КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Математическое моделирование

Рассмотрены вопросы решения с помощью градиентных методов, обратных краевых задач для термоупругого деформирования полого толстого цилиндра. Представлены результаты решения некоторых модельных обратных краевых задач.

УДК 519.6:539.3

В.С. ДЕЙНЕКА, А.А. АРАЛОВА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕРМОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОЛСТОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Введение. В работе [1] на основе результатов теории оптимального управления состояниями различных многокомпонентных распределенных систем [2, 3] предложена технология построения явных выражений градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами [4] различных параметров различных многокомпонентных распределенных систем. В работах [5–7] эта технология распространена на задачи упругого и термоупругого деформирования многокомпонентных тел. Численные результаты решения обратных краевых задач осесимметричного деформирования длинного толстого полого цилиндра, с использованием явных выражений градиентов функционалов-невязок, приведены в [8].

В данной статье рассмотрены вопросы решения, с помощью градиентных методов, обратных краевых задач термоупругого деформирования длинного толстого полого цилиндра. Представлены результаты решения некоторых модельных задач по идентификации тепловых потоков на поверхностях тела при известных смещениях в некоторых его точках.

1. Идентификация плотности теплового потока на внешней поверхности цилиндра при известном смещении его внешней поверхности.

Рассмотрим длинный толстый полый изотропный круговой цилиндр. С учетом симметрии, следуя [9, 10], термоупругое состояние длинного толстого полого цилиндра описывается краевой задачей:

$$-\left\{(\lambda+2\mu)\left(\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right)-\frac{y}{r}\right)-(3\lambda+2\mu)\alpha r\frac{dT}{dr}\right\}=f(r),\ r\in(r_1,r_2), \quad (1)$$

$$-\frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dr}\left(rk\frac{dT}{dr}\right)\right\}=\bar{f}(r),\ r\in(r_1,r_2), \quad (2)$$

$$\sigma_r(y)\Big|_{r=r_i}=-p_i,\ i=1,2, \quad (3)$$

$$-k\frac{dT}{dr}=-\alpha_1 T+\beta_1, r=r_1, \quad (4)$$

$$k\frac{dT}{dr}=u, r=r_2, \quad (5)$$

где r_1, r_2 = const > 0 – радиусы, соответственно, внутренней и внешней круговых поверхностей; r – радиальная координата цилиндрической системы координат; компонента $\sigma_r(y,T)$ тензора напряжений имеет вид:

$$\sigma_r(y,T)=(\lambda+2\mu)\varepsilon_r(y)+\lambda\varepsilon_\varphi-(3\lambda+2\mu)\alpha T, \quad (6)$$

λ, μ – постоянные Ляме; $y=y(r)$ – смещение в радиальном направлении; α = const > 0 – коэффициент температурного расширения, α_1= const > 0, β_1 = const, p_i = const, i = 1, 2; T = $T(r)$ – температура, k = const – коэффициент теплопроводимости, u = const – считаем неизвестным.

Предполагаем, что известно смещение внешней поверхности, т. е.:

$$y(r_2)=f_0. \quad (7)$$

Получена задача (1)–(5), (7), состоящая в определении вещественного числа $u\in U=R=(-\infty,+\infty)$, при котором первая компонента $y=y(u)$ решения $(y(r),T(r))$ задачи (1)–(5) удовлетворяет равенству (7).

Следуя [11], при каждом фиксированном $u\in U$, вместо классического решения краевой задачи (1)–(5) будем использовать ее обобщенное решение, т. е. вектор-функцию $(y,T)\in H=W_2^1(r_1,r_2)\times W_2^1(r_1,r_2)$, которая $\forall z=$ $=(z_1(r),z_2(r))\in H_0=H$ удовлетворяет системе равенств

$$a(y,z_1)=l(T;z_1), \quad (8)$$

$$a_1(T,z_2)=l_1(u;z_2), \quad (9)$$

где

$$a(y,z_1)=\int_{r_1}^{r_2} r\left((\lambda+2\mu)\frac{dy}{dr}\frac{dz_1}{dr}+\lambda\left(\frac{y}{r}\frac{dz_1}{dr}+\frac{dy}{dr}\frac{z_1}{r}\right)+(\lambda+2\mu)\frac{y}{r}\frac{z_1}{r}\right)dr,$$

