КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 681.3

И.Н. ПАРАСЮК, Ф.В. КОСТУКЕВИЧ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ДОВЕРИЯ В НЕЧЕТКИХ ДИАГРАММАХ ВЛИЯНИЯ

Предложена новая модель диаграммы влияния на информационной базе нечетких потенциалов и построены алгоритмы поддержки основных этапов вероятностного вывода – трансформации нечеткой диаграммы влияния во вторичную структуру в виде строгого узлового дерева и, собственно, распространения доверия на диаграмме с детерминированными состояниями. Описаны схемы этих алгоритмов и условия их корректной работы.

Введение. Интерес к вероятностным моделям в виде байесовских сетей (БС) и к методам их эффективной компьютеризации чрезвычайно велик, так как они позволяют оценивать и прогнозировать состояния сложных систем [1]. Более того, БС положены в основу диаграмм доверия (ДВ) – сетевых моделей, сохраняющих причинно-следственные связи исследуемых систем в условиях неопределенности вместе с информацией (четкой), полезной для принятия решений [2].

Представляет научный и практический интерес построение таких моделей и соответствующего алгоритмического обеспечения для пространства нечеткой информации [3], тем более, что положительный опыт такого подхода имеется, например [4 – 6].

В данной работе основное внимание уделено новым алгоритмам распространения доверия в ДВ, определенных на нечеткой информации посредством нечетких потенциалов [6].

Схемы принятия решений на основании диаграмм влияния. Введем, придерживаясь [1], основные понятия и их обозначения.

Пусть R – множество вероятностных переменных, в котором каждое $r \in R$ получает значение, называемое состоянием или конфигурацией, из конечного множества $dom(R)$ называемого пространством состояний. Конфигурация переменных из множества R – элемент пространства $dom(R)= \times_{r\in R} dom(r)$. Аналогично, пусть D – множество переменных-решений, где каждая переменная $d \in D$

получает значение из конечного пространства решений $dom(D)$. Конфигурация переменных из D – элемент в пространстве

$dom(D) = \times_{d \in D} dom(d)$, а общая конфигурация переменных из множества $X = \{R, D\}$ получает значения в $dom(X) = dom(R) \times dom(D)$. Элемент из X обозначим $x = (i, \delta)$, $i \in dom(R)$, $\delta \in dom(D)$.

В многошаговой задаче принимаемые решения, обычно, упорядочиваются в последовательности $(d_1, d_2 \ldots d_n)$, d_1 – решение, которое было принято первым, d_2 – вторым, d_n – последним. В дополнение к этому, множества вероятностных переменных $(R_1, \ldots R_n)$ разделяются на подмножества так, что лицу, принимающему решение, до принятия решения d_m значения переменных $(R_1, \ldots R_j)$, $j \le m$ известны, а переменные множеств $(R_j, \ldots R_n)$, $j > m$ – остаются ему неизвестными. Такое разделение на подмножества именуется принципом «не забывания» [2]. Следствием получения решения для переменной d_m, становится информация о состояниях вероятностных переменных множества R_{m+1}. Последовательности вероятностных переменных и решений комбинируют в виде упорядоченного множества $(R_1, d_1, R_2, \mathrm{d}_2, \ldots, R_n, \mathrm{d}_n, R_{n+1u})$, называемого последовательностью решений, построенной по принципу «не забывания». Вышеописанная структура – это временная структура многошаговой проблемы принятия решений. Она устанавливает на множестве вероятностных переменных R и переменных-решений D частичный порядок принятия решений, определяющий порядок элиминирования переменных в процессах построения узлового дерева на основе оригинальной ДВ и выполнения алгоритма распространения доверия в узловом дереве.

Лингвистическая вероятность P – это четверка $(P, T(P), U_P, Im(P))$, где

- P – имя переменной;
- U_P – универсальное множество [0;1];
- p – базовые элементы множества U_P, называющиеся значениями переменной P, т. е. $p \in U_P$;
- $T(P)$ – одноэлементное терм-множество;
- Im(P) – нечеткое число, определенное на четком подмножестве универсального множества U_P, т. е. нечеткое число второго рода [3, 7].

