

Член-кореспондент НАН України **В. А. Даниленко,**
С. І. Скуратівський

Солітоноподібні хвилі в нерівноважних середовищах

Досліджуються хвильові розв'язки математичної моделі нерівноважного середовища, яка є одновимірною системою рівнянь гідродинаміки, замкненою нелокальним динамічним рівнянням стану. За допомогою методів якісного аналізу показано, що динамічна система, яка описує хвильові розв'язки моделі, має гомоклінічні розв'язки шильніковського типу, в околі яких виникають періодичні та хаотичні атрактори або багатооб'їдні гомоклінічні петлі при зміні параметрів моделі.

На сьогодні нерівноважні середовища різної природи є об'єктами численних досліджень через їх здатність до формування часово-просторових структур [1–3]. У даній роботі вивчається: як врахування слабкої нерівноважності середовища у поєднанні з фізичною його нелінійністю впливає на появу локалізованих хвильових режимів різних видів та їх біфуркації залежно від параметрів моделі? Розглядається математична модель нерівноважного середовища [3, 4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} - V_0 \frac{\partial u}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} + V_0 \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \left(\frac{V_0}{V}\right)^2 \left(-\tau_{TP} \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{\tau_{TP}} \frac{\partial V}{\partial t}\right) + \omega_0^2 V_0^{-1} \left(\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\Gamma_{V_0}} - 1\right) &= \\ &= \left(p - p_0 + \tau_{TV} \frac{\partial p}{\partial t} - \tau_{TP} \tau_{TV} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \tau_{TP}^2 \tau_{TV} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3}\right) b, \end{aligned} \quad (1)$$

де V – питомий об'єм; u – швидкість; p – тиск; $\tau_{TP} = \tau_{TV} \chi_{T_0} \chi_{T_\infty}^{-1}$, де $\chi_{T_0} = V_0 c_{T_0}^{-2}$, χ_{T_0} , χ_{T_∞} – ізотермічні коефіцієнти стиснення, τ_{TP} , τ_{TV} – часи релаксації; $\omega_0^2 = c_{S_0}^2 b \alpha_0 T_0 \gamma_0^{-1}$, де α_0 – коефіцієнт теплового розширення, γ_0 – показник політропи; $b = V_0 \chi_{T_\infty} \tau_{TV}^{-1} \tau_{TP}^{-1}$; Γ_{V_0} – коефіцієнт Грюнайзена; c_{S_0} , c_{T_0} – швидкості звуку в середовищі. Нульові індекси – характеристики середовища в рівноважному стані.

Виконаємо знерозмірення системи (1), використовуючи масштабне перетворення $t = t_0 \bar{t}$, $r = u_0 t_0 \bar{r}$, $V = V_0 \bar{V}$, $u = u_0 \bar{u}$, $p = p_0 + u_0^2 V_0^{-1} \bar{p}$ (тут t_0 , u_0 , V_0 є характерними величинами середовища). Тоді модель (1) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\delta \tau Q}{V^2} \left(-\tau^2 Q^2 \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} + \tau Q \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial V}{\partial t}\right) + \kappa \left(\frac{1}{V^n} - 1\right) &= p + \tau \frac{\partial p}{\partial t} - \tau^2 Q \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \tau^3 Q^2 \frac{\partial^3 p}{\partial t^3}, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\delta = \left(\frac{c_{T_0}}{u_0}\right)^2, \quad Q = \frac{\chi_{T_0}}{\chi_{T_\infty}}, \quad \kappa = \left(\frac{c_{S_0}}{u_0}\right)^2 \frac{\alpha_0 T_0}{\gamma_0}, \quad n = \Gamma_{V_0}, \quad \tau = \frac{\tau_{TV}}{t_0}.$$

Розглянемо випадок, коли $n = 1$. Хвильовий розв'язок системи (2) визначається виразами

$$V = V(\xi), \quad u = U(\xi), \quad p = P(\xi), \quad \xi = r - Dt. \quad (3)$$

Отже, з перших двох рівнянь системи (2) отримуємо

$$V = V_0 - \frac{1}{D}U, \quad P = P_0 + DU = \kappa \left(\frac{1}{V_0} - 1 \right) + DU$$

