КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Системный анализ

Розглядається нелінійна модель регресії «сигнал плюс шум», де функція регресії – майже періодична, а випадковий шум заданий функціоналом від гауссівського стаціонарного процесу із сильною залежністю. Досліджено періодограмні оцінки невідомих параметрів функції у заданій моделі та доведено їх асимптотичну нормальність.

УДК 519.21

Г.Д. БІЛА

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ ПЕРІОДОГРАМНИХ ОЦІНОК У МОДЕЛЯХ ІЗ СИЛЬНОЗАЛЕЖНИМ ШУМОМ

Вступ. Зважаючи на широке застосування ви-падкових процесів та полів із слабкою та силь-ною залежністю, існує ряд важливих питань теорії ідентифікації параметрів моделей стоха-стичних систем, які раніше не розглядалися. Виділимо наукові роботи [1, 2], де за припу-щення слабкої залежності стаціонарного випадкового шуму детально досліджено асимптотичні властивості періодограмних оцінок невідомих параметрів гармонічного сигналу та у випадку майже періодичної функції регресії. За припущення сильної за-лежності періодограмні оцінки частоти та ам-плітуди гармонічних коливань вивчалися в [3].

Дослідження асимптотичних властивостей оцінок невідомих параметрів майжеперіо-дичної функції в нелінійній моделі регресії у випадку, коли шум є функціоналом від гаус-сівського стаціонарного процесу із сильною залежністю розпочате в [4], де доведено консистентність таких оцінок. У даній роботі доведено їх збіжність до нормального закону розподілу.

Нехай спостерігається випадковий процес:

$$y(t) = g\left(t,\theta^0\right) + \varepsilon(t),\ t \in [0,T],$$

де $g\left(t,\theta^0\right) = A_0\varphi(\omega_0 t) : \mathbb{R}^1 \times \Theta \to \mathbb{R}^1$ – вимірна функція, що залежить від невідомого пара-метра $\theta^0 \in \Theta$, $\theta^0 = (A_0, \omega_0)$, $A_0 > 0$, $\omega_0 > 0$, $\Theta \in \mathbb{R}^1$ – обмежений відкритий інтервал.

Зробимо деякі припущення:

A1. Нехай випадковий шум $\varepsilon(t) = G\left(n(t)\right)$, $t \in \mathbb{R}^1$, гауссівського стаціонарного процесу $n(t)$, причому $E\varepsilon(0) = 0$, $E\varepsilon^2(0) = 1$.

А2. $n(t), t \in \mathbb{R}^1$ – дійсний неперервний у середньому квадратичному вимірний стаціонарний гауссівський процес із сильною залежністю,

$$En(t) = 0, \;\; B(t) = \operatorname{cov}\left(n(0), n(t)\right) = \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{\alpha/2}}, \;\; t \in \mathbb{R}^1, \;\; 0 < \alpha < 1.$$

А3. Нелінійна борелівська функція $G: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ задовольняє умові

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(u)\varphi(u)\,du < \infty,$$

де $\varphi(u) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-u^2/2}, \; u \in \mathbb{R}^1$.

Функцію $G(u), \; u \in \mathbb{R}^1$ можна розкласти в ряд

$$G(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k!} H_k(u), \; C_k = \int_{-\infty}^{\infty} G(u) H_k(u) \varphi(u)\,du, \;\; k = 0,1,\ldots,$$

за ортогональними поліномами Чебишева – Ерміта

$$H_k(u) = (-1)^k e^{-u^2/2} \frac{d^k}{du^k} e^{-u^2/2}, \quad k = 0,1,\ldots,$$

у гільбертовому просторі L_2.

Нехай існує ціле число $m \geq 1$ таке, що $C_1 = \ldots = C_{m-1} = 0$, $C_m \neq 0$ – коефіцієнти у розкладі функції $G(u), \; u \in \mathbb{R}^1$ за поліномами Чебишева – Ерміта.