Лингвистический (или нечеткий вероятностный) *потенциал* (далее, коротко, потенциал) – это функция φ, ставящая в соответствие каждой конфигурации $x_i \in dom(X)$ переменной X лингвистическую вероятность $\mathrm{P_i}$, где $i = 1, 2, \ldots n$, $n = \|X\|$, т. е. $\varphi: dom(X) \rightarrow \{\mathrm{P_i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. $\{\mathrm{P_i}\}$ – множество лингвистических вероятностей. Область определения потенциала обозначается $dom(\varphi)$, т. е. $dom(\varphi) = X$. Потенциал определенный над переменной X обозначается φ_X или $\varphi(X)$ [6]. Потенциал, определенный над множеством конфигураций переменной X, обозначается $\varphi(X)$, а для каждой конфигурации $x_i \in dom(X)$ справедливо равенство $\varphi(X = x_i) = P_i$. Если лингвистический потенциал определен над $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, тогда потенциал называется распределением общих (или условных, при заданных условиях) лингвистических вероятностей.

Диаграмма влияния (дискретная) $N = (X, G, \Phi, U)$ состоит из четырехместного кортежа, в состав которого входят множество дискретных вероятностных переменных и дискретных переменных-решений X, ациклический ориентированный граф G, и двух множеств лингвистических потенциалов: множества распределений условных вероятностей Φ, а также множества функций полезности U. Граф $G = (V, E)$, содержит узлы, представляющие вероятностные переменные, переменные-решения и переменные-оценки (также известные как переменные-полезности).

Каждая переменная-решение D представляет собой определенный момент времени, согласно модели предметной области, когда лицо, ответственное за решение, должно принять решение D. Значениями варианта решения или, как говорят, альтернативами будут состояния $(d_1, ..., d_n)$ из D, где $n = \|D\|$. Альтернативы являются взаимоисключающими и исчерпывающими (множество альтернатив – полное). Полезность каждой альтернативы измеряется локальными потенциалами – функциями полезности, связанными с переменной D или с одним из ее потомков в G. Каждая локальная функция полезности $u(X_{pa(v)})\in U$, где $v\in V_u$ представляет собой оценочный узел, является слагаемым суммы, образующая общую функцию полезности $u(X)$ в N. Таким образом, общая функция полезности представляет собой сумму всех локальных функций полезности в ДВ, т. е. $u(X) = \sum_{v\in Vu} u(X_{pa(v)})$.

Таким образом с учетом [8] нечеткая дискретная диаграмма влияния $N = (X, G, \Phi, U)$ состоит из:

1) ациклического орграфа $G = (V, E)$ с узлами V и дугами E, кодирующих связи зависимости и информацию о предшествующем порядке решений;

2) множества дискретных вероятностных переменных R и дискретных переменных решений D таких, что $X = R \cup D$ представлены узлами в G;

3) множества лингвистических потенциалов (представляющих распределение условных лингвистических вероятностей) Φ, содержащих по одному потенциалу $\varphi(R \mid R_{pa}(V))$ для каждой вероятностной переменной R;

4) множества функций полезности U, содержащего по одной функции полезности $u(X_{pa(v)})$ для каждого узла в подмножестве $V_U \subset V$ оценочных узлов.

В графическом представлении ДВ функции полезности представлены ромбами (в форме ромбов-узлов), при этом переменные-решения представлены в виде прямоугольников; вероятностные переменные представлены кругами; дуги указывают на причинно-следственные связи в соответствии с моделируемой предметной областью (рис. 1).

Трансформация нечетких диаграмм влияний в строгое узловое дерево. Современные методы вывода решения на ДВ имеет много общего с применением узлового дерева и алгоритма распространения доверия над БС [9]: вычисления начинаются с создания узлового дерева, полученное дерево инициализируется множеством лингвистических потенциалов (вероятностными потенциалами и функциями полезности). Есть, однако, различия методологического характера.

Прежде всего, порядок удаления в алгоритмах элиминации ограничен временным порядком, наложенным на переменные-решения. Кроме того, элиминацию переменных необходимо выполнять только в одном направлении, что соответствует первой фазе алгоритма распространения доверия в БС [9]. В процессе вывода следует учитывать сразу два типа потенциалов – вероятностные потенциалы и функции полезности.