та динамічну систему

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\xi} &= X, & \frac{dX}{d\xi} &= Y, \\ \frac{dY}{d\xi} &= -\frac{1}{DQ\tau}Y - \frac{1}{(DQ\tau)^2}X + F(U), \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$F(U) = \frac{U(U - DV_0)(\kappa + DV_0\{U - DV_0\})}{D^4Q^2\tau^3V_0(-\delta Q + (U - DV_0)^2)} \quad (-\delta Q + (U - DV_0)^2 \neq 0).$$

Зазначимо, що система (4) в асимптотичних випадках збігається з динамічною системою, яка описує хвильові розв'язки рівняння Курамото–Сивашинського $u_t + auu_x + bu_{xx} + cu_{xxx} + du_{xxxx} = 0$ [5, 6].

Стационарні точки системи (4) мають координати

$$O(0; 0; 0), \quad A(DV_0; 0; 0;), \quad B\left(DV_0 - \frac{\kappa}{DV_0}; 0; 0\right),$$

площина розриву визначається рівнянням $U = DV_0 \pm \sqrt{\delta Q}$. Стационарна точка B може потрапляти в цю площину при

$$\kappa = DV_0\sqrt{\delta Q}. \quad (5)$$

Тип стационарних точок визначається власними значеннями матриці лінеаризованої системи

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, для всіх точок $\alpha_2 = -(DQ\tau)^{-2}$, $\alpha_3 = -DQ\tau$.

$$\text{Для точки } O: \quad \alpha_1 = \frac{D^2V_0^2 - \kappa}{D^3Q^2\tau^3(D^2V_0^2 - \delta Q)}.$$

$$\text{Для точки } A: \quad \alpha_1 = \frac{-\kappa}{D^3Q^3\tau^3\delta}.$$

$$\text{Для точки } B: \quad \alpha_1 = \frac{(D^2V_0^2 - \kappa)\kappa}{D^3Q^2\tau^3(D^2V_0^2\delta Q - \kappa^2)}.$$

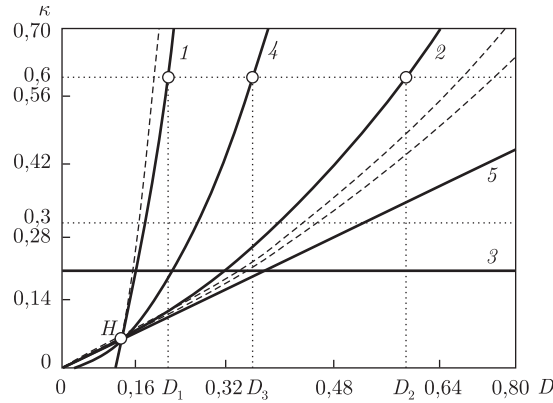


Рис. 1. Структура параметричної площини $(D; \kappa)$ при $\delta = 0,2$, $Q = 0,3$, $\tau = 0,5$, $V_0 = 2,3$, $D_1 = 0,187$, $D_2 = 0,607$, $D_3 = 0,337$. Лінії 1, 2, 3 – криві нейтральної стійкості (7) точок O , A , B ; лінія 4 – графік функції (8); лінія 5 – графік лінії (5)

З метою формулювання необхідних умов народження періодичних коливань у системі (4) проаналізуємо характеристичне рівняння матриці J : $\lambda^3 - \text{sp } J\lambda^2 + \sum_{i=1}^3 J_{ii}\lambda - \det J = 0$. Враховуючи особливий вигляд матриці J , характеристичне рівняння можна записати в такій формі: $\lambda^3 - \alpha_3\lambda^2 - \alpha_2\lambda - \alpha_1 = 0$. Тоді умовою наявності алгебраїчного рівняння третього степеня двох суто уявних коренів є виконання рівності $\det J = \text{sp } J \cdot \sum_{i=1}^3 J_{ii}$, з якого випливає зв'язок між параметрами

$$\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3 = 0.$$

Підставляючи значення α_i в останнє рівняння, отримуємо таке:

$$\begin{aligned} \text{для точки } O: \quad & D^2(1+Q)V_0^2 = (\delta + \kappa)Q; \\ \text{для точки } A: \quad & \delta = \kappa; \\ \text{для точки } B: \quad & \kappa^2(1+Q) = D^2QV_0^2(\delta + \kappa). \end{aligned} \quad (6)$$

