КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Розроблено підхід до розпаралелювання процесу розв'язання векторних дискретних оптимізаційних задач за умов невизначеності й ризику, який полягає у зведенні пошуку розв'язків вхідної задачі до розв'язання послідовності однокритеріальних підзадач лінійної оптимізації. Методи розв'язання останніх ґрунтуються на ідеях декомпозиції, відсікаючих площин, релаксації і зводяться до задач безумовної максимізації угнутих кусково-квадратичних функцій, які розв'язуються за допомогою паралельного алгоритму методу Ньютона.

УДК 519.8

В.В. СЕМЕНОВ, Н.В. СЕМЕНОВА

РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА УМОВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА РИЗИКУ

Вступ. Різноманітність, а часто і суперечливість різних вимог до системи чи об'єкта, що проектується або оптимізується, неповнота інформації, неточність моделей, що застосовуються, неминуче приводять до того, що реальні задачі оптимізації доводиться роз-в'язувати за умов невизначеності та ризику [1 – 3]. Розрізняють задачі за умов ризику, коли розподіл випадкових факторів (параметрів) відомий, і задачі оптимізації за умов невизначеності, коли розподіл випадкових параметрів невідомий або параметри є невизначеними, тобто для них відомі лише множини можливих значень. Розглянемо спочатку векторні задачі оптимізації за умов ризику. Для фіксованої альтернативи критерії є випадковими величинами з розподілами, що описуються відомими функціями (або щільностями) розподілу. Частковий критерій такого типу характеризує альтернативу не одним числом, а множиною чисел. За допомогою таких критеріїв незручно робити порівняння альтернатив. Тому їх спочатку доцільно перетворити, використовуючи прийоми, які широко використовуються для скалярних задач оптимізації за умов ризику. Найпоширенішим є прийом, що полягає у тому, що вхідний імовірнісний критерій заміняється одним з його моментів. Найчастіше використовується момент першого порядку – математичне сподівання, іноді – центральний момент другого порядку, тобто дисперсія.

Таким чином, векторна задача оптимізації за умов ризику приймає вигляд детермінованої векторної задачі, однак зберігає імовірнісний зміст. При цьому детермінована задача буде мати більше число часткових критеріїв, якщо, наприклад, спочатку використовувати два перших моменти першого часткового критерію, потім два перших моменти другого критерію і т. д. У задачах оптимізації за умов невизначеності критерії, що характеризують якість альтернатив, залежать також від параметрів, які є випадковими, але з невідомими розподілами, або невизначеними, що виникають, наприклад, через недостатню або неможливу вивченість будь-яких процесів і явищ. Незалежно від походження невизначені параметри, як і випадкові параметри з невідомими розподілами, характеризуються тим, що для них у математичній моделі не визначені конкретні значення, а задані лише множини можливих значень [1 – 3].

Докладний критичний аналіз основних принципів оптимальності, запропонованих для прийняття рішень за умов невизначеності, проведений у [4]. Розглянемо одні з найбільш важливих принципів – принцип максиміна або найкращого гарантованого результату, коли пошук оптимальних рішень здійснюється за песимістичною стратегією; і коли пошук найкращого рішення здійснюється за оптимістичною стратегією За песимістичною стратегією здійснюється пошук Парето-оптимального розв'язку, одночасно допустимого при всіх можливих значеннях неоднозначно заданих даних моделі. За оптимістичною стратегією ведеться пошук оптимального розв'язку, який є допустимим принаймні для одного набору значень даних задачі з області їх визначення. Можлива також параметризація цих підходів.

Новим теоретичним підходом для розв'язання важливих задач економіки, проектування складних систем, прийняття рішень за умов невизначеності та ін. є застосування моделей і методів, що об'єднують багатокритеріальність альтернатив і комбінаторні властивості допустимої множини. Для розв'язання задач комбінаторної оптимізації розроблені різні обчислювальні методи. Найбільш перспективні з них складають окрему область поліедральної комбінаторики [5 – 8]. Загальна ідея цих методів полягає у встановленні зв'язку екстремальних комбінаторних задач з методами лінійного програмування: елементи допустимої множини інтерпретуються як точки евклідового простору, функції критеріїв і обмежень розглядаються як неперервні. Таким чином, розв'язується задача знаходження екстремуму функції на опуклій оболонці заданих точок, тобто на опуклому многограннику. Як відомо, екстремум лінійної функції на многограннику досягається в одній з вершин, яка включається в множину комбінаторних елементів, що розглядаються. Особливість розв'язування комбінаторних задач при такому зведенні полягає у тому, що при знаходженні розв'язків можна обмежуватися лише вершинами многогранника.