Рассмотрим подробнее основные этапы трансформации на примере ДВ (рис. 1).

Сначала граф ДВ трансформируется в моральный граф, т. е. удаляются ссылки, указывающие на вершины-решения, добавляются ребра для каждой пары узлов с общим ребенком (в том числе, если общий узел является вершиной-оценкой) и, впрочем, дуги заменяются ребрами, после чего и изымаются вершины-оценки.

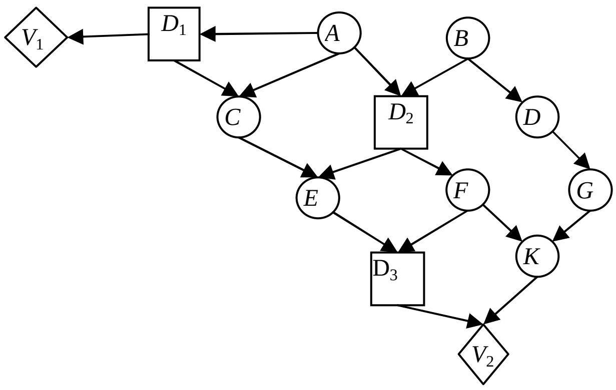

РИС. 1. Пример диаграммы влияния

Выше отмечено, что в отличие от БС, в ДВ нужно следовать строгому порядку элиминации вершин: сначала выполняется элиминация R_n, затем – элиминация D_n, элиминация R_{n-1}, элиминация D_{n-1}, и т. д. (если некоторые R_i являются пустыми, мы можем переставлять элиминацию D_{i+1} и D_i). Применяя вышеуказанный порядок элиминации к моральному графу, получаем последовательность подмножеств, именуемых кликами [1]. Далее осуществляется выбор последней полученной клики в качестве корня узлового дерева и формирование самого дерева. Алгоритм, учитывающий ограничения на порядок решений, заданных последовательностью (R_1, d_1, R_2, d_2, ..., R_n, d_n, R_{n+1}), называется триангуляционным.

Приведем, придерживаясь [1], схему одношагового алгоритма триангуляции ДВ.

1. Все вершины ненумерованы, счетчик множества вершин $i: = |R \cup D|$ и счетчик множеств $j: = n + 1$.

2. Пока существуют ненумерованные вершины:

– выбрать ненумерованную вершину $v \in R_j$ соответственно критерия оптимизации $c(v)$. Если таких вершин не существует, выбрать $v = d_{j-1}$ и уменьшить j на 1;

– отметить выбранную вершину номером i, т. е. $v_i := v$;

– создать множество C_i, состоящее из v_i и ее ненумерованных соседей;
– дополнить ребрами, которых не было, между всеми парами вершин в C_i;
– удалить v_i и уменьшить i на 1.

Результат такой триангуляции называют строгой триангуляцией. Для ДВ (рис. 1) строгий элиминационный порядок $D, K, G, C, D_3, E, F, D_2, B, A, D_1$ порождает следующие клики: $\{D, B, G\}$, $\{K, G, D_3, F\}$, $\{G, D_3, F, B\}$, $\{C, E, D_2, A, D_1\}$, $\{E, D_2, A, D_1\}$, $\{F, D_2, B\}$, $\{D_2, D_1, A, B\}$, $\{D_1, A\}$, $\{D_1\}$.

Далее организуем полученные клики в *строгое узловое дерево*: дерево клик называется узловым деревом, если для каждой пары клик (C_1, C_2) пересечение +++ $C_1 \cap C_2$ содержится в каждой клике на пути, соединяющего C_1 и C_2. Для двух смежных клик, C_1 и C_2, сечение $C_1 \cap C_2$ называется сепаратором. Узловое дерево считается строгим, если оно имеет одну выделенную клику R, так называемый строгий корень, такую, что для каждой пары (C_1, C_2) смежных клик в дереве, где C_1 ближе к R, чем C_2, существует упорядочивание C_2, отвечающее порядку вершин в сепараторе $C_1 \cap C_2$, предшествующих вершинам из $C_2 \setminus C_1$. Данное свойство гарантирует, что вычисление максимально ожидаемой полезности можно выполнить, используя процедуру локальной передачи сообщений в узловом дереве [9]. На рис. 2 показано строгое узловое дерево для примера ДВ (рис. 1).

