

*Исследованы некоторые свойства задачи размещения в анизотропной области в полярной системе координат. Построен и обоснован приближенный метод решения, основанный на идее размещения объектов с изменяемыми метрическими характеристиками в изотропной области.*

© И.А. Чуб, М.В. Новожилова,

## МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ В АНИЗОТРОПНОЙ ОБЛАСТИ

**Введение.** Множество практических задач оптимального распределения ресурсов, энергосбережения, планирования могут быть сформулированы как задачи размещения

[1 – 3]. Поэтому данный класс задач вызывает интерес многих специалистов, в том числе работающих в области численных методов оптимизации [4]. Применение численных методов позволяет расширять спектр возможных пространственных форм и

особенностей метрических характеристик объектов и области размещения.

Среди задач размещения наименее изученным, несмотря на очевидное теоретическое и практическое значение, является класс задач размещения геометрических объектов в анизотропных областях [5], например, задача раскроя кожи.

**Цель работы** – построение приближенного метода решения задачи размещения выпуклых многоугольников в анизотропной области в полярной системе координат.

**1. Постановка задачи.** Есть прямоугольная область размещения  $R_0 \subset E^2$ , заданная в полярной системе координат  $\rho O\varphi$  набором координат вершин  $\{(\rho_0^k, \varphi_0^k)\}, k = \overline{1, 4}$ :

$$\{(0, 0), (Z, 0), \left(\sqrt{Z^2 + W^2}, \arctg \frac{W}{Z}\right), (W, \pi/2)\},$$

$W = \text{const}, Z = \text{var}$ . Область  $R_0$  обладает свойством анизотропии вследствие наличия в каждой точке  $(\rho, \varphi) \in R_0$  своего направления наименьшей тягучести  $s_r$ , задаваемого по эллипсу напряжений. Пусть также имеется



набор выпуклых многоугольных объектов размещения  $R = \{R_i\}, i = \overline{1, N}$ . Размещение  $R_i$  в  $R_0$  задается параметрами  $(\rho_i, \varphi_i)$ , определяющими положение центра собственной полярной системы координат (ССК)  $\rho_i O_i \varphi_i$  (полюса объекта  $O_i$ ),  $O_i \in \text{int } R_i$ .

*Замечание 1.* По постановке задачи  $0 \leq \varphi_i \leq \pi/2$ . Тогда каждой паре значений  $(\rho_i, \varphi_i)$  отвечает одна и только одна точка области  $R_0$ .

*Замечание 2.* Так как  $O_i \in \text{int } R_i$ , следовательно  $\rho_i \neq 0, \varphi_i \neq 0$ .

В ССК  $\rho_i O_i \varphi_i$  объект  $R_i$  задается набором  $\{(\rho_i^n, \varphi_i^n)\}$  координат его вершин  $v_i^n, n = \overline{1, n_i}$ . Есть также набор  $\{(p_i^n, \alpha_i^n)\}, n = \overline{1, n_i}$  расстояний  $p_i^n$  и углов  $\alpha_i^n$  между  $O_i \varphi_i$  и нормалью к  $i$ -й стороне объекта  $R_i$  соответственно.

Анизотропия  $R_0$  означает, что в каждой точке  $(\rho, \varphi) \in R_0$  направление  $s_i$  наименьшей тягучести объекта  $R_i$  совпадает с направлением  $s_r$ . Поэтому в зависимости от параметра  $\varphi_i$  объекта  $R_i$ , изменяется ориентация его ССК  $\rho_i O_i \varphi_i$ . Пусть направление  $s_i$  объекта  $R_i$  совпадает с полярной осью  $O_i \varphi_i$ .

**Задача:** разместить набор объектов  $R_i, i = \overline{1, N}$  без взаимных пересечений в области  $R_0$  так, чтобы характеристика  $Z$  была минимальной.

Далее будем считать эквивалентными запись  $R_i$  и  $R_i(\rho_i, \varphi_i)$ .