А4. Функція $\varphi(t)$ – майже періодична з функцій вигляду

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k t},$$

для якої

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_k\right| < \infty, \;\; \lambda_k \geq 0 \text{ при } k \geq 0,$$

$$c_k = \overline{c}_{-k}, \;\; \lambda_k = -\lambda_{-k}, \;\; \left|\lambda_l - \lambda_k\right| \geq \Delta > 0 \text{ при } l \neq k,$$

$$\left|c_{i_0}\right| > \left|c_i\right| \text{ при } i \neq \pm i_0, \;\; i_0 > 0.$$

Розглянемо функціонал

$$Q_T(\omega) = \left|\frac{2}{T}\int_0^T y(t) e^{i\omega t} dt\right|^2, \;\; \omega \geq 0.$$

Періодограмною оцінкою ω_T параметра ω_0 будемо називати те значення $\omega \geq 0$, за якого функціонал $Q_T(\omega)$ приймає найбільше значення на $[0, \infty)$. Оцінкою для A_0 може служити величина $A_T = Q_T^{1/2}\left(\omega_T\right)$.

Теорема 1 [4]. Нехай виконуються умови (А1) – (А4). Періодограмна оцінка $\tilde{\theta}_T = \left(\tilde{A}_T, \tilde{\omega}_T\right)$ – конзистентна оцінка параметра θ, а саме:

$$\tilde{A}_T \xrightarrow{P} A_0, \; T\left(\tilde{\omega}_T - \omega_0\right) \xrightarrow{P} 0,$$

де $\tilde{\omega}_T = \dfrac{\omega_T}{\lambda_{i_0}}$, $\tilde{A}_T = \dfrac{1}{2}\left|c_{i_0}\right|^{-1} Q_T^{1/2}\left(\omega_T\right)$, „$\xrightarrow{P}$” збіжність за ймовірністю при $T \to \infty$.

Розглянемо вектор функцій $a(t) = \left(a_1(t), a_2(t), \ldots, a_q(t)\right)'$, $t \ge 0$.

В1. Введемо сім'ю мір $\mu_T(d\lambda)$ на $\left(\mathbb{R}^1, B^1\right)$ зі щільностями:

$$\mu_T^{il}(d\lambda) = \left(a_T^j(\lambda)\overline{a_T^l(\lambda)}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|a_T^j(\lambda)\right|^2 d\lambda\right)^{-1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|a_T^l(\lambda)\right|^2 d\lambda\right)^{-1/2},$$

$$a_T^j(\lambda) = \int_0^T e^{i\lambda t} a_j(\lambda)\, d\lambda, \;\; j, l = \overline{1, q}.$$

Припустимо, що сім'я мір $\mu_T(d\lambda)$ слабко збігається, при $T \to \infty$ до міри $\mu(d\lambda)$, тобто для будь-якої неперервної обмеженої функції $b(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(\lambda)\mu_T(d\lambda) \to \int_{-\infty}^{+\infty} b(\lambda)\mu(d\lambda), \quad T \to \infty.$$

Міра $\mu(d\lambda)$ – монотонно неспадна й обмежена на $\mathbb{R}^1$ функція, що задається співвідношенням:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T a_i\left(t+|u|\right)a_j(t)\,dt}{\sqrt{\int_0^T a_i^2(t)\,dt}\sqrt{\int_0^T a_j^2(t)\,dt}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u}\mu_{ij}(d\lambda). \tag{1}$$

Тоді $\mu(d\lambda)$ називається спектральною мірою вектора $a(t)$, $t \ge 0$.

В2. Припустимо, що виконується нерівність $m\alpha > 1$, де α – параметр коваріаційної функції $B(t)$ процесу $n(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Нехай для $k \ge m$

$f^{k*}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f\left(\lambda - \lambda_2 - \ldots - \lambda_k\right)\prod_{i=2}^{k} f\left(\lambda_i\right) d\lambda_2 \ldots d\lambda_k$ – k-та згортка спектральної щільності $f(\lambda)$ випадкового процесу $n(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Зауважимо, що $B^k(\cdot) \in L_1\left(\mathbb{R}^1\right)$, $k \geq m$, тому всі $f^{k*}(\lambda)$, $k \geq m$ – неперервні обмежені функції.

Теорема 2. Нехай виконуються умови (A1) – (A4), (B1), (B2) і $f^{k*}\left(\lambda_{i_0}\omega_0\right) > 0$. Тоді випадкова величина $T^{3/2}\left(\omega_T - \lambda_{i_0}\omega_0\right)$ асимптотично нормальна з параметрами $\left(0,\ 2\pi A_0^{-2}\left|c_{i_0}\right|^{-2}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}f\left(\lambda_{i_0}\omega_0\right)\right)$.