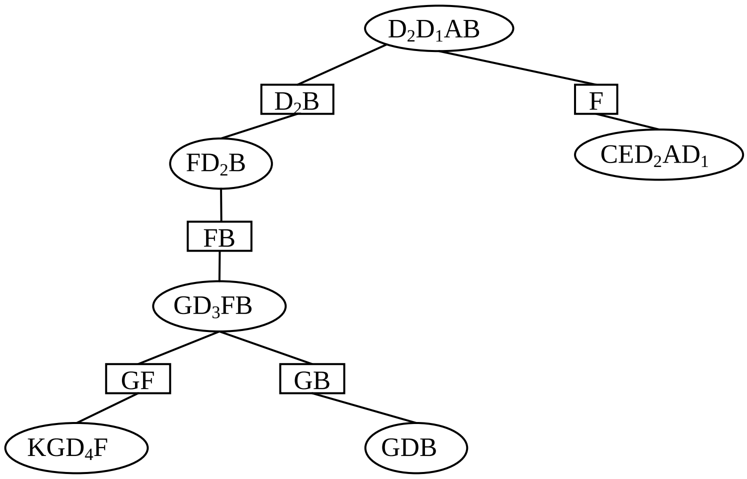

РИС. 2. Строгое узловое дерево

Чтобы инициализировать строгое узловое дерево T **(**элиминационное дерево**)**, нужно сначала ассоциировать с каждым элиминационным множеством $C \in \mathbf{C}$ и сепаратором $S \in \mathbf{S}$ пустой нечеткий потенциал решений, состоящий из двух пустых лингвистических потенциалов: потенциал определяющий распределение совместных лингвистических вероятностей и потенциал полезности. Затем следует рассмотреть каждый вероятностный лингвистический потенциал ДВ и умножить его на вероятностную часть потенциала решения какого-либо одного элиминационного множества, содержащего его область определения.

Далее рассматривается каждый лингвистический потенциал полезности (аддитивный терм общей функции полезности), суммирующийся с его частью полезности потенциала решения какого-либо одного элиминационного множества, содержащего его область определения. После выполнения такой инициализации дерево T будет содержать множество нечетких потенциалов решений Ф, состоящих из вероятностной части $\gamma(R,D)$ и части оценки полезности $u(R,D)$: $\Phi=\{\gamma(R,D),u(R,D)\}$. Начальные значения нечетких потенциалов сепараторов – пустые, т. е. вероятностная часть тождественно равна четкой 1, оценочная часть – четкому 0.

Алгоритм распространения доверия для строгого узлового дерева.

Алгоритм распространения доверия [9] для строгого узлового дерева используется для вычисления функции полезности от каждой переменной-решения. Процес вычисления такой функции выполняется в два этапа методом «обратной индукции» [1] : первый – формирование математического ожидания, второй – максимизация результата. Метод «обратной индукции» можно представить через операцию сбора в корне $R = C_0$ в элиминационном дереве, в котором потенциал решения явно представлен парой лингвистических потенциалов. Используя операции над лингвистическими потенциалами [6], определим соответствующие операции над потенциалами решений.

Определение 1 (произведение потенциалов решений). Пусть $\varphi_1 = (\gamma_1,u_1)$ – потенциал решений с $dom(\varphi_1) = W_1$, $\varphi_2 = (\gamma_2,u_2)$ – потенциал решений с $dom(\varphi_2) = W_2$. Тогда их произведение $\varphi_1\cdot\varphi_2$ имеет область определения $dom(\varphi_1\cdot\varphi_2) = W_1 \cup W_2$ и определяется выражением

$$\varphi_1\cdot\varphi_2(x):=(\gamma_1(x)\cdot\gamma_2(x),u_1(x)+u_2(x)). \quad (1)$$

Определение 2 (деление потенциалов решений). Пусть $\varphi_Y = (\gamma_Y, u_Y)$ – потенциал решений с $dom(\varphi_Y) = Y$, $\varphi_W = (\gamma_W, u_W)$ – потенциал решений с $dom(\varphi_W) = W \subseteq Y$. Тогда результат деления φ_Y на φ_W определен над $dom(\varphi_Y\cdot\varphi_W) = Y$ и вычисляется по формуле

$$(\varphi_Y\div\varphi_W)(x_Y)=(\gamma_Y(x_Y)\div\gamma_W(x_Y),u_Y(x_Y)-u_W(x_Y)), \quad (2)$$

где $\gamma_Y(x_Y)\div\gamma_W(x_Y)=0$, если $\gamma_W(x_Y)=0$.

