УДК 517.927

Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец

Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины М. Л. Горбачуком)

Найдены достаточные условия непрерывности по параметру решений многоточечных линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по нормам соболевских пространств $(W_p^n)^m$, где $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$. Аналогичные результаты получены для матриц Грина рассмотренных задач.

1. Постановка задачи. Пусть заданы числа

$$m, n, k-1 \in \mathbb{N}, \qquad p \in [1;\infty), \qquad \varepsilon_0 > 0;$$

конечный интервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$ и его разбиение $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b$.

Рассмотрим параметризированное числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ семейство неоднородных многоточечных линейных краевых задач для системы m дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \qquad t \in (a,b), \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon)y(a_j;\varepsilon) = c_\varepsilon, \tag{2}$$

где вектор-функции $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n-1})([a,b],\mathbb{C}^m)$, векторы $c_\varepsilon \in \mathbb{C}^m$, а матрицы $B_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Относительно комплекснозначных коэффициентов уравнений предполагается, что $A(\cdot;\varepsilon) \in$ $\in W_p^{n-1}([a,b],\mathbb{C}^{m\times m}) =: (W_p^{n-1})^{m\times m}$, $(W_p^0)^{m\times m} := L_p([a,b],\mathbb{C}^{m\times m})$.

Под решением системы (1), (2) понимается вектор-функция $y(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^n)^m$, которая удовлетворяет уравнениям (1) всюду, при $n = 1$ почти всюду, на интервале (a,b) и краевым условиям (2).

Многоточечные краевые задачи являются классическим объектом исследования теории обыкновенных дифференциальных уравнений [1–10]. Непрерывность по параметру их решений в *равномерной* норме $\|\cdot\|_\infty$ исследовалась ранее в работах [8–10]. Полученные там результаты носят законченный характер и близки к окончательным.

Цель данной работы — исследовать непрерывность решений задачи (1), (2) по параметру ε в точке $\varepsilon = 0$ относительно двупараметрического семейства норм $\|\cdot\|_{n,p}$ пространств Соболева $(W_p^n)^m$, каждая из которых сильнее, чем равномерная норма пространства $(C)^m$. Это позволяет существенно дополнить и уточнить результаты работ [8–10].

Кроме этого, мы исследуем непрерывность по параметру ε нормированных матриц Грина $G(t,s;\varepsilon)$, отвечающих задачам (1), (2), относительно норм семейства пространств $(W_p^n)^{m\times m}$ на прямоугольниках $(a,b)\times(a_j,a_{j+1})$, $j = \{1,\ldots,k-1\}$. Теоремы 1, 3 и 4 работы являются новыми и для двуточечных краевых задач, т. е. при $k = 2$.

2. Непрерывность решений по параметру. Будем предполагать всюду далее, что выполнено

Предположение $\mathcal{E}$. *Предельная однородная краевая задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0), \qquad \sum_{j=1}^{k} B_j(0)y(a_j;0) = 0$$

имеет только тривиальное решение.

Это условие равносильно тому, что неоднородная предельная краевая задача (1), (2) имеет ровно одно решение при любых значениях правых частей $f(\cdot;0) \in (W_n^p)^m$ и $c_0 \in \mathbb{C}^m$.

Основным результатом этого пункта является

Теорема 1. *Пусть при $\varepsilon \to 0+$ справедливы условия:*

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{n-1,p} \to 0$;

2) $\|f(\cdot;\varepsilon) - f(\cdot;0)\|_{n-1,p} \to 0$;

3) $c_\varepsilon \to c_0$;

4) $\|B_j(\varepsilon) - B_j(0)\| \to 0$, $j = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Тогда при достаточно малых ε задачи (1), (2) *имеют единственное решение и*

$$\|y(\cdot;\varepsilon) - y(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0, \qquad \varepsilon \to 0+.$$

При $n = 1$, $p = 1$ данное утверждение установлено ранее в работе [10].

3. Матрицы Грина. Рассмотрим теперь полуоднородную многоточечную краевую задачу

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t), \qquad t \in (a, b), \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j y(a_j) = 0, \tag{4}$$

где матрица-функция $A(\cdot) \in (W_p^{n-1})^{m\times m}$, вектор-функция $f(\cdot) \in (W_p^{n-1})^m$, матрицы $B_j \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

Предположим, что для нее выполнено условие единственности $\mathcal{E}$.