Оскільки $\omega_T > 0$ з ймовірністю, що прямує до 1 при $T \to \infty$, то з такою ж ймовірністю точка $\omega = \omega_T$ є точкою локального екстремуму функції $Q_T(\omega)$ і, відповідно, задовольняє рівнянню

$$Q_T'\left(\omega_T\right) = 0.$$

Отже, при дослідженні асимптотичної поведінки оцінки ω_T можна обмежитися розглядом останнього рівняння.

Лема 1. Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді має місце представлення

$$T^{-1/2}\frac{\partial Q_T\left(\lambda_{i_0}\omega_0\right)}{\partial\omega} = \zeta_{T1} + \zeta_{T2}, \tag{2}$$

де ζ_{T1} – асимптотично нормальна випадкова величина з нульовим математичним сподіванням та дисперсією $\sigma^2 = \frac{16}{3}\pi A_0^2\left|c_{i_0}\right|^2\sum_{k=m}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}f^{k*}\left(\lambda_{i_0}\omega_0\right)$, а випадкова величина $\zeta_{T2} \to 0$ при $T \to \infty$ за ймовірністю.

*Доведення***.** Справедливий наступний вираз:

$$\frac{1}{T^{1/2}}\frac{\partial Q_T\left(\lambda_{i_0}\omega_0\right)}{\partial\omega} = \frac{4}{T^{5/2}}\frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\left[\int_0^T y(t)\cos(\omega t)\,dt\right]^2 + \left[\int_0^T y(t)\sin(\omega t)\,dt\right]^2\right\}_{\omega=\lambda_{i_0}\omega_0} =$$

$$= \frac{8}{T^{5/2}}\left\{-\int_0^T\left[g\left(t,\theta^0\right) + \varepsilon(t)\right]\cos\left(\lambda_{i_0}\omega_0 t\right)dt \times \int_0^T t\left[g\left(t,\theta^0\right) + \varepsilon(t)\right]\sin\left(\lambda_{i_0}\omega_0 t\right)dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^T\left[g\left(t,\theta^0\right) + \varepsilon(t)\right]\sin\left(\lambda_{i_0}\omega_0 t\right)dt \times \int_0^T t\left[g\left(t,\theta^0\right) + \varepsilon(t)\right]\cos\left(\lambda_{i_0}\omega_0 t\right)dt\right\}. \tag{3}$$

Провівши необхідні обчислення аналогічно до доведення леми 4 із [2], з (3) випливає представлення (2), де $\zeta_{T2} \to 0$, і

$$\zeta_{T1} = -4\frac{A_0}{T^{3/2}}\left(\left[c_{i_0} - c_{-i_0}\right]\int_0^T t\varepsilon(t)\sin\left(\lambda_{i_0}\omega_0 t\right)dt + \left[c_{-i_0} - c_{i_0}\right]\int_0^T t\varepsilon(t)\cos\left(\lambda_{i_0}\omega_0 t\right)dt\right) +$$

$$+ 2i\frac{A_0}{T^{1/2}}\left(\left[c_{-i_0} - c_{i_0}\right]\int_0^T \varepsilon(t)\cos\left(\lambda_{i_0}\omega_0 t\right)dt + \left[c_{i_0} + c_{-i_0}\right]\int_0^T \varepsilon(t)\sin\left(\lambda_{i_0}\omega_0 t\right)dt\right).$$

Позначимо

$$a_{i_0}=\frac{c_{i_0}+c_{-i_0}}{2},\quad b_{i_0}=\frac{c_{i_0}-c_{-i_0}}{2i},$$

$$a_T(t)=4A_0\left[b_{i_0}\cos\left(\lambda_{i_0}\omega_0 t\right)\left(1-\frac{2t}{T}\right)+a_{i_0}\sin\left(\lambda_{i_0}\omega_0 t\right)\left(1-\frac{2t}{T}\right)\right].$$

Таким чином, випадкову величину ζ_{T1} ми звели до вигляду

$$\zeta_{T1}=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T a_T(t)G\left(n(t)\right)dt,$$

що дозволяє застосувати до неї теорему 5 з [5]. Із співвідношення (1) знаходимо міру $\mu(d\lambda)$. Отже, величина ζ_{T1} асимптотично нормальна з параметрами 0 і

$$\sigma^2=\frac{16}{3}\pi A_0^2\left|c_{i_0}\right|^2\sum_{k=m}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}f^{k*}\left(\lambda_{i_0}\omega_0\right).$$

Теорему доведено.