Математическая модель данной задачи имеет вид, найти:

$$u^* = \arg \min_D Z, \quad (1)$$

где  $u^* = (\rho_1, \varphi_1, \dots, \rho_N, \varphi_N, Z)$ ,  $D \subset E^{2N+1}$  – область допустимых решений, заданная ограничениями

$$R_i \subset R_0, \quad (2)$$

$$\text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j. \quad (3)$$

*Свойство 1.* Линейность функции цели  $Z$  означает, что точка  $u^* \in FrD$ .

**2. Аналитическое описание условий (1–2).** В силу свойства 1 рассмотрим аналитическое описание  $FrD$ . Прежде всего это аналитическое задание касания пары объектов  $(R_i, R_j)$  в виде набора ограничений  $F_n^k(u_i, u_j) = 0$ . Функции  $\{f_{nj}^{ki}(u_i, u_j), f_{ni}^{kj}(u_i, u_j)\} \in F_n^k(u_i, u_j)$  ограничений, задающих касание I-го и II-го типов [7], имеют вид соответственно:

$$\rho_j \cos(\varphi_j - \varphi_i - \alpha_i^k) - \rho_i \cos \alpha_i^k - p_i^k - \rho_j^n \cos(\varphi_j^n + \varphi_j - \varphi_i - \alpha_i^k) = 0, \quad (4)$$

$$\rho_j \cos(\varphi_j - \alpha_j^k) - \rho_i \cos(\varphi_i - \alpha_j^k) - p_i^k \cos(\varphi_i^n - \alpha_j^k + \varphi_i) = 0. \quad (5)$$

В 4-мерном пространстве параметров  $(\rho_i, \varphi_i, \rho_j, \varphi_j)$  0-уровень функции  $f_{nj}^{ki}(u_i, u_j)$  ( $f_{ni}^{kj}(u_i, u_j)$ ) есть гладкое нелинейное многообразие  $\gamma_{nj}^{ki}$  ( $\gamma_{ni}^{kj}$ ).

*Свойство 2.* В силу анизотропии области  $R_0$  касание I-го типа, задаваемое ограничением (4), может иметь место в диапазоне  $[\varphi_{nj\_min}^{k*i}, \varphi_{nj\_max}^{k*i}]$  изменения параметра  $\varphi_j$ , касание II-го типа (5) – в диапазоне  $\varphi_i \in [\varphi_{ni\_min}^{k*j}, \varphi_{ni\_max}^{k*j}]$ .

**Утверждение 1.** Пусть определены функции  $f_{nj}^{ki}(u_i, u_j)$ ,  $f_{ni}^{kj}(u_i, u_j)$ . Тогда неравенство  $f_{nj}^{ki}(u_i, u_j) > 0$  ( $f_{ni}^{kj}(u_i, u_j) > 0$ ) описывает условие (3), а ограничение  $f_{nj}^{ki}(u_i, u_j) < 0$  ( $f_{ni}^{kj}(u_i, u_j) < 0$ ) определяет условие  $\text{int } R_i \cap \text{int } R_j \neq \emptyset$  в соответствующих диапазонах их изменения  $[\varphi_{nj\_min}^{k*i}, \varphi_{nj\_max}^{k*i}]$ ,  $[\varphi_{ni\_min}^{k*j}, \varphi_{ni\_max}^{k*j}]$ .

*Доказательство.* Вид ограничения (4), описывающего поверхность  $\gamma_{nj}^{ki}$  ( $\gamma_{ni}^{kj}$ ), получен при переходе от декартовой системы координат в  $E^2$  к полярной. Такой переход не изменяет форму объектов и расстояния между ними, называемые [1] отношениями взаимного непересечения вида (3). Поэтому в области определения, заданной выделенными диапазонами изменения, утверждение 1 имеет место.