У даній роботі сформульовані та досліджені векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторній множині за умов невизначеності та ризику. Описані множини допустимих та оптимальних розв'язків, їх структурні властивості та застосування до розв'язання таких задач. Запропоновано та обґрунтовано підхід з розпаралелюванням процесу оптимізації до знаходження ефективних розв'язків, який дозволяє не тільки розпаралелити процес оптимізації і тим самим прискорити обчислення, але і розв'язувати задачі значно більшої розмірності.

1. Математична постановка векторної задачі оптимізації за умов невизначеності та ризику на комбінаторній множині перестановок. Властивості області допустимих розв'язків. Розглядаються векторні задачі дискретної оптимізації вигляду: $Z(F,X):\ \max\{F(x)\,|\,x\in X_i\}$, $F=(f_1,...,f_\ell)$ – векторний критерій, $f_j:R^n\to R^1,\ j=1,...,\ell$, X_i – скінченна множина n-вимірних векторів, $i=1,2$, $X_1=\{x\in R^n\,|\,\forall A\in H: Ax\le b\}$, $X_2=\{x\in R^n\,|\,\exists A\in H: Ax\le b\}$,

Песимістична стратегія щодо цих задач полягає у знаходженні Парето-оптимального розв'язку задачі $Z(F,X)$, одночасно допустимого для всіх можливих значень $A\in H$. Вона дає вектор $\underline{z}\in R^\ell$, мінімально гарантованих значень оцінок критеріїв $\underline{z}=F(x^*)$ і Парето-оптимальний розв'язок $x^*\in X_1$ цієї задачі тобто $\overline{\exists} y\in X_1: F(y)\ge F(x^*), F(y)\ne F(x^*)$.

За оптимістичною стратегією здійснюється пошук оптимального розв'язку задачі, що є допустимим для деяких (хоча б для однієї) матриці $A\in H$. Такий розв'язок є найкращим з усіх можливих розв'язків задачі $Z(F, X)$. Оптимістична стратегія дає верхню межу $\overline{z}=F(x^{**})$ всіх можливих значень критеріїв і Парето-оптимальний розв'язок $x^{**}\in X_2$ цієї задачі. Визначивши значення векторів $\underline{z}$ і $\overline{z}$, можна охарактеризувати стійкість задачі до змін її вхідних даних.

Декомпозиційний підхід до розв'язання таких задач з одним критерієм запропонований у роботах [1 – 3].

Побудуємо підхід з розпаралелюванням процесу оптимізації до знаходження розв'язків векторних дискретних оптимізаційних задач на комбінаторній множині перестановок з неточно заданими даними матриці обмежень на основі принципу найкращого абсолютно гарантованого результату (песимістичної стратегії). Математичне формулювання цього принципу для векторних задач з лінійними функціями критеріїв приводить до задачі наступного вигляду: $Z(C,X):\ \max\{Cx\,|\,x\in X_1\}$, де $X_1=\{x\in R^n\,|\,Ax\le b, \forall A\in H\}$, матриця $C\in R^{\ell\times n}$, $c_i=(c_{i1},...,c_{in})\in R^n$, $i=1,...,\ell$.

Для математичної постановки задачі $Z(C, X)$ використовується також поняття мультимножини $A=\{a_1,...,a_q\}$ [5, 7, 8].