Лема 2. Нехай виконуються умови леми 1. Тоді для випадкової величини $\breve{\omega}_T$, що з ймовірністю 1 задовольняє нерівність $\left|\breve{\omega}_T-\lambda_{i_0}\omega_0\right|\le\left|\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0\right|$, для всіх $T>0$ величина $\frac{1}{T^2}\frac{\partial^2 Q_T\left(\breve{\omega}_T\right)}{\partial\omega^2}\to-\frac{2\left|c_{i_0}\right|^2}{3}A_0^2$ за ймовірністю.

Доведення. Справедливе співвідношення

$$\frac{1}{T^2}\frac{\partial^2 Q_T\left(\breve{\omega}_T\right)}{\partial\omega^2}=\frac{8}{T^4}\left\{\left[\int_0^T ty(t)\sin\left(\breve{\omega}_T t\right)dt\right]^2+\left[\int_0^T ty(t)\cos\left(\breve{\omega}_T t\right)dt\right]^2-\right.$$

$$\left.-\int_0^T y(t)\cos\left(\breve{\omega}_T t\right)dt\int_0^T t^2y(t)\cos\left(\breve{\omega}_T t\right)dt-\int_0^T y(t)\sin\left(\breve{\omega}_T t\right)dt\int_0^T t^2y(t)\sin\left(\breve{\omega}_T t\right)dt\right\}.$$

На основі теореми 1, теореми 5 [5] та нерівності $\left|\sin a-\sin b\right|\le\left|a-b\right|$ для будь-яких дійсних a і b легко бачити, що за ймовірністю

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\frac{\partial^2 Q_T\left(\breve{\omega}_T\right)}{\partial\omega^2}=-\frac{2}{3}A_0^2\left(a_{i_0}^2+b_{i_0}^2\right)=-\frac{2\left|c_{i_0}\right|^2}{3}A_0^2.$$

Лема доведена.

Очевидно, що доведення теореми 2 випливає з лем 1 і 2.

Теорема 3. Нехай виконуються умови теореми 2. Величина $T^{1/2}\left(A_T-A_0\right)$ асимптотично нормальна з параметрами $\left(0,\pi\left|c_{i_0}\right|^{-2}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}f\left(\lambda_{i_0}\omega_0\right)\right)$.

Теорема доводиться аналогічно до теореми 4 в роботі [3].

Г.Д. Била

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ПЕРИОДОГРАММНЫХ ОЦЕНОК
В МОДЕЛЯХ С СИЛЬНОЗАВИСИМЫМ ШУМОМ

Рассматривается нелинейная модель регрессии «сигнал плюс шум», где функция регрессии – почти периодическая, а случайный шум является функционалом от гауссовского стационарного процесса с сильной зависимостью. Исследованы периодограммные оценки неизвестных параметров функции в заданной модели и доказана их асимптотическая нормальность.

G.D. Bila

ASYMPTOTIC NORMALITY OF PERIODOGRAM ESTIMATES
IN MODELS WITH STRONGLY DEPENDENT NOISE

The non-linear regression “signal plus noise” model with almost periodic regression function and random noise in the form of a functional of a stationary Gaussian process with a strong dependency is considered. Periodogram estimates of unknown parameters for the function in a given model are investigated and their asymptotic normality is proved.

1. *Гречка Г.П., Дороговцев А.Я.* Об асимптотических свойствах периодограммной оценки частоты и амплитуды гармонического колебания // Вычислительная и прикладная математика. – 1976. – № 28. – С. 18 – 31.
2. *Кнопов П.С.* Оценивание неизвестных параметров почти периодической функции при наличии шума. I // Кибернетика. – 1984. – № 6. – С. 83 – 87, 98.
3. *Жураковський Б.М., Іванов О.В.* Властивості періодограмних оцінок параметрів гармонійного коливання у моделях регресії з сильно залежним шумом // Наукові вісті НТУУ «КПІ». Теоретичні та прикладні проблеми математики. – 2012. – № 4. – С. 59 – 65.
4. *Біла Г.Д.* Консистентність оцінки невідомих параметрів у моделях із сильно залежним шумом // Теорія оптимальних рішень. – 2012. – С. 36 – 41.
5. *Жураковський Б.М.* Відшукання прихованих періодичностей у моделі із сильно залежним випадковим шумом. – КПІ, 2010.

Одержано 11.02.2013

Про автора:

Біла Галина Дмитрівна,
аспірантка Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.
E-mail: chesakg@mail.ru