КОМПЬЮТЕРНАЯ
МАТЕМАТИКА

Досліджено деякі властивості векторних лексикографічних задач оптимізації. Встановлені необхідні та достатні умови існування й оптимальності лексикографічних розв'язків. Обгрунтовано зведення початкової задачі до скалярної з функціоналом, що є згорткою часткових критеріїв та описано метод знаходження коефіцієнтів цієї згортки для лексикографічних задач квадратичної оптимізації.

УДК 519.8

М.М. ЛОМАГА, В.В. СЕМЕНОВ

КВАДРАТИЧНІ ЗАДАЧІ ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ: ВЛАСТИВОСТІ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ

Вступ. Векторні задачі оптимізації виникають при дослідженні багатьох теоретичних і прикладних проблем. Практично будь-яка задача оптимального проектування складних економічних і технічних систем, складання мережевих графіків, планування й управління виробничою і комерційною діяльністю та ін. вимагає, щоб шуканий розв'язок знаходився з урахуванням багатьох критеріїв [1, 2]. У ря-ді випадків часткові критерії можуть бути впорядковані за важливістю, коли слід прагнути до поліпшення більш важливого крите-рію за рахунок будь-яких втрат за всіма іншими менш важливими [3]. У цьому разі розв'язок є узагальненням поняття точки максимуму (мінімуму) числової функції на випадок декількох функцій при лексикографічному відношенні переваги. Властивостям і методам пошуку лексикографічно опти-мальних розв'язків присвячено ряд робіт, зокрема, [1 – 5]. Квадратичні задачі мають широку область застосувань. Питання розв'язання квадратичних задач лексикографічної оптимізації займають важливе місце при вирішенні проблем математичної економіки, теорії ігр, оптимального керування, статистичних рішень та інших наукових дисциплін, в яких вивчаються різні багатокритеріальні моделі прийняття раціональних рішень. Дана робота присвячена дослідженню властивостей векторних лексикографічних задач оптимізації, встановленню необхідних і достатніх умов існування та оптимальності лексикографічних розв'язків, зведенню розв'язання початкової задачі до однокритеріальної шляхом подання лексикографічного відношення за допомогою одного функціоналу, що являє собою згортку часткових критеріїв, та відшукання коефіцієнтів цієї згортки для лексикографічної задачі квадратичної оптимізації.

Розглянемо лексикографічну задачу оптимізації $\max^L\left\{F(x), x\in X\right\}$, всі часткові критерії $f_i(x), i=1,2,\ldots,l$ якої утворюють векторний критерій $F(x)=\left\{f_1(x), f_2(x),\ldots, f_l(x)\right\}$ і упорядковані за важливістю. Таким чином при порівнянні пари альтернатив із множини X всіх допустимих альтернатив, у першу чергу використовується частковий критерій $f_1(x)$ і кращою вважається та альтернатива, для якої значення цього критерію більше; якщо значення першого критерію для обох альтернатив рівні, то застосовується другий частковий критерій і перевага віддається тій альтернативі, для якої його значення більше; якщо і за другим критерієм не вдається вибрати кращу альтернативу, то застосовується третій і т. д. до останнього $f_l(x)$. Якщо значення кожного часткового критерію для розглядуваних альтернатив рівні між собою, то ці альтернативи вважаються еквівалентними у розумінні векторного критерію $F(x)$. Формально лексикографічне відношення переваги задається наступним чином: допустима альтернатива $x\in X$ лексикографічно більша за допустиму альтернативу $y\in X$ (позначається: $x >^L y$), якщо виконується одна з умов

$$1)\ f_1(x)>f_1(y);\ 2)\ f_1(x)=f_1(y),\ f_2(x)>f_2(y);\ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$r)\ f_i(x)=f_i(y), i=1,2,\ldots,r-1,\ f_r(x)>f_r(y);\quad \ldots\ldots\ldots,$$

$$l)\ f_i(x)=f_i(y),\ i=1,2,\ldots,l-1,\ f_l(x)>f_l(y). \tag{1}$$

Означення 1. Вектор $z\in R^l$ називається лексикографічно додатним, якщо перша його ненульова компонента в порядку зростання індексів компонент додатна. Позначатимемо лексикографічну додатність вектора $z\in R^l$ так: $z >^L 0$.