$$a_1(T,z_2)=\int_{r_1}^{r_2} rk\frac{dT}{dr}\frac{dz_2}{dr}dr+r_1\alpha_1 T(r_1)z_2(r_1),$$

$$l(T;z_1)=\int_{r_1}^{r_2}\left(fz_1+r\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha T\left(\frac{dz_1}{dr}+\frac{z_1}{r}\right)\right)dr+r_1p_1z(r_1)-r_2p_2z(r_2),$$

$$l_1(u;z_2)=\int_{r_1}^{r_2}r\overline{f}z_2dr+r_1\beta_1z_2(r_1)+r_2uz_2(r_2). \qquad (10)$$

Теорема 1. При каждом фиксированном $u\in U$ решение $\left(y(u;r),T(u;r)\right)$ задачи (8), (9) существует и единственно в H.

Справедливость теоремы 1 устанавливается на основе леммы Лакса – Мильграма [12].

При каждом фиксированном $u\in U$ на основе задачи (8), (9) определяем функционалы энергии:

$$\Phi(T;z_1)=a(z_1;z_1)-2l(T;z_1)\,, \qquad (11)$$

$$\Phi_1(u;z_2)=a_1(z_2;z_2)-2l_1(u;z_2)\,. \qquad (12)$$

Определение 1. При каждом фиксированном $u\in U$ решением задачи (11), (12) называется вектор-функция $\left(y(u;r),T(u;r)\right)\in H$, где при фиксированном $u\in U$ функция $T(u;r)$ доставляет минимум функционалу $\Phi_1\left(\cdot;\cdot\right)$ на $V=W_2^1(r_1,r_2)$, а $y(u;r)$ – при фиксированном $u\in U$ и полученной функции $T(u;r)\in V$, доставляет минимум на V функционалу (11).

Лемма 1. При каждом фиксированном $u\in U$ задачи (8), (9); (11), (12) эквивалентны и имеют единственное решение $\left(y(u;r),T(u;r)\right)\in H$.

Введем в рассмотрения функционал-невязку

$$J(u)=\frac{1}{2}(y(u;r_2)-f_0)^2. \qquad (13)$$

Вместо задачи (1)–(5), (7) решаем задачу (8), (9), (13), состоящую в определении элемента *u*, минимизирующего на *U* функционал (13) при ограничениях (8), (9) или (11), (12), что является одним и тем же.

Задачу (13), (8), (9) будем решать с помощью градиентных методов [4], где $(n+1)$-е приближение u_{n+1} решения $u\in U$ находится по формуле

$$u_{n+1}=u_n-\beta_np_n\,, n=0,1,\cdots,n^*, \qquad (14)$$

начиная с некоторого приближения $u_0\in U$, а направление спуска p_n и коэффициент β_n для метода минимальных ошибок определяем с помощью выражений

$$p_n=J'_{u_n}\,,\ \ \beta_n=\frac{\left\|e_n\right\|^2}{\left\|J'_{u_n}\right\|^2}. \qquad (15)$$

Здесь J'_{u_n} – градиент функционала $J(u)$ в точке $u=u_n$, $e_n=Au_n-f_0$, $Au_n=y(u_n;r_2)$.

Введем обозначения

$$\pi(u,v)=\left(\Upsilon(u)-\Upsilon(0),\Upsilon(v)-\Upsilon(0)\right),$$

$$L(v)=\left(f_0-\Upsilon(0),\Upsilon(v)-\Upsilon(0)\right), \tag{16}$$

где $\Upsilon(v)=Av$, $(\varphi,\Psi)=\varphi\Psi$.

Так как

$$2J(v)=\pi(v,v)-2L(v)+\left(f_0-\Upsilon(0),f_0-\Upsilon(0)\right),$$

то

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{J\left(u+\lambda(v-u)\right)-J(u)}{\lambda}=\pi(u,v-u)-L(v-u)=$$
$$=\left(\Upsilon(u)-f_0,\Upsilon(v)-\Upsilon(u)\right)=\left\langle J'_u,v-u\right\rangle. \tag{17}$$