В частности, деление одного пустого потенциала на другой пустой потенциал приводит, в результате, к созданию пустого потенциала.

Определение 3 (sum-маргинализация потенциала решений). Пусть $W \subseteq Y \subseteq V$ и $\varphi_Y = (\gamma_Y, \mu_Y)$ – потенциал решений с $dom(\varphi_Y) = Y$. Тогда результат sumмаргинализации φ_Y, обозначаемый $S_{Y\backslash W}\varphi_Y$, на множество W будет потенциалом с $dom(\varphi_W) = W$ и определяется формулой

$$\varphi_W = \underset{Y\backslash W}{\mathrm{S}}\,\varphi_U := \left(\sum_{Y\backslash W}\gamma_Y, \sum_{Y\backslash W}\gamma_Y u_Y \div \sum_{Y\backslash W}\gamma_Y\right), \quad (3)$$

где $\sum_{U\backslash W}$ обозначает маргинализацию лингвистического потенциала (суммирования по всех переменных, которые элиминируются из области определения потенциала).

Определение 4 (max-маргинализация потенциала решений). Пусть $W \subseteq Y \subseteq V$ и $\varphi_Y = (\gamma_Y, u_Y)$ – потенциал решений с $dom(\varphi_Y) = Y$. Тогда результат max-маргинализации φ_Y на множество W, обозначаемый $M_{Y\backslash W}\varphi_Y$, будет потенциалом решений с $dom(\varphi_W) = W$ и определяется формулой

$$\varphi_W = \underset{Y\backslash W}{\mathrm{M}}\,\varphi_Y := \left(\gamma_Y(z^*), (\gamma_Y \cdot u_Y)(z^*) \div \gamma_Y(z^*)\right), \quad (4)$$

где z^* максимизирует $\gamma_Y \cdot u_Y$ для каждой проекции конфигурации z в пространство состояний $dom(W)$, т. е. $z_w \in dom(W)$, $z^* = \arg\max_{z_w \in W}(\gamma_Y u_Y)(z)$.

Используя вышеописанные операции с потенциалами решений, между соседними кликами узлового дерева выполняется пересылка информационных сообщений (вычисление и обновление доверия в каждой клике на основе значений доверия в соседних кликах).

Определение 5 (пересылка сообщения между соседними вершинами дерева T). Пусть C – клика узлового дерева T и пусть $C_{v1},\ldots,C_{vm}$ клики , которые находятся дальше от корня C_0, чем C, будут соседями C через сепараторы $S_1,\ldots,S_m$ соответственно. Таким образом, $C_{vm} \setminus S_m = \{v_m\}$. Клика C поглощает значение доверия из $C_{v1},\ldots,C_{vm}$, если потенциалы решений φ_{S_m} и φ_C превращаются в $\varphi^*_{S_m}$ и φ^*_C,

где

$$\varphi^*_C = \varphi_C(\varphi^*_{S_1} \div \varphi_{S_1})\ldots(\varphi^*_{S_1} \div \varphi_{S_1}), \quad (4)$$

$$\varphi^*_{S_m} = \begin{cases} S_{v_m}\varphi_{C_{v_m}}, \text{ если } v_m \text{ вероятностная переменная,} \\ M_{v_m}\varphi_{C_{v_m}}, \text{ если } v_m \text{ переменная-решение,} \end{cases} \quad (5)$$

где $z^* = \arg\max_{v_m}(\varphi_{C_{v_m}} \cdot u_{C_{v_m}})$.

Исходя из описанного процесса поглощения, можно сконструировать основной алгоритм распространения, используя следующее определение.

Определение 6 (процедура сбора свидетельств). Каждый элемент из множества клик $C \in \mathcal{C}$ вызывает процедуру «сбор свидетельств». Когда «сбор свидетельств» вызывается в клике C в направлении с клики W, тогда C вызывает «сбор показаний» во всех своих других соседних кликах (вершинах дерева T), и когда они (клики) завершили их процедуру «сбор свидетельств», C поглощает из них информацию.