Означення 2. Альтернативу $x^*\in X$ називатимемо лексикографічно оптимальною, якщо вона не гірша за будь-яку іншу допустиму альтернативу y у розумінні відношення $\geq^L$, тобто якщо $F\left(x^*\right)-F(y)\geq^L 0$.

У лексикографічній задачі оптимізації досягають як завгодно малого приросту більш важливого критерію за рахунок будь-яких втрат за іншим менш важливим критерієм.

Якщо в означенні 2 замість X підставити $X\cap O(\bar{x})$, де $O(\bar{x})$ – деякий окіл точки $\bar{x}$, то лексикографічно оптимальну точку $\bar{x}$ називатимемо відповідно локально лексикографічно оптимальним розв’язком.

Властивості множини лексикографічних оптимумів. Позначимо X^* − множину всіх лексикографічно оптимальних альтернатив. Множина X^* має наступні властивості: 1) всі альтернативи множини X^* еквівалентні між собою; 2) множину X^* можна задати за допомогою таких рекурентних співвідношень:

$$X_i^* = \left\{ x : x \in X_{i-1}^*;\ f_i(x) = \sup_{y \in X_{i-1}^*} f_i(y) = f_i^* \right\},\ i = 1, 2, \ldots, l,\ X_0^* = X,\ X_l^* = X^*; \quad (2)$$

3) $X^* \subseteq X_{l-1}^* \subseteq \ldots \subseteq X_1^* \subseteq X$.

У загальному випадку множина X^* може бути порожньою. В однокритеріальних задачах зі скалярним критерієм f оптимальна альтернатива може не існувати, тоді розв'язком задачі є максимізуюча послідовність $\left\{x^k\right\} \subseteq X$, яка визначається умовою $\lim\limits_{k \to \infty} f\left(x^k\right) = \sup\limits_{x \in X} f(x)$. Поняття максимізуючої послідовності для задач лексикографічної оптимізації вводиться таким чином. Нехай множини $X_i^* = \varnothing$, починаючи з деякого $i = p \geq 1$.

Означення 3. Послідовність альтернатив $\left\{x^k\right\}$ називається лексикографічно максимізуючою, якщо для всіх достатньо великих номерів k альтернативи x^k входять у множину X_{i-1}^* (так що при $p > 1$ $f_i\left(x^k\right) = f_i^*\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, p-1$) і $\lim\limits_{k \to \infty} f_p\left(x^k\right) = f_p^*$. Якщо множина $X^* \neq \varnothing$, то лексикографічно максимізуючою називається послідовність $\left\{x^k\right\}$, всі члени якої, за винятком, можливо скінченого їх числа, є елементами множини X_{l-1}^* і для якої $\lim\limits_{k \to \infty} f_l\left(x^k\right) = f_l^*$. У випадку, коли не існує оптимальної альтернативи, точну верхню (лексикографічну) межу критерію F, яку позначатимемо F^*, теж можна визначити за допомогою співвідношень (2), оскільки для порожньої множини X_{i-1}^* $\sup\limits_{x \in X_{i-1}^*} f_i(x) = -\infty$. Отже, в загальному випадку компонентами вектора F^* можуть бути $-\infty$ та $+\infty$. Таким чином, лексикографічна задача оптимізації полягає у відшуканні лексикографічно оптимальних альтернатив чи лексикографічно максимізуючих послідовностей альтернатив.

У квадратичній задачі лексикографічної оптимізації існують лексикографічно оптимальні альтернативи, якщо множина допустимих альтернатив скінчена. Тоді й усі множини X_i^*, $i = 1, 2, \ldots, l$, теж скінчені і непорожні. Задача лексикографічної оптимізації матиме єдиний розв'язок, якщо деякий критерій f_k досягає максимуму на X_{k-1}^* в одній точці.

Еквівалентні трансформації критеріїв квадратичних задач лексикографічної оптимізації. Теоретичний та практичний інтерес представляє питання можливості перетворення векторного критерію лексикографічної задачі, при якому зберігається множина лексикографічно оптимальних розв'язків.