Ці умови в площині параметрів D й κ зображаються лініями (кривими нейтральної стійкості), рівняння яких мають вигляд

$$\kappa = D^2 \frac{1+Q}{Q} V_0^2 - \delta, \quad \kappa = \frac{D^2 Q V_0^2 \pm \sqrt{(D^2 Q V_0^2)^2 + 4(1+Q)D^2 Q V_0^2 \delta}}{1+Q}. \quad (7)$$

До біфуркаційних ліній також віднесемо сукупність точок, які відповідають умові існування нульового власного значення матриці J : $\alpha_1 = 0$. Для точок O й B з цієї умови випливає:

$$\kappa = D^2 V_0^2. \quad (8)$$

Дослідимо структуру параметричної площини $(D; \kappa)$ при фіксованих значеннях параметрів $\delta = 0,2$, $Q = 0,3$, $\tau = 0,5$, $V_0 = 2,3$ (рис. 1). Для цього побудуємо графіки функцій (7) —

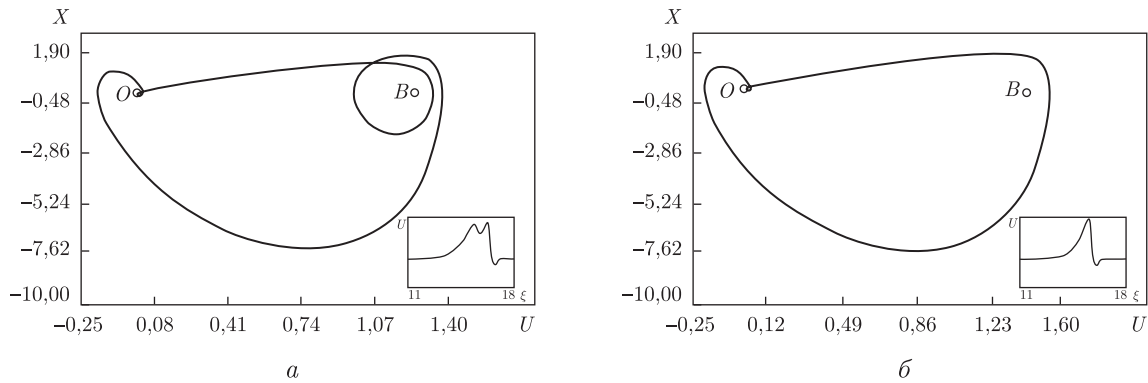


Рис. 2. Фазові портрети гомоклінічних петель при $\kappa = 0,6$ й $D = 0,7036786$ (а), $D = 0,761776$ (б)

кривих нейтральної стійкості критичних точок O й B системи (4), а також графік функції (8) — умову виродження матриці J . Проаналізуємо можливість перетину всіх трьох кривих на рис. 1 в одній точці. Для цього дослідимо систему алгебраїчних рівнянь

$$D^2(1+Q)V_0^2 = (\delta + \kappa)Q, \quad \kappa^2(1+Q) = D^2QV_0^2(\delta + \kappa), \quad \kappa = D^2V_0^2.$$

Легко перевірити, що вона сумісна та її додатний розв'язок є координатами точки перетину кривих $H(\delta Q; V_0^{-1}\sqrt{\delta Q})$. Дослідимо структуру розв'язків системи (4) при зміні параметрів κ й D з області, зображеної на рис. 1.

Випадок 1. Зафіксуємо $\kappa = 0,6$, тоді точка O має пару суто уявних власних значень при $D_1 = 0,187$, точка B — при $D_2 = 0,607$. В інтервалі $D_1 < D < D_2$ існує траєкторія, яка з'єднує стійку стаціонарну точку O з нестійкою точкою B . Періодичних або хаотичних розв'язків у фазовому просторі поблизу стаціонарних точок не виявлено.