Следуя [1, 11] для определения (n+1)-го приближения u_{n+1} решения $u\in U$ задачи (13), (8), (9) введем в рассмотрение сопряженную задачу:

$$-\left\{(\lambda+2\mu)\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Psi}{dr}\right)-(\lambda+2\mu)\frac{\Psi}{r}\right\}=0,\quad r\in(r_1,r_2),$$

$$\sigma_r(\Psi)\Big|_{r=r_1}=0,\qquad \sigma_r(\Psi)\Big|_{r=r_2}=\frac{1}{r_2}e_n,$$

$$-\frac{d}{dr}\left(rk\frac{dp}{dr}\right)-(3\lambda+2\mu)\alpha r\left(\frac{d\Psi}{dr}+\frac{\Psi}{r}\right)=0,\quad r\in(r_1,r_2),$$

$$-k\frac{dp}{dr}\Big|_{r=r_1}=-\alpha_1 p(r_1),\quad k\frac{dp}{dr}\Big|_{r=r_2}=0, \tag{18}$$

где $\sigma_r(\Psi)=(\lambda+2\mu)\dfrac{d\Psi}{dr}+\lambda\dfrac{\Psi}{r}$.

Определение 2. Обобщенным решением краевой задачи (18) называется вектор-функция $\left(\Psi(r),p(r)\right)\in H$, которая $\forall z=\left(z_1(r),z_2(r)\right)\in H_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(\Psi,z_1)=\overline{l}\,(e_n;z_1), \tag{19}$$

$$a_1(p,z_2)=\overline{l}_1(\Psi;z_2), \tag{20}$$

где

$$\overline{l}\,(e_n;z_1)=e_n z_1(r_2),\ \overline{l}_1(\Psi;z_2)=\int_{r_1}^{r_2} rz_2\,(3\lambda+2\mu)\,\alpha\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{\Psi}{r}\right)dr. \tag{21}$$

Выбирая в тождестве (20) вместо функции z_2 разность $T(u_{n+1};r)-T(u_n;r)$, а в (19) вместо z_1 – разность $y(u_{n+1};r)-y(u_n;r)$ получаем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = \left(y\left(u_n; r_2\right) - f_0 \right)\left(y\left(u_{n+1}; r_2\right) - y\left(u_n; r_2\right) \right) = r_2 p\left(r_2\right) \Delta u_n .$$

Следовательно

$$J'_{u_n} = r_2 p\left(r_2\right). \tag{22}$$

Задача (13), (11), (12) решается с помощью градиентного метода (14), (15), (22), где прямая (11), (12) и сопряженная (19), (20) задачи решены с помощью метода конечных элементов (МКЭ), путем минимизации соответствующего функционала энергии на классе кусочно-линейных функций $H_1^N \subset H$, аналогично [8].

Введем в рассмотрение подпространство $H_1^N \subset H$ непрерывных на $\left[r_1, r_2\right]$, линейных, $V_1^N(r) = \alpha_1^i + \alpha_2^i r$, на каждом элементарном отрезке $\left[r^i, r^{i+1}\right]$, $r_1 = r^0 < r^1 < \ldots < r^N = r_2$, функций. Имеем

$$\Phi(\Psi_n; v_1^N) = a_1(v_1^N; v_1^N) - 2\overline{l}_1(\Psi_n; v_1^N) = \int_{r_1}^{r_2} rk\left(\frac{dv_1^N}{dr}\right)^2 dr + \alpha_1 r_1 \left(v_1^N\right)^2 -$$

$$-2\sum_{i=0}^{N-1}\left(\int_0^1 \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha h_i \left(\beta_1^i + \beta_2^i \eta\right)\left(\frac{\left(\Psi_{i+1} - \Psi_i\right)}{h_i}\left(r_i + h_i\eta\right) + \left(1-\eta\right)\Psi_i + \Psi_{i+1}\eta\right)d\eta\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\left(k\left(\frac{r_i}{h_i} + \frac{1}{2}\right)\omega_i^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\omega_i\right) + v_0^2 -$$

$$-2\sum_{i=0}^{N-1}\left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha\omega_i^T \begin{pmatrix} \frac{r_i}{2}\left(\Psi_{i+1} - \Psi_i\right) + \frac{\Psi_{i+1}}{3}h_i + \frac{\Psi_i}{6}h_i \\ \frac{r_i}{2}\left(\Psi_{i+1} - \Psi_i\right) + \frac{2}{3}\Psi_{i+1}h_i - \frac{\Psi_i}{6}h_i \end{pmatrix} = V^T A V - 2V^T B, \tag{23}$$

где $V^T = \left(V_0, V_1, \ldots, V_N\right)$ – значения решения $y_1^N(u_n; r)$ в узловых точках r_i, $i = \overline{0, N}$, A – симметричная положительно определенная матрица, $B = \left\{b_i\right\}_{i=0}^N$.