Твердження 1. Нехай функція g, визначена на множині $Y_k = \{ f_k(x) | x \in X \}$ значень часткового критерію f_k, є строго зростаючою, тоді векторні критерії $F = (f_1, f_2, \ldots, f_l)$ і $F' = (f_1, \ldots, f_{k-1}, g(f_k), f_{k+1}, \ldots, f_l)$ лексикографічно еквівалентні, тобто множини оптимальних альтернатив, що визначаються цими критеріями, рівні між собою.

Доведення. Покажемо, що для будь-яких альтернатив $x, z \in X$ $F(x) >^L F(z)$ тоді й тільки тоді, коли $F'(x) >^L F'(z)$.

Необхідність. Нехай для будь-яких альтернатив $x,\ z \in X$ виконується умова $F(x) >^L F(z)$. Отже, має місце одна з умов (2). Якщо функція g – строго зростаюча, то має місце або $g(f_i(x)) = g(f_i(z))$ при $f_i(x) = f_i(z)$, або $g(f_i(x)) > g(f_i(z))$ при $f_i(x) > f_i(z)$. Отже, $F'(x) >^L F'(z)$.

Достатність. Якщо $F'(x) >^L F'(z)$, то $F(x) >^L F(z)$.

Це твердження дозволяє будувати для розглядуваної задачі нові векторні критерії, лексикографічно еквівалентні вхідному, але більш зручні в обчислювальному відношенні.

Наслідок 1. Якщо всі числа $c_k > 0, d_k - \text{const}, k = 1,\ldots,l,$ то критерії F і $(c_1 f_1 + d_1, \ldots, c_l f_l + d_l)$ лексикографічно еквівалентні.

Наслідок 2. Частковий критерій f_k можна замінити на будь-який з критеріїв a^{f_k}, $(f_k)^b$, d^{-f_k} ($a > 1$, $b > 0$ − непарне число, $0 < d < 1$), оскільки при таких умовах функції a^x, x^b і d^{-x} є строго зростаючими на $(-\infty, +\infty)$.

Наслідок 3. Якщо f_k приймає лише додатні значення на X, то замість нього можна взяти $(f_k)^\alpha$ $(\alpha > 0)$, $-1/ f_k$ або $\log_\beta f_k$ $(\beta > 1)$, оскільки функції x^α, $-1/x$ і $\log_\beta x$ строго зростають на $(0, +\infty)$.

Наслідок 4. Нехай $X \subseteq R^n$ − опукла множина, а ϕ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ − визначені на X угнуті додатні функції. Критерій $f_k = \prod_{i=1}^{m} \phi_i$ не є угнутою функцією, але від нього можна перейти до угнутого критерію $f_k' = \ln f_k = \sum_{i=1}^{m} \ln \phi_i$.

Наслідок 5. Критерій $f_k = e^{g(x)}$ ($g(x)$ − додатна угнута функція), що не є угнутою функцією, можна замінити угнутим критерієм $f_k' = \ln f_k = g(x)$.

Твердження 2. Якщо η − довільна функція, визначена на множині значень векторного критерію $Y = F(X) = \left\{ y : y \in R^l ; y = F(x), x \in X \right\}$, то критерії F і $F' = \left(f_1, f_2, \ldots, f_l, \eta\left(f_1, f_2, \ldots, f_l \right) \right)$ лексикографічно еквівалентні.

Доведення. Нехай $F(x) >^L F(z)$. Тоді за означенням $F'(x) >^L F'(z)$. Нехай тепер $F'(x) >^L F'(z)$. Отже, виконуються умови (1) і також умова (l+1) $f_i(x) = f_i(y)$, $i = 1, \ldots, l$, $\eta\left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x) \right) > \eta\left(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_l(z) \right)$.

Звідси випливає, що $F(x) >^L F(z)$.

Властивості квадратичних задач лексикографічної оптимізації. Розглянемо задачу лексикографічної оптимізації:

$$\max{}^L \left\{ F(x) \mid x \in X = \left\{ x \in R^n \mid Ax \le b,\, x \ge 0 \right\} \right\}, \qquad (3)$$

де $f_i(x) = x^T C_i x + d_i^T x$, $i = 1, 2, \ldots, l$, де $C_i \in R^{n \times n}$ − симетричні матриці, $d_i \in R^n$, $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $X \ne \varnothing$.