Розглянемо динаміку системи (4) при $D \notin (D_1; D_2)$. При $D < D_1$ та $D > D_2$ в околі відповідних точок спостерігається поява граничних циклів у фазовому просторі системи, що відповідає існуванню періодичних розв'язків системи (4). Зміна параметра D у відповідних інтервалах спричинює зростання розмірів граничних циклів та каскад біфуркацій подвоєння періоду з утворенням хаотичних атракторів. При $0,7 < D < 0,755$ у фазовому просторі динамічної системи (4) локалізованих режимів не виявлено. Інший періодичний атрактор проявляється при $0,755 < D < 0,762$, зазнаючи біфуркацій подвоєння періоду з утворенням хаотичного атрактору.

При вивченні структури околу стаціонарних точок не менш важливим є дослідження поведінки сепаратрисних траєкторій, а саме, існування гомоклінічних петель сідлових точок. Пошук гомоклінічних петель у системі (4) проводився за допомогою числових методів. Оскільки власні значення матриці J при $D = 0,7036786$ у стаціонарній точці O [$\lambda = (1,824; -5,649 \pm 8,857i)$], то петля має нестійкий одновимірний багатовид та двовимірний стійкий із сідловою величиною $\Sigma = \text{Re}(\lambda_1) + \text{Re}(\lambda_{2,3}) = -3,825 < 0$. Інтегруючи з початковими умовами $\varepsilon \vec{v}$, де $\varepsilon = 10^{-10} \dots 10^{-14}$, \vec{v} — власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_1 > 0$, отримуємо траєкторію, яку в певному наближенні можна назвати гомоклінічною петлею (рис. 2, а). Нестійкий двовимірний багатовид точки B [власні значення $\lambda = (-12,275; 1,401 \pm 11,054i)$] частково захоплює гомоклінічну траєкторію точки O , що зумовлює існування на фазовому портреті (див. а на рис. 2) додаткового витка навколо точки B .