Теорема 2. При каждом $u = u_n$ для приближения $(y_1^N, T_1^N) \in H_1^N \times H_1^N$ решения $(y, T) \in H \times H$ задачи (8), (9) имеет место оценка

$$\left\| y(u_n) - y_1^N(u_n) \right\|_{W_2^1(r_1, r_2)} \le Ch,$$
$$\left\| T(u_n) - T_1^N(u_n) \right\|_{W_2^1(r_1, r_2)} \le C_1 h, \tag{24}$$

где C, C_1 = const, $h = \max_i h_i$, $h_i = r^{i+1} - r^i$.

Справедливость теоремы устанавливается, следует [13].

Решены некоторые модельные примеры.

Пример 1. При $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\alpha = 3$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $k = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -2$, $f = 0$, $\overline{f_1 = 0}$ классическое решение краевой задачи (1)–(5) имеет вид $y = r$.

Считаем в этой задаче $u \in U$ неизвестным.

В табл. 1 приведены результаты вычислительного эксперимента, где u_0 – начальное приближение искомого решения u=4; u_n – результирующее значение; e_n – погрешность; h – шаг разбиения; n – номер итерации, при котором завершается итерационный процесс.

Отметим так же, что если вместо (7) имеем $y(r_1) = f_0$, то результаты вычислений будут подобными.

ТАБЛИЦА 1

$f_0 = 2$	u_0	0	10	100	–10	10	–10	10
	u_n	4	4	4	4	4	4	4
	e_n	$1*10^{-14}$	$-2*10^{-14}$	$8*10^{-13}$	$-4*10^{-14}$	$-4*10^{-14}$	$4*10^{-13}$	$-2*10^{-13}$
	h	0,25	0,25	0,25	0,1	0,1	0,01	0,01
	n	2	2	2	2	2	2	2

2. Идентификация плотности теплового потока на внутренней поверхности цилиндра при известном ее смещении.

Состояние системы описывается равенствами (1)– (3) и условиями

$$-k\frac{dT}{dr}\Big|_{r=r_1} = u, \quad k\frac{dT}{dr}\Big|_{r=r_2} = -\alpha_2 T + \beta_2, \tag{25}$$

где $u \in U = R$ неизвестно, т. е. обобщенной задачей (8), (9), где

$$a_1(T, z_2) = \int_{r_1}^{r_2} rk\frac{dT}{dr}\frac{dz_2}{dr}dr + r_2\alpha_2 T(r_2)z_2(r_2),$$

$$l_1(u; z_2) = \int_{r_1}^{r_2} r\overline{f}z_2 dr + r_1 u z_2(r_1) + r_2\beta_2 z_2(r_2). \tag{26}$$

Считаем, что на внутренней поверхности цилиндра известно смещение, т. е.

$$y(r_1) = f_0. \tag{27}$$

Функционал-невязка имеет следующий вид:

$$J(u) = \frac{1}{2}(y(u; r_1) - f_0)^2. \tag{28}$$

Здесь $e_n = Au_n - f_0$, $Au_n = y(u_n; r_1)$. Справедливы выражения вида (16), (17), где $\Upsilon(v) = Av$.

Для определения (n+1)-го приближения u_{n+1} решения $u \in U = R$ рассматриваемой задачи, следуя [1, 11] сопряженная задача имеет вид (18), где вместо второго, третьего, пятого и шестого ограничений имеем

$$\sigma_r(\Psi)\Big|_{r=r_1} = -\frac{1}{r_1} e_n, \quad \sigma_r(\Psi)\Big|_{r=r_2} = 0,$$

$$-k\frac{dp}{dr}\Big|_{r=r_1} = 0, \quad k\frac{dp}{dr}\Big|_{r=r_2} = -\alpha_2 p(r_2). \tag{29}$$

Так как

$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = \left(y(u_n;r_1) - f_0\right)\left(y(u_{n+1};r_1) - y(u_n;r_1)\right) = r_1 p(r_1)\Delta u_n$, то

$$J'_{u_n} = r_1 p(r_1). \tag{30}$$

Пример 2. Полагаем $f_0 = 1, \alpha_2 = 1, \beta_2 = 8,$ а все остальные исходные данные совпадают с теми, что приведены в примере 1.