Теорема 1. Задача (3) має скінченний лексикографічно оптимальний розв'язок, якщо хоча б одна з функцій векторного критерію є строго угнутою.

Доведення. Припустимо, що перший частковий критерій $f_1(x)$ векторного критерію строго угнутий. Позначимо $G(\rho)$ − гіперсфера радіуса ρ з центром у початку координат, G − гіперсфера одиничного радіуса з тим же центром. Тоді будь-який $x \in G(\rho)$ можна представити у вигляді $x = \rho r$, де $r \in G$. Квадратична форма $r^T C_1 r$ досягає на G максимуму. Позначимо r_1^0 точку максимуму виразу $r^T C_1 r$. З умови теореми випливає, що $\forall r \in G \quad r^T C_1 r < 0 \quad \Rightarrow$ $\Rightarrow \quad r_1^{0T} C_1 r_1^0 = z_1 < 0.$ Нехай $x^T C_1 x = \sigma^2 r^T C_1 r, \quad r \in G \ \Rightarrow \ x^T C_1 x \le \sigma^2 z < 0.$ $\forall x \in G(\sigma)$. Отже, при $|x| \to \infty \quad x^T C_1 x \to -\infty$. Нехай $x \ne 0$. Перепишемо функцію $f_1(x)$ у вигляді $f_1(x) = x^T C_1 x \left(1 + \dfrac{d_1^T x}{x^T C_1 x} \right)$. Вираз $\left| \dfrac{d_1^T r}{r^T C_1 r} \right|$ досягатиме максимуму на G в точці $\bar{z}_1$. $\left| \dfrac{d_1^T x}{x^T C_1 x} \right| = \dfrac{1}{\sigma} \left| \dfrac{d_1^T r}{r^T C_1 r} \right| \le \dfrac{1}{\sigma} \left| \dfrac{d_1^T \bar{z}_1}{\bar{z}_1^T C_1 \bar{z}_1} \right|$. Звідси отримуємо, що при $|x| \to \infty \quad \dfrac{d_i^T x}{x^T C_i x} \to 0$, $\quad f_1(x) = x^T C_1 x + d_1^T x \to -\infty$. Отже, векторна функція $f_1(x)$ є обмеженою зверху, тоді за схемою скаляризації задача $\max\{f_1(x) \mid x \in X\}$ має єдиний розв'язок. Нехай тепер строго угнутим є k-й частковий критерій, $2 \le k \le l$. Відповідно єдину оптимальну альтернативу отримуємо, розв'язуючи задачу $\max\{f_k(x) \mid x \in X,\ f_i(x) = f_i^*, i = 1 \ldots k-1\}$ за схемою скаляризації. Тоді задача (3) матиме скінченний розв'язок, що й треба було довести.

Наслідок 6. Якщо хоча б один з часткових критеріїв задачі (3) є строго угнутий, то множина лексикографічних оптимумів містить єдиний елемент $(|L| = 1)$.

Подання лексикографічного відношення за допомогою одного функціоналу. Розв'язки лексикографічної задачі оптимізаціїї можна відшукати за схемою скаляризації: 1-й крок. Розв'язується задача (P_1): $\max\{f_1(x) \mid x \in X\}$.

Якщо вона не має оптимального розв'язку, то задача (3) теж не має оптимального розв'язку. Якщо (P_1) має оптимальний розв'язок (f_1^* − максимум функції f_1 на X), то переходимо до 2-го кроку. Опишемо k-й крок ($2 \le k \le l$). Розв'язується задача (P_k): $\max\left\{f_k(x) \mid X_{i-1} = \left\{x \in X,\ f_i(x) = f_i^*, i = 1, 2, \ldots, k-1\right\}\right\}$. Якщо вона не має оптимального розв'язку, то задача (3) теж не має оптимального розв'язку. Нехай задача (P_k) має оптимальний розв'язок (f_i^* − максимум функції f_i на X_{i-1}). Якщо $k < l$, то переходимо до ($k+1$)-го кроку. Якщо $k = l$, то обчислений покомпонентно вектор $\left(f_1^*, f_2^*, \ldots, f_l^*\right)$ є лексикографічним максимумом векторної функції F на X, а множина оптимальних розв'язків X_k задачі (P_k) – це множина оптимальних розв'язків задачі (3).