Упорядкованою n-вибіркою з мультимножини A називається набір $a=(a_{i_1},\ldots,a_{i_n})$, де $a_{i_j}\in A$ $\forall i_j\in N_n$, $\forall j\in N_n$, $i_s\neq i_t$, якщо $s\neq t$ $\forall s,t\in N_n$. Будемо розглядати елементи множини перестановок з повтореннями як точки арифметичного евклідового простору R^n. У роботах [6 – 9] показано, що опуклою оболонкою множини перестановок є многогранник $\Pi_{nk}(A)=\operatorname{conv}P_{nk}(A)$, множина вершин якого збігається з множиною $P_{nk}(A)$ перестановок: $\operatorname{vert}\Pi_{nk}(A)=P_{nk}(A)$, який описується наступною системою лінійних нерівностей:

$$\sum_{i\in\omega_t} x_i \geq \sum_{i=1}^{|\omega_t|} a_i \,\forall\omega_t\subset N_n\,,\ \sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{j=1}^{n} a_i,$$

де $|\omega_t|=t,\ \ t\in\{1,2,...\}$ − кількість елементів множини індексів ω. При відображенні множини $P_{nk}(A)$ в евклідів простір R^n кожній точці $a\in P_{nk}(A)$ відповідає $x\in\operatorname{vert}\Pi_{nk}(A)\subset R^n$. Нехай задача $Z(C,X)$ визначена на допустимій множині $X=X_1\bigcap\operatorname{vert}\Pi_{nk}(A)$.

У роботах [5, 10] встановлено взаємозв'язок між задачею $Z(F,X)$ і задачею $Z(F,G)$, визначеній на неперервній допустимій множині. Це дає можливість застосовувати методи неперервної оптимізації до розв'язання векторних комбінаторних задач і на цій основі розвивати нові оригінальні методи розв'язання, використовуючи властивості комбінаторних множин та їх опуклих оболонок.

2. Підхід до розв'язання векторних задач на комбінаторній множині перестановок за умов ризику та невизначеності. Продовжуючи дослідження і розвиваючи результати робіт [1 – 3, 5], запропоновано підхід до розв'язання задачі $Z(C,X)$, оснований на лінійній згортці часткових критеріїв задачі [11] і подальшому зведенні пошуку розв'язку початкової задачі до розв'язання послідовності однокритеріальних лінійних підзадач, перевірки оптимальності отриманих розв'язків. Методи розв'язання однокритеріальних підзадач засновані на ідеях декомпозиції, відтинаючих площин Келлі, релаксації. Далі розглядається метод, при реалізації якого враховується той факт, що число обмежень досить велике. Отже, доцільним є використання процедури релаксації, тобто тимчасового відкидання деяких обмежень і розв'язання задачі на більш широкій області, тобто за обмеженнями, що залишилися.

Введемо наступні позначення. Допустиму область задачі $Z(C,G)$ запишемо у вигляді $G=\{x\in R^n\mid Hx\leq g\}$, $g=(g_1,..,g_q)$, $H\in R^{q\times n}$, H − матриця, яка використовується для матрично-векторної форми запису обмежень задачі $Z(C,G)$, де всі обмеження зведені до одного $(\leq)$ вигляду нерівностей. Позначимо N_q множину, елементами якої є номери обмежень задачі $Z(C,G)$.

Введемо до розгляду задачу $Z(f, G^s): \max\{f(x) \mid x \in G^s\}$, яка розв'язується на s-му кроці алгоритму, $G^s = \left\{x \in R^n \middle| \langle h_i, x\rangle \le g_i, i \in Q_s \subset N_q\right\}$, де Q_s – множина номерів обмежень, що описують допустиму область цієї задачі, $Q_s = N_q \setminus R_s$, R_s – множина номерів обмежень, які не були включені в задачу на s-му кроці.

Основна ідея методу розв'язання полягає у наступному.

1. Зводимо багатокритеріальну задачу $Z(C, X)$ до однокритеріальної задачі $Z(f, X)$ методом лінійної згортки. Вибираємо обмеження початкової системи, що визначають область $G^s \subset G$.

2. Визначаємо обмеження допустимої області $G^s \subset G$, розв'язуємо задачу лінійної оптимізації $Z(f, G^s)$ і знаходимо оптимальний розв'язок x^s.