В табл. 2 приведены результаты вычислительного эксперимента.

ТАБЛИЦА 2

$f_0 = 1$	u_0	0	10	100	–10	10	–10	10
	u_n	– 4	– 4	– 4	–4	– 4	– 4	– 4
	e_n	$-1*10^{-14}$	$-2*10^{-14}$	$1*10^{-13}$	$-2*10^{-14}$	$-2*10^{-14}$	$-6*10^{-14}$	$-4*10^{-13}$
	h	0,25	0,25	0,25	0,1	0,1	0,01	0,01
	n	2	2	2	2	2	2	2

Здесь точное искомое решение $u = -4$.

Необходимо отметить, что если вместо (27) имеем $y(r_2) = f_0$, то результаты вычислений будут подобными.

3. Идентификация плотности теплового потока на внешней поверхности цилиндра при известном смещении внутренней его точки.

Состояние системы описывается краевой задачей (1)–(5). При этом в некоторой точке $d_1 \in (r_1, r_2)$ известно значение смещения:

$$y(d_1) = f_0. \tag{31}$$

Функционал-невязка имеет вид

$$J(u) = \tfrac{1}{2}\left(y(u;d_1) - f_0\right)^2. \tag{32}$$

Следовательно, получена задача (1)–(5), (32), состоящая в определении элемента u минимизирующего на $U = R$ функционал (32) при ограничениях (8), (9). Задачу решаем приближенно с помощью итерационного процесса (14), (15). Сопряженная задача задается тремя последними равенствами системы (18) и системой:

$$-\left\{(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) - (\lambda + 2\mu)\frac{\Psi}{r}\right\} = 0, \quad r \in \Omega,$$

$$[\varphi]\Big|_{r=d_1}=0,\ \ [\sigma_r(\Psi)]\Big|_{r=d_1}=-\frac{1}{d_1}e_n,\ \ \sigma_r(\Psi)\Big|_{r=r_i}=0,\ \ i=1,2, \tag{33}$$

где $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_1=(r_1,d_1)$, $\Omega_2=(d_1,r_2)$, $[\varphi]\Big|_{r=d_1}=\varphi(d_1+0)-\varphi(d_1-0)$.

Обобщенная задача имеет вид (19), (20), где $\overline{l}(e_n;z_1)=e_nz_1(d_1)$, $H=V\times W_2^1(0,l)$, $V=\left\{v(r):v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,2;\ [v]\big|_{r=d_1}=0\right\}$.

Следовательно $J'_{u_n}=\tilde{\Psi}_n$, где $\tilde{\Psi}_n=r_2p(r_2)$.

Пример 3. Полагаем d_1= 3/2, f_0= 3/2, а все остальные исходные данные совпадают с теми, что приведены в примере 1. Здесь u = 4.

В табл. 3 приведены результаты вычислительного эксперимента.

ТАБЛИЦА 3

f_0=1,5 d_1=1,5	u_0	0	10	100	–10	10	–10	10
	u_n	4	4	4	4	4	4	4
	e_n	$-1*10^{-14}$	$-7*10^{-15}$	$-7*10^{-13}$	$-4*10^{-14}$	$2*10^{-14}$	$4*10^{-13}$	$-3*10^{-15}$
	h	0,25	0,25	0,25	0,1	0,1	0,01	0,01
	n	2	2	2	2	2	2	2

4. Идентификация плотности теплового потока на внутренней поверхности цилиндра при известном смещении внутренней его точки.

Состояние системы описывается задачей (1)–(3), (25), где поток при r_1 считается неизвестным, а при r_2 – задано условие третьего рода. При этом в некоторой точке $d_1\in(r_1,r_2)$ известно смещение, определенное равенством (31).

Функционал-невязка имеет вид (32).

Следовательно, получена задача (1)–(3), (25), (32) состоящая в определении элемента u минимизирующего на $U=R$ функционал (32) при ограничениях (1)–(3), (25). Задачу решаем приближенно с помощью итерационного процесса (14), (15).