Цей багатоетапний спосіб дозволяє знаходити лексикографічно оптимальні альтернативи, але він є складним, оскільки приходиться розв'язувати l задач оптимізації, що досить обтяжливо. Крім того, приєднання обмежень $f_k(x) = f_k^*$ до задачі (3) призводить до втрати задачею специфічних особливостей і як наслідок неможливості застостосування ефективних обчислювальних алгоритмів.

Постає питання про можливість одноетапного розв'язання лексикографічної задачі, тобто зведення її до однокритеріальної, що пов'язано з проблемою представлення лексикографічного відношення за допомогою одного функціоналу.

Питання про побудову функціоналу Φ, визначеного на множині X, що дозволяє представити лексикографічне відношення, який має властивість:

$$\forall\ x, y \in X \quad \Phi(x) \ge \Phi(y) \text{ тоді й тільки тоді, коли } x \ge^L y, \tag{4}$$

має велике теоретичне і практичне значення. Якщо x^* − лексикографічно оптимальна альтернатива, то на ній досягає найбільшого значення функціонал Φ; справедливе і зворотне твердження: функціонал, що представляє лексикографічне відношення переваги, досягає найбільшого значення на множині оптимальних альтернатив $X^* = \left\{ x \mid x \in X, \Phi(x) = \max\limits_{y \in X} \Phi(y) \right\}$. Це означає, що відшукання лексикографічно оптимальних альтернатив зводиться до знаходження максимуму Φ на X.

У роботах [4, 5] розглядалися питання про побудову функціоналу. Доведено, що у випадку, коли множина альтернатив скінченна, питання про існування шуканого функціоналу вирішується просто. Достатньо спочатку розбити множину альтернатив на класи, що складаються з еквівалентних альтернатив, потім розташувати отримані класи відповідно до лексикографічного відношення переваги (тобто якщо $x \geq^L y$, то клас альтернатив, еквівалентних альтернативі y, має стояти перед класом альтернатив, еквівалентних альтернативі x), послідовно перенумерувати класи відповідно до встановленого розташування (номер 1 буде мати перший, або молодший за порядком клас, а номер n, де n − число класів, буде надано останньому, старшому класу − множині X^*) і, нарешті, визначити на X функціонала Φ, поклавши для альтернативи x значення $\Phi(x)$ рівним номеру класу, в який входить x. Проведені міркування доводять існування шуканого Φ, однак практично побудувати таким способом функціонал Φ не можна, оскільки описана процедура має надмірну трудомісткість.

Виявляється, що існує досить простий і зручний для практичної реалізації спосіб побудови функціоналу, що представляє лексикографічне відношення переваги, якщо шукати його у вигляді $\Phi = L = \sum_{r=1}^{l} \alpha_r f_r$.

Зрозуміло, що для побудови функціоналу Φ потрібно вміти вибирати коефіцієнти α_r. З'ясуємо, як можна призначити ці коефіцієнти, щоб функціонал L мав властивість (4). Якщо $x \Leftrightarrow y$, тобто, якщо $F(x) = F(y)$, то $L(x) = L(y)$. Функціонал L дозволяє представити лексикографічне відношення на X, якщо має таку властивість:

$$\forall\, x,\ y:\ x >^L y, \text{ то } L(x) > L(y). \tag{5}$$

Властивість (5) можна записати таким чином. Для будь-яких $x, y \in X$, якщо:
1) $f_1(x) > f_1(y)$, то $L(x) > L(y)$; 2) $f_1(x) = f_1(y)$, $f_2(x) > f_2(y)$, то $L(x) > L(y)$;
.....…………

$$r)\ f_i(x) = f_i(y), i = 1,2,\ldots, r-1,\ f_r(x) > f_r(y), \text{ то } L(x) > L(y);\ldots\ldots\ldots \tag{6}$$

$l)$ $f_i(x) = f_i(y)$, $i = 1,2,\ldots, l-1$, $f_l(x) > f_l(y)$, то $L(x) > L(y)$.