3. Якщо отриманий оптимальний розв'язок є перестановкою, тобто вершиною переставного многогранника, то перевіряємо виконання обмежень у точці x^s, що не були враховані. Якщо додаткові обмеження не виконуються, то будуємо відсікання, що проходить через суміжні вершини та відтинає вершину, яка не є допустимою. Додаємо це обмеження до обмежень релаксованої задачі.

4. Розв'язуємо задачу $Z(f, G^s)$ з доданими обмеженнями симплекс-методом. Якщо отримали оптимальний розв'язок, що є елементом множини перестановок, тобто вершиною переставного многогранника, то перевіряємо обмеження, які не були включені. Якщо знайдений розв'язок не задовольняє обмеженням, тим, що залишилися, то додаємо найбільш порушене обмеження.

5. Будуємо суміжні вершини переставного многогранника, перевіряємо, чи задовольняють вони нові обмеження. Якщо задовольняють обмеження, що залишилися не включеними, то знаходимо значення цільової функції у цій точці $f(x^l)$. Додаємо до обмежень задачі $Z(f, G^s)$ обмеження $f(x) \ge f(x^l)$.

6. Якщо значення $f(x^l)$ зменшується, то відкидаємо неактивні обмеження в точці x^l. Покладаємо $s = s + 1$ і переходимо до п. 2 алгоритму.

Та обставина, що жодне з обмежень не відкидається, якщо $f(x^l) = \overline{f}$, гарантує, що порівнюється тільки скінчене число задач $Z(f, G^s)$.

Загальна ідея запропонованого методу полягає у розв'язанні підзадач лінійного програмування, послідовному включенні обмежень, що описують область допустимих розв'язків цих підзадач, та відкиданні неактивних обмежень при поточному розв'язку за деяких умов.

Теорема 1. Робота алгоритму після розв'язання скінченного числа підзадач $Z(f, G^s)$ приводить до ефективного розв'язку задачі $Z(C, X)$ або до побудови множини обмежень, при якій поточна підзадача $Z(f, G^s)$ буде нерозв'язуваною.

3. Розпаралелювання процесу оптимізації розв'язання підзадач лінійного програмування великих розмірностей. Для підзадач лінійного програмування, що розв'язуються за допомогою розробленого підходу, побудовані паралельні алгоритми методу, що заснований на зведенні цих задач до задач безумовної максимізації угнутої диференційовної кусково-квадратичної функції.

У роботах [12 – 14], запропоновано новий метод розв'язання задачі лінійного програмування. Його застосування до двоїстої задачі дає можливість отримати точну проекцію заданої точки на множину розв'язків прямої задачі лінійної оптимізації в результаті безумовної максимізації допоміжної кусково-квадратичної функції при скінченному значенні коефіцієнта штрафу.

Дана робота присвячена розпаралелюванню цього методу, що дає можливість розв'язувати підзадачі лінійної оптимізації з великим числом обмежень. У роботі [15] викладено основні ідеї методу розв'язання задачі лінійної оптимізації, при якому можливе отримання проекції заданої точки на множину розв'язків прямої задачі, з числом обмежень, збільшеним до декількох сотень тисяч. Наводяться формули для визначення граничного значення параметра допоміжної функції, починаючи з якого за одну безумовну максимізацію цієї функції за простими формулами обчислюється проекція точки на множину розв'язків прямої задачі лінійної оптимізації. Повторна максимізація цієї функції, у яку підставлений розв'язок прямої задачі, дозволяє знайти розв'язки двоїстої задачі лінійної оптимізації.

Нехай пряма і двоїста задачі лінійного програмування задані у вигляді:

$$(\mathrm{P}): \min_{x\in X} c^T x, X = \{x \in R^n : Ax = b, x \ge 0\}, \ (\mathrm{D}): \max_{u\in U} b^T u, U = \{u \in R^m : A^T u \le c\}.$$

Тут $A \in R^{m\times n}$, $c \in R^n$ і $b \in R^m$. Нехай множина розв'язків X^* прямої задачі (P) не порожня, отже, множина розв'язків U^* двоїстої задачі (D) також не порожня. Для знаходження проекції заданої точки $\hat{x}$ на множину розв'язків X^* прямої задачі (P) введемо допоміжну задачу безумовної максимізації:

$$\max_{p\in R^m} \left\{ S(p,\beta,\hat{x}) = b^T p - \frac{1}{2} \| (\hat{x} + A^T p - \beta c)_+ \|^2 \right\}, \qquad (1)$$

де скаляр β – фіксований. Тут a_+ – вектор, у якого i-та компонента збігається з i-ою компонентою вектора a, якщо вона невід'ємна, і рівна нулю у протилежному випадку. Скористаємось наступними теоремами [15].