Аналитическое описание касания объекта  $R_i$  границы ( $FrR_0$ ) области  $R_0$  задается набором уравнений  $f_n^k(\rho_i, \varphi_i) = 0$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , где функция  $f_n^k(\rho_i, \varphi_i)$  имеет, соответственно, вид:

$$\left\{ \rho_i \sin \varphi_i + \rho_i^n \sin(\alpha_i^n + \varphi_i), W - \rho_i \sin \varphi_i - \rho_i^n \sin(\alpha_i^n + \varphi_i), \right. \\ \left. Z - \rho_i \cos \varphi_i - \rho_i^n \cos(\alpha_i^n + \varphi_i), \rho_i \cos \varphi_i + \rho_i^n \cos(\alpha_i^n + \varphi_i) \right\}, n = \overline{1, n_i}. \quad (6)$$

*Свойство 3.* Функции  $f_{nj}^{ki}(u_i, u_j)$ ,  $f_{ni}^{kj}(u_i, u_j)$ ,  $f_n^k(\rho_i, \varphi_i)$  могут быть как выпуклыми, так и вогнутыми.

**3. Общая схема метода решения задачи (3).** Легко показать, что задача (1–3) – обобщение известной NP-трудной задачи о ранце и является NP-трудной. Такие свойства задачи как многомерность, многоэкстремальность, наличие погрешностей в задании исходных данных, вычислительных погрешностей обуславливают использование приближенных алгоритмов решения.

Рассмотрим метод поиска некоторого приближения к глобальному экстремуму задачи, который включает следующие этапы.

**Этап 1.** Определение локального экстремума задачи на базе модифицированного метода оптимизации по группам переменных.

**Этап 2.** Перебор локальных экстремумов, основанный на переопределении порядка размещения объектов.

В данной работе предполагается, что способ задания последовательности размещения объектов известен. Это может быть метод сужающихся окрестностей или генетический алгоритм, или реализация датчика случайных чисел.

Общая схема метода оптимизации по группам переменных, на базе которого определяются локальные экстремумы задачи (1–3), такова [1]:

а) объекты размещаются по одному по заданной последовательности номеров;

б) ранее размещенные объекты считаются неподвижными;

в) размещение каждого объекта производится с учетом требования минимизации занятой части области размещения.

Таким образом, на каждой  $i$ -й итерации метода решается задача вида

$$\min_{(\rho_i, \varphi_i) \in D_i} Z_i, \quad (7)$$

где  $D_i$  – двумерное сечение подобласти  $\tilde{D} \subset E^{2i}$  области  $D$ ,  $\rho_i, \varphi_i = \text{const}$ ,  $l = \overline{1, i-1}$ ;  $\rho_i, \varphi_i = \text{var}$ , область  $\tilde{D}$  сформирована ограничениями на размещение в полосе и условиями взаимного непересечения набора объектов  $\{R_l\}_{l=\overline{1, i}}$ .

**4. Модификация метода решения.** Задача (7) вследствие учета анизотропии области размещения имеет нетривиальную сложность. Поэтому в данной работе предлагается методика ее решения с помощью вспомогательной задачи размещения габаритных прямоугольников  $\Pi_i$ .

Габаритный прямоугольник  $\Pi_i$  объекта  $R_i$  – прямоугольник минимальной площади, содержащий  $R_i$ . Параметры размещения  $\eta_{\Pi_i} = (\rho_{\Pi_i}, \varphi_{\Pi_i})$   $\Pi_i$ , связанные с его полюсом –  $P_i$ ,  $P_i \in \text{int } \Pi_i$ , совпадают с параметрами  $(\rho_i, \varphi_i)$  объекта  $R_i$ . Итак, задача (8) разбивается на 3 подзадачи более простой структуры.

**Задача i1.** Определение габаритного прямоугольника  $\Pi_i$  для объекта  $R_i$ .

**Задача i2.** Размещение прямоугольника  $\Pi_i$  в области  $D_i^{\text{rect}}$ .

**Задача i3.** Сжатие полученного размещения (переход к исходным объектам).

Рассмотрим более подробно шаги модифицированного алгоритма.