Для виконання вимоги $l)$ потрібно лише, щоб коефіцієнт α_l був додатній. Конкретний вибір α_l, як це видно з подальшого, слід здійснити з міркувань зручності практичного застосування функціоналу L. Припустимо, що вже вибрані додатні коефіцієнти α_{r+1}, $\alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_l$, так, що виконуються вимоги пунктів: $r+1)$, $r+2)$, …, $l)$ із (6). З'ясуємо, як слід вибрати коефіцієнт α_r, щоб забезпечити виконання вимоги $r)$ для критерію *L*.

Для критерію Φ цю вимогу можна записати таким чином: $\forall\, x, y \in X$ $f_i(x) = f_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$, $f_r(x) > f_r(y)$, отже $\sum_{i=r}^{l} \alpha_i f_i(x) > \sum_{i=r}^{l} \alpha_i f_i(y)$.

Призначимо коефіцієнт α_r, щоб виконувалася умова, сильніша, ніж попередня: $\forall\, x, y \in X : f_r(x) > f_r(y)$ має виконуватися нерівність $\alpha_r \left[f_r(x) - f_r(y) \right] > \sum_{i=r+1}^{l} \alpha_i \left[f_i(y) - f_i(x) \right]$.

Якщо f_r – стала на X, тобто $\overline{\exists}\, x, y \in X$, для яких $f_r(x) > f_r(y)$, то за α_r можна вибрати будь-яке число. Розглянемо випадок, коли f_r на X не є сталою. Легко бачити, що для виконання останньої умови досить узяти $\alpha_r > w_r$, де

$$w_r = \max_{\substack{x, y \in X \\ f_r(x) > f_r(y)}} \frac{\sum_{i=r+1}^{l} \alpha_i \left[f_i(y) - f_i(x) \right]}{f_r(x) - f_r(y)}.$$

У багатьох задачах знайти величину w_r важко. Тому оцінимо її зверху:

$$w_{rr} \le \max_{\substack{x, y \in X \\ f_r(x) \ne f_r(y)}} \frac{\sum_{i=r+1}^{l} \alpha_i \left[f_i(y) - f_i(x) \right]}{f_r(x) - f_r(y)} \le \frac{\max\limits_{x, y \in X} \sum_{i=r+1}^{l} \alpha_i \left[f_i(y) - f_i(x) \right]}{\min\limits_{\substack{x, y \in X \\ f_r(x) \ne f_r(y)}} \left| f_r(x) - f_r(y) \right|} \le \frac{\sum_{i=r+1}^{l} \alpha_i M_i}{\mu_r},$$

де

$$0 < \mu_r \le \inf_{\substack{x, y \in X \\ f_r(x) \ne f_r(y)}} \left| f_r(x) - f_r(y) \right|; \quad M_i \ge \max_{x \in X} f_i(u) - \min_{x \in X} f_i(u).$$

Таким чином, для виконання умови $r)$ достатньо, щоб

$$\alpha_r > \left(\sum_{i=r+1}^{l} \alpha_i M_i \right) / \mu_r. \tag{7}$$

Описаний спосіб побудови шуканого функціоналу досить зручний, оскільки вибрати величини μ_r і M_r порівняно легко вдається майже для будь-якої практичної задачі. Зазначимо, що описаний підхід до побудови функціоналу підходить і в тому випадку, коли скінченна не сама множина альтернатив X, а лише множина значень векторного критерію (достатньо навіть скінченності множин лише перших $l-1$ часткових критеріїв, а f_l був обмеженим).

Теорема 2 [5]. Якщо множина значень векторного критерію скінченна, то можна побудувати функціонал L, що представляє лексикографічне відношення переваги таким чином: досить узяти довільний коефіцієнт $\alpha_l > 0$, а решті коефіцієнтів α_{l-1}, …, α_1 послідовно надати значення відповідно до (7).

Для вирішення питання про можливість зведення лексикографічної задачі до однієї задачі оптимізації з функціоналом Φ, що задовольняє (4), доцільно ознайомитися з деякими властивостями ефективних альтернатив.