Матрицей Грина полуоднородной задачи (3), (4) будем называть матричную функцию $G(t,s)$ такую, что для каждого $t \in (a,b)$ функция

$$G(t,\cdot) \in L_q([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}), \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

и с помощью которой решение задачи (3), (4) представляется в виде

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\,ds, \qquad t \in (a,b),$$

для каждой вектор-функции $f(\cdot) \in (W_p^{n-1})^m$.

Эта матрица Грина определяется, вообще говоря, неоднозначно.

Пусть далее $Y(t)$ — единственное решение матричного дифференциального уравнения

$$Y'(t) = A(t)Y(t),$$

с начальным условием

$$Y(a) = I_m,$$

где I_m — единичная $(m \times m)$-матрица.

Теорема 2. *Условие единственности* $\mathcal{E}$ *решения задачи* (3), (4) *равносильно тому, что*

$$\det\left[B_1 + \sum_{j=2}^{k} B_j Y(a_j)\right] \neq 0.$$

Если оно выполнено, то существует матрица Грина $G(t,s)$ *полуоднородной многоточечной краевой задачи* (3), (4), *которая имеет следующее представление:*

$$G(t,s) = \begin{cases} -Y(t)\left[B_1 + \sum_{j=2}^{k} B_j Y(a_j)\right]^{-1} Z(s), & t \leqslant s; \\ Y(t)Y^{-1}(s) - Y(t)\left[B_1 + \sum_{j=2}^{k} B_j Y(a_j)\right]^{-1} Z(s), & s < t. \end{cases} \qquad (5)$$

где

$$Z(s) = \sum_{j: a_j \leqslant s} B_j Y(a_j) Y^{-1}(s).$$

Такую матрицу Грина будем называть *нормированной.* Она определяется однозначно.

Следствие. *Нормированная матрица Грина* $G(t,s)$ *является разрывной функцией на диагонали* $s = t$, *а при* $k \geqslant 3$ *и на отрезках* $s = a_j$, $j = \{2, \ldots, k-1\}$.

4. Зависимость нормированной матрицы Грина от параметра. Для семейства полуоднородных многоточечных краевых задач

$$y'(t;\varepsilon) = A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon) + f(t;\varepsilon), \qquad t \in [a,b], \varepsilon \in [0,\varepsilon_0],$$

$$\sum_{j=1}^{k} B_j(\varepsilon) Y(a_j;\varepsilon) = 0,$$

нормированная матрица Грина будет зависеть от параметра ε. Поэтому интересным для исследования является вопрос о непрерывности по ε матричной функции $G(t,s;\varepsilon)$.

Обозначим через $\mathcal{M}^m$ класс всех семейств комплекснозначных $(m\times m)$-матриц-функций

$$R(\cdot;\varepsilon)\colon [0,\varepsilon_0] \to (L_1)^{m\times m},$$

для которых матричное решение $Z(t;\varepsilon)$ задачи Коши

$$Z'(t;\varepsilon) = R(t;\varepsilon)Z(t;\varepsilon), \qquad Z(a;\varepsilon) \equiv I_m$$

удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \|Z(t;\varepsilon) - I_m\|_\infty = 0.$$

В работах [4, 5, 8, 10] найдены необходимые и достаточные условия того, что матричная функция $R(t;\varepsilon) \in \mathcal{M}^m$ при выполнении различных *дополнительных* предположений. Сформулируем их.