Согласно [1, 6], вызов процедуры «сбор свидетельств» из корня C_0 ведет к последовательности маргинализаций или через суммирования вероятностных переменных, или через максимизацию значений переменных-решений.

Выводы. Таким образом, нами построены новые модели в виде нечетких диаграмм влияния и алгоритмы моделирования состояний сложных систем на основе размытых знаний путем реализации процесса распространения доверия посредством нечетких потенциалов. Примечательно, что основные свойства алгоритмов, разработанных авторами для нечетких байесовских сетей, имеют место и для нечетких диаграмм влияний. Важно, что вышеописанные алгоритмы позволяют моделировать различные порядки принятия решений, используя при этом всего лишь одну процедуру – процедуру сбора свидетельств.

Полученные результаты будут полезны при построении соответствующей нечеткой информационной технологии исследования состояний сложных систем и принятия решений.

І.М. Парасюк, Ф.В. Костукевич

ПРО РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ДОВІРИ В НЕЧІТКИХ ДІАГРАМАХ ВПЛИВУ

Запропоновано нову модель діаграми впливу на інформаційній базі нечітких потенціалів і побудовані алгоритми підтримки основних етапів імовірнісного висновку – трансформація нечітких діаграм впливів у вторинну структуру у вигляді строгого вузлового дерева і, власне, поширення довіри на діаграмах з детермінованими станами. Описано структури цих алгоритмів та умови їх коректної роботи.

I.M. Parasyuk, F.V. Kostukevich

ON PROPAGATION OF BELIEF IN FUZZY INFLUENCE DIAGRAMS

A new model of the influence diagram based on the information foundation of fuzzy potentials is proposed. Algorithms that support the main stages of probabilistic inference, i.e., transformation algorithms of the diagram in the secondary structure in the form of a strict tree and, in fact, the belief propagation algorithm based on the diagram with deterministic states and fuzzy potentials, are built. Structures and terms for proper operation of the algorithms are described.

1. *Cowell R.G., Dawid A.P., Spiegelhalter D.J., Lauritzen S.L.* Probabilistic Networks and Expert Systems. – Springer – Verlag, New York, Inc., 1999. – 321 p.
2. *Uffe B. Kjaerulff, Anders L. Madsen.* Bayesian Networks and Influence Diagrams. – Springer Science+Business Media, LLC, 2008. – 318 p.

3. *Лотфи А. Заде.* Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // Математика сегодня (сборник статей, перевод с англ.). – М.: «Знание», 1974. – С. 5 – 48.
4. *Верьовка О.В., Парасюк И.Н.* О распространении вероятностей в нечетких байесовских сетях с недетерминированными состояниями // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 6. – С. 153 –169.
5. *Парасюк И.Н., Костукевич Ф.В.* Методы трансформации байесовской сети для построения узлового дерева и их модификация // Компьютерная математика. – 2008. – № 1. – С. 70 – 80.
6. *Парасюк И.Н., Костукевич Ф.В.* Нечеткие потенциалы и вопросы их применения в алгоритмах распространения доверия на байесовских сетях // Компьютерная математика. – 2009. – № 1. – С. 67 – 75.
7. *Прикладные* нечеткие системы Пер. с япон. / К. Асаиб, Д. Ватада, С.Иваи и др.; под редакцией Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено. – М.: Мир, 1993. – 368 с.
8. *Finn V. Jensen* Bayesian Networks and Decision Graphs. – Springer – Verlag, Berlin, 2001.– 268 p.
9. *Парасюк И.Н., Костукевич Ф.В.* Об одном эффективном алгоритме распространения вероятностей в нечетких байесовских сетях доверия // Компьютерная математика. – 2010. – № 2. – С. 102 – 112.

Получено 20.02.2013

Об авторах:

Парасюк Иван Николаевич,
член-корреспондент НАН Украины, заведующий отделом
Института кибернетики имени. В.М. Глушкова НАН Украины,
E-Mail: iv.para@yandex.ua

Костукевич Феликс Витальевич,
аспирант Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
E-mail: felkost@gmail.com