Теорема 2. Існує таке число β_*, що при кожному $\beta \ge \beta_*$, пара $[p(\beta), \beta]$, де $p(\beta)$ – розв'язок задачі безумовної максимізації (1) або, що те ж саме, розв'язок системи $A(\hat{x} + A^T p - \beta c)_+ = b$, визначає проекцію $\hat{x}^*$ заданої точки $\hat{x}$ на множину розв'язків X^* прямої задачі (P) за формулою $\hat{x}^* = (\hat{x} + A^T p(\beta) - \beta c)_+$.

Теорема 3. Нехай множина розв'язків X^* задачі лінійного програмування (P) не порожня. Тоді для будь-яких $\beta > 0$ і $\hat{x} = x^* \in X^*$ розв'язок двоїстої задачі (D) знаходиться за формулою $u^* = p(\beta)/\beta$, де $p(\beta)$ – розв'язок задачі (1).

Отже, в результаті розв'язання двох задач безумовної максимізації угнутої кусково-квадратичної функції від m змінних отримується проекція точки на множину прямої задачі (P) і розв'язок двоїстої задачі (D).

Для одночасного розв'язання прямої і двоїстої задач лінійного програмування пропонується використовувати наступний ітераційний процес:

$$x_{s+1} = (x_s + A^T p_{s+1} - \beta c)_+ , \tag{2}$$

де довільний параметр $\beta > 0$ фіксований, а вектор p_{s+1}, визначається з розв'язання наступної задачі максимізації:

$$p_{s+1} \in \arg\max_{p \in R^m} \left\{ b^T p - \frac{1}{2} \| (x_s + A^T p - \beta c)_+ \|^2 \right\}. \tag{3}$$

Теорема 4. При будь-якому $\beta > 0$ й при будь-якій початковій точці x_0 ітераційний процес (2), (3) збігається до $x^* \in X^*$ за скінченне число кроків ω. Формула $u^* = p_{\omega+1}/\beta$ дає точний розв'язок двоїстої задачі (D).

Цей ітераційний процес є скінченним і дає точні розв'язки прямої задачі (P) і двоїстої задачі (D). Розв'язання задачі безумовної максимізації (4) може виконуватися будь-яким методом, наприклад методом спряженого градієнта. Але, як показано в [14] для безумовної оптимізації кусково-квадратичної функції особливо ефективний узагальнений метод Ньютона.

4. Паралельний ітераційний алгоритм. Розглянемо паралельний алгоритм методу (2)–(3) з використанням узагальненого методу Ньютона [15] у рамках моделі розподіленої пам'яті. Вважаємо, що в кожного процесу (виконуваної програми) є свій адресний простір, а обмін даними між процесами здійснюється за допомогою бібліотеки Message Passing Interface (MPI), кожний процес виконується на своєму процесорі (ядрі).

Розрахункові формули.

1. Задамо $\beta > 0$, точності, відповідно, для зовнішніх і внутрішніх операцій ε_1 і ε, початкові наближення x_0 і p_0.

2. Обчислюємо значення функції $S(p_k, \beta, x_s) = b^T p_k - \frac{1}{2}\left\|(x_s + A^T p_k - \beta c)\right\|^2$ та її градієнт: $G_k = \frac{\partial S}{\partial p}(p_k, \beta, x_s) = b - A(x_s + A^T p_k - \beta c)_+$, k – номер внутрішньої ітерації методу Ньютона для розв'язання задачі (3), s – номер зовнішньої ітерації.