**i1.** Метрические характеристики  $(a_i, b_i) = (\overline{a_i} - \underline{a_i}, \overline{b_i} - \underline{b_i})$   $\Pi_i$  при  $\varphi_{\Pi_i} = 0$  таковы:

$$\underline{a_i} = \min_k \{\rho_i^k \cos \varphi_i^k\}, \overline{a_i} = \max_k \{\rho_i^k \cos \varphi_i^k\}, \underline{b_i} = \min_k \{\rho_i^k \sin \varphi_i^k\}, \overline{b_i} = \max_k \{\rho_i^k \sin \varphi_i^k\},$$

$k = \overline{1, n_i}$ . При этом, несмотря на то, что ориентация объекта  $R_i$  при движении по области  $R_0$  непрерывно меняется в соответствии с направлением  $s_r$ , стороны  $\Pi_i$  остаются, по определению, параллельными осям  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$ .

Зафиксируем некоторое значение  $\varphi_{\Pi_i} (= \varphi_i)$ . Пусть при этом  $a_{\min}$ ,  $a_{\max}$ ,  $b_{\min}$ ,  $b_{\max}$  – номера габаритных вершин объекта  $R_i$ .

Метрическая характеристика  $a_i$  объекта  $\Pi_i$  – функция вида:

$$a_i(\overline{a_i}, \underline{a_i}) = \overline{a_i} - \underline{a_i} = \rho_i^{a_{\max}} \cos(\varphi_i^{a_{\max}} + \varphi_{\Pi_i}) - \rho_i^{a_{\min}} \cos(\varphi_i^{a_{\min}} + \varphi_{\Pi_i}). \quad (8)$$

Аналогично, величина  $b_i$  определяется как:

$$b_i(\bar{b}_i, \underline{b}_i) = \bar{b}_i - \underline{b}_i = \rho_i^{b-\max} \sin(\varphi_i^{b-\max} + \varphi_{\Pi_i}) - \rho_i^{b-\min} \sin(\varphi_i^{b-\min} + \varphi_{\Pi_i}). \quad (9)$$

**Утверждение 2.** Метрические характеристики  $(a, b)$  прямоугольника  $\Pi_i$  – кусочно-гладкие функции вида (8), (9) угла поворота  $\varphi_{\Pi_i}$ .

Итак, размещение габаритных прямоугольников  $\Pi_i$  в анизотропной области  $R_0$  эквивалентно размещению прямоугольников с изменяемыми по законам (8), (9) метрическими характеристиками в изотропной области размещения.

**и2.** Область размещения  $D_{rect}^i = R_0 / \bigcup_{h=1}^{i-1} \Pi_h$  на каждой  $i$ -й итерации является невыпуклой и имеет кусочно-постоянную границу  $FrR_0^i$ .

Из вышеизложенного следует, что справедливо

**Утверждение 3.** Задача (7) эквивалентна задаче вида  $\eta_{\Pi_i}^* = \arg \min_{h=0, i-1} \Psi_h$ ,

где

$$\Psi_h = (\rho_h + \bar{a}_h) + \min_{\varphi_{\Pi_i}} a_i(\varphi_{\Pi_i}), \quad \rho_0 = \bar{a}_0 = 0 \quad (10)$$

при условии, что  $\eta_{\Pi_i} \in D_i^{rect}$ .

