RISK MEASURES AND PORTFOLIO OPTIMIZATION PROBLEM

The portfolio effective frontier design problem for average profitability – polyhedral coherent risk measure ratio is considered. The risk measure minimization problem under constraint on profitability and the profitability maximization problem under risk measure constraint are reduced to linear programming problems, therefore, they can be effectively solved.

1. *Кирилюк В.С.* Об одном непараметрическом оценивании систем с двумя типами выходов по наблюдениям вход-выход // Кибернетика и системный анализ.– 2003.– № 3.– С.135-141.
2. *Кирилюк В.С.*, *Норкин В.И., Домрачев В.Н.* Подход непараметрических индексов для оценивания субъектов финансового рынка по соотношению доходность-риск на примере коммерческих банков // Информатика и проблемы управления. – 2002. – № 6. – С.120-131.
3. *Markowitz H.M.* Portfolio selection // J. of Finance. – 1952. – 7, № 1. – P.77-91.
4. RiskMetrics™ – Technical Document, 4-th Edition. – New York: J.P.Morgan/Reuters, 1996. – 284 p.
5. *Konno H., Yamazaki H.* Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market //Management Science. – 1991. – 37. – P.519-531.
6. *Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D.* Coherent Measures of Risk // Mathematical Finance. – 1999. – 9. – P.203-227.
7. *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Optimization of Conditional Value-at-Risk // J. of Risk. – 2000. – 2. – P.21-42.
8. *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Conditional Value-at-Risk for General Loss Distribution // J. of Banking and Finance. – 2002. – 26. – P.1443-1471.
9. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1981. – 304 с.
10. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Наука, 1973. – 480 с.
11. *Нейман Дж.Ф., Моргенштейн О.* Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 707 с.

Получено 11.08.2003