3. Використовуючи узагальнену матрицю Гессе функції $S(p_k, \beta, x_s)$, сформуємо матрицю $H_k \in R^{m \times m}$: $H_k = \delta I + A D_k A^T$. Діагональна матриця $D_k \in R^{n \times n}$ задається рівностями $(D_k)_{ii} = 1$, якщо $(x_s + A^T p_k - \beta c)^i > 0$, інакше $(D_k)_{ii} = 0$.

4. Знайти напрямок максимізації δp як розв'язок лінійної системи

$$H_k \delta p = -G_k . \tag{4}$$

5. Визначити p_{k+1} за формулою $p_{k+1} = p_k - \tau\delta p$, де ітераційний параметр τ_k знаходиться з розв'язання одновимірної задачі максимізації методом ділення навпіл або методом Армихо:

$$\tau_k = \max_{\tau} S(p_k - \tau\delta p, \beta, x_s) .$$

6. Якщо виконано критерій зупинки $\|p_{k+1} - p_k\| \le \varepsilon$ для внутрішніх ітерацій по k, то покласти $\tilde{p} = p_{k+1}$ й обчислити $x_{s+1} = (x_s + A^T \tilde{p} - \beta c)_+$. Інакше перейти до п. 2, поклавши $k = k+1$.

7. Якщо виконано критерій зупинки $\|x_{s+1} - x_s\| \le \varepsilon_1$ для зовнішніх ітерацій по s, то обчислити розв'язок двоїстої задачі (D) $u^* = \tilde{p} / \beta$. Розв'язком прямої задачі (P) є $x^* = x_{s+1}$. Інакше покласти $p_0 = \tilde{p}$, $s = s+1$ і перейти до п. 2.

Основні операції паралельного алгоритму. В алгоритмі основними трудомісткими операціями є формування та розв'язання системи лінійних рівнянь (4). Паралельна реалізація алгоритму вимагає розпаралелювання наступних основних операцій: множення матриць на вектор: Ax і $A^T p$; обчислення скалярних добутків $x^T y$, $x, y \in R^n$ і $p^T q$, $p, q \in R^m$; формування узагальненої матриці Гессе; множення її на вектор. Всі інші обчислення пунктів алгоритму є локальними. Реалізовано декілька паралельних схем наведеного алгоритму в залежності від вигляду вхідної матриці *A*: стовпчикова схема, коли матриця A розбивається на блокові стовпці приблизно рівного розміру, рядкова схема – матриця A розбивається на блоки по рядкам, клітинна схема, при якій матриця A розбивається на однакові прямокутні блоки, кількість яких рівна числу процесорів. Кожна із запропонованих схем має свої переваги і недоліки, що і визначає область їх застосування. Так стовпчикова схема досить ефективна при формуванні системи лінійних рівнянь (4), рядкова – більш ефективна для паралельного методу розв'язання системи лінійних рівнянь. В розроблених паралельних алгоритмах найкраще прискорення отримано для клітинної схеми. Однак, в залежності від розмірності задачі та структури розрідженості матриці *A*, оптимальною може виявитися як клітинна, так рядкова або стовпчикова схеми. Важливим фактором у прискоренні обчислень є оптимізація операцій із щільними й розрідженими матрицями. Для ефективної роботи із щільними матрицями використовувалися функції з бібліотеки Lapack (Linear Algebra PACKage). Однак операції з розрідженими матрицями дають додаткові можливості для оптимізації. Зокрема, можна використовувати спеціальні способи подання розріджених матриць, що поєднують переносимість і урахування характеристик кеш-пам'яті сучасних процесорів і дозволяють істотно зменшити час на обчислення матрично-векторних множень.