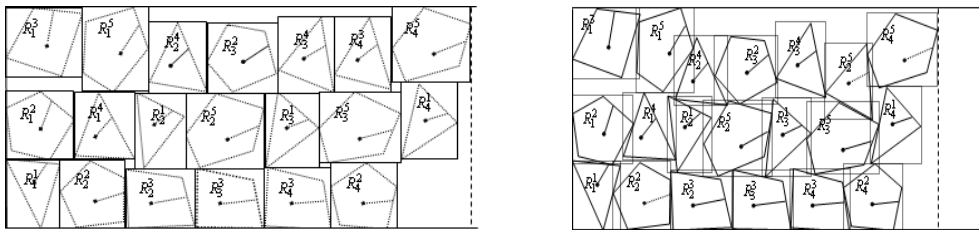
**и3.** Точка  $\eta_{\Pi_i}^* \in FrD_i^{rect}$  (или вершина области  $D_i^{rect}$ ). Соответствующая  $\eta_{\Pi_i}^*$  точка  $(\rho_i, \varphi_i)$  может быть: 1) вершиной; 2) граничной точкой; 3)  $(\rho_i, \varphi_i) \in \text{int} D_i$ . При этом в силу свойства 2 и утверждения 1 во 2-м и 3-м случаях можно определить набор ограничений  $f_{ni}^{kh}(u_h, u_i) > 0$ ,  $(f_{ni}^{ki}(u_{hi}, u_i) > 0)$ ,  $h \in \{l, t\}; l, t \in (1, 2, \dots, i-1)$ , вида (4), (5), формирующих подобласть  $\wp_i \subset D_i$ .

Процедура сжатия состоит в решении задачи вида

$$(\rho_i^*, \varphi_i^*) = \arg \min_{(\rho_i, \varphi_i) \in Fr\wp_i} Z_i. \quad (11)$$

*Замечание 3.* В общем случае  $(\rho_i^*, \varphi_i^*) \notin D_i^{rect}$ .

На рисунке представлено решение модельной задачи размещения объектов 5-ти типов  $\{R^1, R^2, \dots, R^5\}$ ,  $|R^g| = 4$ ,  $g = \overline{1, 5}$ .



а

б

РИСУНОК. Решение задачи размещения 20-ти объектов в анизотропной области: а – размещение габаритных прямоугольников; б – соответствующее решение задачи размещения исходных объектов

**Заключение.** Исследованы свойства задачи размещения в анизотропной области в полярной системе координат. Построен и обоснован новый приближенный метод решения, основанный на идее размещения объектов с изменяемыми метрическими характеристиками в изотропной области. Данный подход может быть распространен на случай невыпуклых объектов и области размещения.

*И.А. Чуб, М.В. Новожилова*

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ В АНІЗОТРОПНІЙ ОБЛАСТІ

Досліджені деякі властивості задачі розміщення в анизотропній області в полярній системі координат. Запропоновано наближений метод розв'язання, що базується на можливості розміщення об'єктів з метричними характеристиками, що змінюються.

*I.A. Chub, M.V. Novozhilova*

METHOD OF SOLVING PLACEMENT PROBLEM ON ANISOTROPIC REGION

Properties of placement problems on anisotropic feasible region in polar coordinate system is investigated. An approximate method of solution, which is based on possibility to locate objects with varying metric characteristics, is constructed and justified.

1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наук. думка. – 1989. – 267 с.
2. Новожилова М.В., Чуб И.А. Оценка ресурсов инвестиционных проектов как составная часть технологии банковского кредитования // Финансово-кредитна діяльність: проблеми теорії та практики. – Харків: ХІБС УБС НБУ, 2007. – № 4. – С. 35–39.
3. Чуб И.А., Новожилова М.В., Иванюков А.С. Решение задачи распределения ресурсов проекта как оптимизационной задачи размещения геометрических объектов с изменяемыми метрическими характеристиками // Проблемы машиностроения. – 2010. – 4. – № 1–2. – С. 79–87.
4. Ненахов Э.И., Соболенко Л.А. Метод линеаризации и негладкая оптимизация // System Research & Information Technologies. – 2009. – № 3. – С. 90–104.
5. Чуб І.А., Новожилова М.В. Аналітичний опис геометричних обмежень задачі розміщення багатокутних об'єктів в анізотропній області в полярній системі координат // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2010. – Вип. 26.

Получено 15.03.2011

**Об авторах:**

*Чуб Игорь Андреевич,*

докторант Национального университета гражданской защиты Украины,  
e-mail: chubia@nuczu.edu.ua

*Новожилова Марина Владимировна,*

доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой  
Харьковского государственного технического университета строительства и архитектуры.  
e-mail: novozhilova@kstuca.kharkov.ua