Відшукання коефіцієнтів згортки в лексикографічній задачі квадратичної оптимізації. Розглянемо лексикографічну задачу квадратичної оптимізації вигляду (3), задану на опуклому многограннику $X \subseteq R^n$. Тут $C_i \in R^{n \times n}$ − симетричні невід'ємно визначені матриці, тобто функції критеріїв є опуклими. Множину вершин многогранника позначимо X^V, отже X − опукла оболонка множини X^V. Розглянемо задачу

$$P(\Phi):\ \max\left\{\Phi(x) \mid x \in X\right\},\ \text{де}\ \Phi = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i f_i(x),\ \alpha_l > 0,$$

$$\alpha_k > \frac{1}{\mu_k} \sum_{i=k+1}^{l} \alpha_i (M - m),\ 0 < \mu_k \le \inf_{\substack{x, y \in X^V \\ f_k(x) \ne f_k(y)}} \left| f_k(x) - f_k(y) \right|,\ k = 1, 2, \ldots, l-1,$$

$$M = \max\left\{ f_i(x) \mid i = 1, 2, \ldots, l,\ x \in X^V \right\},\ m = \min\left\{ f_i(x) \mid i = 1, 2, \ldots, l,\ x \in X \right\}.$$

Теорема 3. Якщо X − обмежений многогранник, то розв'язок задачі $P(\Phi)$ є розв'язком задачі (3).

Таким чином для розв'язання задачі (3) можна застосовувати методи максимізації опуклої функції на многограннику, наприклад [6, 7].

Висновки. Досліджено деякі властивості векторних лексикографічних задач оптимізації. Встановлені необхідні та достатні умови існування й оптимальності лексикографічних розв'язків. Обґрунтовано зведення початкової задачі до скалярної з функціоналом, що є згорткою часткових критеріїв та описано метод знаходження коефіцієнтів цього функціоналу для лексикографічних задач квадратичної оптимізації. Для розв'язання лексикографічної задачі квадратичної оптимізації можна застосовувати розроблені методи максимізації опуклої функції на многограннику.

М.М. Ломага, В.В. Семенов

КВАДРАТИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ: СВОЙСТВА И РЕШЕНИЯ

Исследованы некоторые свойства векторных лексикографических задач оптимизации. Получены необходимые и достаточные условия существования и оптимальности лексикографических решений. Обосновано сведение исходной задачи к скалярной с функционалом, который является сверткой частичных критериев. Описан метод нахождения коэффициентов этого функционала для лексикографических задач квадратичной оптимизации.

M.M. Lomaga, V.V. Semenov

QUADRATIC PROBLEMS OF LEXICOGRAPHIC OPTIMIZATION:
PROPERTIES AND SOLVING

Some properties of vectorial lexicographic problems of optimization are explored. The necessary and sufficient conditions of existence and optimality of lexicographic decisions are got. Taking of initial problem is grounded to scalar with functional which is rolling up of partial criteria. The method for finding of coefficients of this functional is described for the lexicographic problems of quadratic optimization.

1. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 255 с.
2. *Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М.* Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. – К.: Наук. думка, 2009. – 266 с.
3. *Червак Ю.Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір. – Ужгород: Ужгородський національний університет, 2002. – 312 с.
4. *Еремин И.И.* Теория линейной оптимизации. − Екатеринбург: УрО РАН, 1999. − 312 с.
5. *Подиновский В.В., Гаврилов В.М.* Оптимизация по последовательно применяемым критериям. – М.: Сов. радио, 1975. – 192 с.
6. *Кузка О.І., Ломага М.М.* Про один підхід до розв'язання задачі максимізації опуклої функції на многограннику // Науковий вісник Ужгородського університету. – 2011. – № 2. – С. 76–80.
7. *Стрекаловский А.С.* Элементы невыпуклой оптимизации. – Новосибирск: Наука, 2003. – 356 с.

Одержано 20.06.2013

Про авторів:

Ломага Марія Михайлівна,
асистент Ужгородського національного університету,
E-mail: lomagamarija@yandex.ua

Семенов Віктор Вікторович,
молодший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.
E-mail: hunt.semen@gmail.com