Пусть для матрицы-функции $R(\cdot) \in (L_1)^{m\times m}$

$$R^{\vee}(t) := \int\limits_a^t R(s)\,ds,$$

тогда верно (см. [5, 6])

Утверждение 1. *Если при $\varepsilon \to 0+$ выполнено любое из четырех условий:*

(α) $\|R(\cdot;\varepsilon)\|_1 = O(1)$;

(β) $\|R^{\vee}(\cdot;\varepsilon)R(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0$;

(γ) $\|R(\cdot;\varepsilon)R^{\vee}(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0$;

(Δ) $\|R^{\vee}(\cdot;\varepsilon)R(\cdot;\varepsilon) - R(\cdot;\varepsilon)R^{\vee}(\cdot;\varepsilon)\|_1 \to 0$,

то условие

$$R(t;\varepsilon) := A(t;\varepsilon) - A(t;0) \in \mathcal{M}^m$$

эквивалентно соотношению

$$\|R^{\vee}(\cdot;\varepsilon)\|_\infty \to 0, \qquad \varepsilon \to 0+.$$

Пользуясь теоремой 2 и утверждением 1, можно показать, что верна

Теорема 3. *Пусть*

$$\det\left[B_1(0) + \sum_{j=2}^{k} B_j(0)Y(a_j)(0)\right] \neq 0,$$

и при $\varepsilon \to 0+$ выполняются условия:

1) $A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0) \in \mathcal{M}^m$;

2) $\|B_j(\varepsilon) - B_j(0)\| \to 0$, $j = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Тогда для достаточно малых ε существуют нормированные матрицы Грина рассмотренных задач и на открытом множестве $(a,b)\times(a,b)$

$$\|G(\cdot,\cdot;\varepsilon) - G(\cdot,\cdot;0)\|_\infty \to 0, \qquad \varepsilon \to 0+.$$

Уточнением теоремы 3 является

Теорема 4. *Пусть*

$$\det\left[B_1(0) + \sum_{j=2}^{k} B_j(0)Y(a_j)(0)\right] \neq 0$$

и при $\varepsilon \to 0+$ выполняются условия:

1) $\|A(\cdot;\varepsilon) - A(\cdot;0)\|_{n-1,p} \to 0$;

2) $\|B_j(\varepsilon) - B_j(0)\| \to 0,\ j = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Тогда для достаточно малых ε существуют нормированные матрицы Грина рассмотренных задач и на каждом из $k-1$ прямоугольников $(a, b) \times (a_j, a_{j+1})$

$$\|G(\cdot, \cdot; \varepsilon) - G(\cdot, \cdot; 0)\|_{n,p} \to 0, \qquad \varepsilon \to 0+.$$

Исследование выполнено при поддержке российско-украинского гранта НАН Украины 01/01-12.

1. *Cole R. H.* General boundary conditions for an ordinary linear differential system // Trans. Amer. Math. Soc. – 1964. – **111**. – P. 521–550.
2. *Bryan R. N.* A linear differential system with general linear boundary conditions // J. Different. Equat. – 1969. – **5**. – P. 38–48.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1965. – 703 с.
4. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Соврем. проблемы математики. Новейшие достижения. – Москва: ВИНИТИ, 1987. – Т. 30. – С. 3–103.
5. *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 4. – С. 774–777.
6. *Левин А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I // Вестн. Ярослав. ун-та. – 1973. – Вып. 5. – С. 105–132.
7. *Левин А. Ю.* О многоточечной краевой задаче // Науч. докл. высш. школы. – 1985. – № 5. – С. 34–37.
8. *Левин А. Ю.* О дифференциальных свойствах функции Грина многоточечной краевой задачи // Докл. АН СССР. – 1961. – **136**, № 5. – С. 1022–1025.
9. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач / Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 227–239.
10. *Рева Н. В.* Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач: Дис. … канд. фіз.-мат. наук / Ін-т математики НАН України. – Київ, 2009. – 148 с.

Институт математики НАН Украины, Киев *Поступило в редакцию 23.05.2012*

Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлець

Багатоточкові крайові задачі з параметром в просторах Соболєва

Знайдено достатні умови неперервності за параметром розв'язків багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку за нормами соболєвських просторів $(W_p^n)^m$, де $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$. Аналогічні результати отримано для матриць Гріна розглянутих задач.

T. I. Kodliuk, V. A. Mikhailets

Multipoint boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces

Sufficient conditions are found for the continuous dependence of the solutions of multipoint boundary-value problems on a parameter for systems of first-order linear differential equations with respect to the norms of Sobolev spaces $(W_p^n)^m$, $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$. The similar results for Green's matrices are found.