Для определения (n+1)-го приближения u_{n+1} решения $u\in U$ этой задачи сопряженная задача определяется системой (33), двумя последними ограничениями системы (29) и четвертым уравнением системы (18) с соответствующей ей обобщенной задачей вида (19), (20). Получаем

$$\left\langle J'_{u_n},\Delta u_n\right\rangle=r_1\Delta u_np(r_1).$$

Следовательно $J'_{u_n}=\tilde{\Psi}_n$, где $\tilde{\Psi}_n=r_1p(r_1)$.

Пример 4. Полагаем d_1= 3/2, f_0= 3/2, а все остальные исходные данные совпадают с теми, что приведены в примере 2.

Для приведенных исходных данных задача решена с помощью градиентных методов (14), (15), где на каждом шаге определения (n+1)-го приближения u_{n+1} решения $u \in U$ прямая и сопряженная задачи решены с помощью изложенного алгоритма МКЭ с использованием кусочно-линейных функций метода конечных элементов путем минимизации соответствующего функционала энергии.

В табл. 4 приведены результаты вычислительного эксперимента.

ТАБЛИЦА 4

f_0=1,5 d_1=1,5	u_0	0	10	100	– 10	10	–10	10
	u_n	– 4	– 4	– 4	– 4	– 4	– 4	– 4
	e_n	$-1*10^{-14}$	$-4*10^{-14}$	$3*10^{-14}$	$-3*10^{-14}$	$3*10^{-15}$	$-2*10^{-13}$	$-3*10^{-13}$
	h	0,25	0,25	0,25	0,1	0,1	0,01	0,01
	n	2	2	2	2	2	2	2

Заключение. На основе теории оптимального управления построены явные выражения градиентов функционалов-невязок идентификации параметров термоупругого деформирования кругового цилиндра. Решены модельные примеры.

В.С. Дейнека, А.А. Аралова

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТОВСТОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

Розглянуто питання розв'язання за допомогою градієнтних методів, обернених крайових задач для термопружного деформованого порожнистого товстого циліндра. Представлені результати розв'язання деяких модельних обернених крайових задач.

V.S. Deineka, A.A. Aralova

NUMERICAL SOLUTION TO INVERSE BOUNDARY PROBLEMS OF AXISYMMETRIC THERMAL-ELASTIC LONG THICK HOLLOW CYLINDER DEFORMATION

The problem of solution to inverse problems for thermal-elastic deformation of thick hollow cylinder using gradient methods is considered. The results of solution to sample inverse boundary problems are presented.

1. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. – Киев: Наук. думка, 2009. – 640 с.
2. *Дейнека В.С.* Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2005. – 364 с.
3. *Sergienko I.V., Deineka V.S.* Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. – New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. – 400 p.
4. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
5. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Идентификация параметров задачи о напряженно-деформированном состоянии многокомпонентного упругого тела с включением // Прикладная механика. – 2010. – **46**. – № 4. – С. 14 – 24.

6. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Идентификация параметров задач упругого деформирования // Проблемы прочности. – 2010. – № 5. – С. 101–126.
7. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Решение комплексных обратных задач термоупругости // Проблемы управления и информатики. – 2007. – № 5. – С. 64 –87.
8. *Дейнека В.С., Аралова А.А.* Численное решение обратных краевых задач осесимметричного деформирования длинного толстого полого цилиндра // Компьютерная математика. – 2011. – № 1. – С. 3–12.
9. *Коваленко А.Д.* Термоупрогость. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
10. *Мотовилевец И.А., Козлов В.И.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 1. Термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264 с.
11. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Идентификация термонапряженного состояния составного цилиндра по известным смещениям // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 5. – С. 25 –52.
12. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1977. – 348 с.
13. *Дейнека В.С.* Вычислительные алгоритмы повышенного порядка точности для условно-корректной задачи термоупругости // Компьютерная математика. – 2007. – № 1. – С. 3–12.

Получено 15.12.2010

Об авторах:

Дейнека Василий Степанович,
доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Украины,
заведующий отделом Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
e-mail vdeineka@ukr.net

Аралова Альбина Андреевна,
младший научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
e-mail aaasquirrel@ukr.net