Висновки. В зв'язку з необхідністю створення нових оптимізаційних методів, які в повній мірі використовують можливості сучасних багатопроцесорних комплексів, розроблено підхід до розпаралелювання процесу оптимізації до знаходження розв'язків векторних дискретних оптимізаційних задач за умов невизначеності й ризику, який полягає у зведенні пошуку розв'язків вхідних задач до розв'язання послідовності однокритеріальних підзадач лінійної оптимізації. Методи розв'язання останніх ґрунтуються на ідеях декомпозиції, відсікаючих площин, релаксації. Задачі лінійного програмування зводяться до задач безумовної максимізації угнутих диференційовних кусково-квадратичних функцій, які розв'язуються за допомогою паралельного алгоритму методу Ньютона. Розробка ефективного паралельного алгоритму є досить складною задачею, отже для кожного паралельного варіанта алгоритму слід шукати розумний компроміс між обчислювальною масштабованістю й масштабованістю за пам'яттю. Розроблені паралельні алгоритми розв'язання підзадач лінійного програмування засновані на різних схемах розбиття даних успішно можна застосовувати для розв'язання указаних підзадач великої розмірності при досить сильно заповнених матрицях обмежень. Побудований підхід з розпаралелюванням процесу оптимізації дає можливість розв'язувати векторні задачі дискретної оптимізації за умов невизначеності і ризику досить великої розмірності та відкриває перспективи подальшої розробки ефективних алгоритмів розпаралелювання обчислень для розв'язання нових класів векторних задач комбінаторної оптимізації.

В.В. Семенов, Н.В. Семенова

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА

Разработан подход к распараллеливанию процесса решения векторных дискретных оптимизационных задач при условиях неопределенности и риска, который состоит в сведении поиска решений исходной задачи к решению последовательности однокритериальных подзадач линейной оптимизации. Методы решения последних основаны на идеях декомпозиции, отсекающих плоскостей, релаксации и сводятся к задачам безусловной максимизации вогнутых кусочно-квадратичных функций, которые решаются с помощью параллельного алгоритма метода Ньютона.

V.V. Semenov, N.V. Semenova

PARALLELIZING THE SOLUTION PROCESS OF VECTOR COMBINATORIAL PROBLEMS UNDER UNCERTAINTY AND RISK CONDITIONS

An approach to parallelizing the solution process of vector discrete optimization problems under uncertainty and risk conditions is developed. This approach consists of the search of solution to initial problem as a sequence of solutions to linear optimization scalar criteria subproblems. The solution methods of linear optimization problems are based on the ideas of decomposition, cutting planes and relaxation, and are reduced to the problems of maximization of concave piecewise quadratic functions, which are solved with the use of the parallel algorithm of Newton method.

1. *Семенова Н.В.* Методы поиска гарантирующих и оптимистических решений задач целочисленной оптимизации в условиях неопределенности данных // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 1. – С. 103 – 114.
2. *Семенова Н.В., Мащенко О.С.* Оптимізація на комбінаторній множині перестановок в умовах неточно заданих даних // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2009, вип. 3. – С. 184 – 189.
3. *Семенова Н.В.* Гарантирующие и оптимистические решения задач целочисленной оптимизации с выпуклыми квадратичными функциями ограничений // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2006. – № 5. – С. 39 – 47.
4. *Льюис Р.Д., Райфа Х.* Игры и решения. – М.: Иностранная литература, 1961. – 642 с.
5. *Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М.* Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. – К.: Наук. думка, 2009. – 266 с.
6. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 342 с.
7. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т систематичних досліджень освіти. – 1993. – 188 с.
8. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 268 с.
9. *Rado R.* An inequality // J. London Math. Soc. – 1952. – 27 p.
10. *Семенова Н.В.* Условия оптимальности в векторных задачах комбинаторной оптимизации // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2008. – № 7. – С. 152 – 160.
11. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
12. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.* Метод решения задач линейного программирования большой размерности // Докл. РАН. – 2004. – **397**, № 6. – С. 727 – 732.
13. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Моллаверди Н.* Примеівазмерности // Вычислительная математика и математическая физика. – 2004. – **44**, № 9. – С. 1564 – 1573.
14. *Mangasarian O.L.* A Newton Method for Linear Programming // J. Optimizat. Theory and Appl. – 2004. – Vol. 121. – P. 1 – 18.
15. *Гаранжа В.А., Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Нгуен М.Х.* Параллельная реализация метода Ньютона для решения больших задач линейного программирования // Вычислительная математика и математическая физика. – 2009. – **49**, № 8. – С. 1369 – 1384.

Одержано 25.12.2013

Про автора:

Семенов Віктор Вікторович,
молодший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.
E-mail: hunt.semen@gmail.com

Семенова Наталія Володимирівна,
доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.
E-mail: nvsemenova@meta.ua