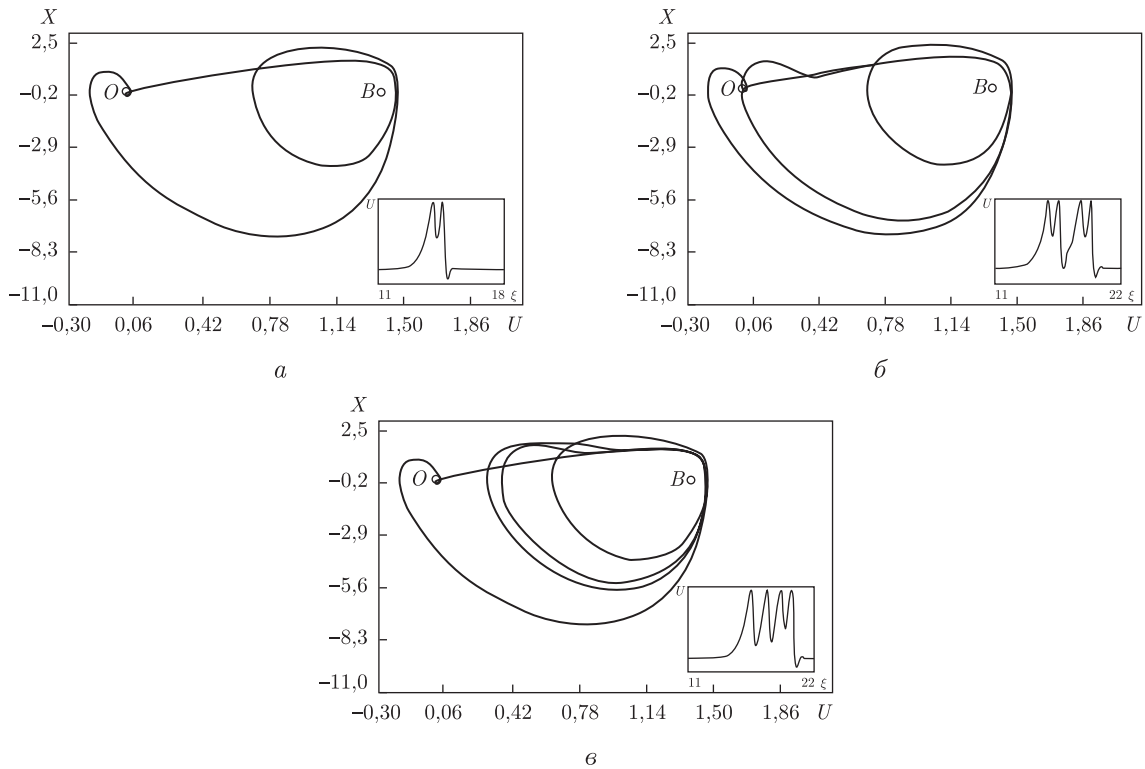


Рис. 3. Фазові портрети гомоклінічних петель ($\Sigma < 0$) при $\kappa = 0,6$ й $D = 0,7432618$ (а), $D = 0,7437897$ (б), $D = 0,7559667$ (в)

Аналогічно обчислювалась петля при $D = 0,761776$ з сідловою величиною $\Sigma = -3,506 < 0$ (див. б на рис. 2). У цьому випадку багатовиди точок O та B не взаємодіють і петля не має додаткових витків.

У параметричній площині $(D; \kappa)$ знайдені петлі утворюють зв'язні множини, позначені на рис. 1 пунктирними лініями. Виявилось, що ці геометричні місця точок також стягуються до точки H як і біфуркаційні лінії.

Порівняння фазових портретів петель рис. 2 свідчить про можливість існування в моделі (1) неklasичних солітоноподібних хвиль з кількома максимумами (багатогорбі). Детальний аналіз траєкторій, які починаються поблизу O показав, що окрім знайдених петель у фазовому просторі динамічної системи існують інші багатообхідні петлі (рис. 3). Оскільки для знайдених петель сідлова величина $\Sigma < 0$, то з петлі може народитись тільки один періодичний режим [7], що і спостерігається для петель рис. 2 й 3.

Випадок 2. Розглянемо структуру розв'язків динамічної системи (4) при $\kappa = 0,3$ та змінному D (див. рис. 1). Вивчення біфуркаційних діаграм при $\kappa = 0,3$ показує, що сценарії розвитку коливних режимів змінюються не істотно. Але при $D > \kappa / (V_0 \sqrt{\delta Q}) = 0,532$ (умова (5)) у частині фазового простору, де знаходяться стаціонарні точки A й B , розвивається граничний цикл. Його походження пов'язане з втратою точкою A стійкості поблизу кривої нейтральної стійкості при $\kappa > \delta = 0,2$. При цьому, як свідчать біфуркаційні діаграми, граничний цикл зазнає лише кількох біфуркацій періоду після чого коливання різко виходять на інший аттрактор, який зазнає біфуркацій з утворенням хаотичного аттрактору. Такий сценарій розвитку коливань вказує на можливість існування гомоклінічної петлі.

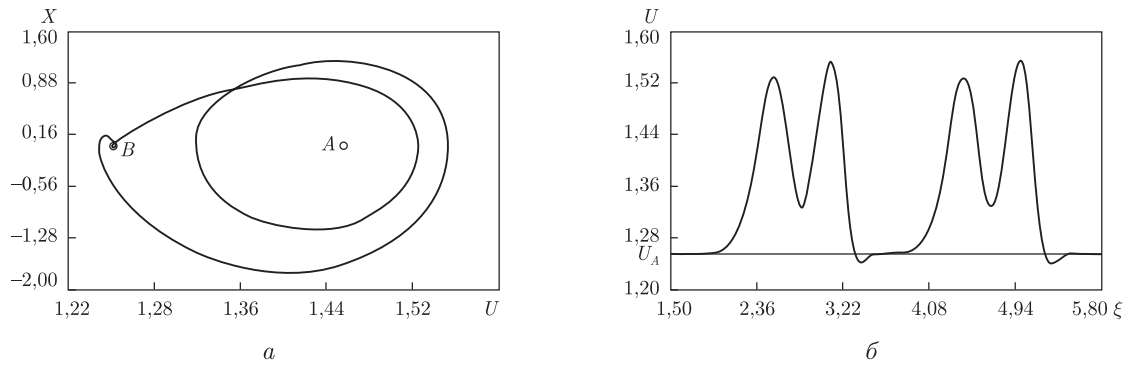


Рис. 4. Гомоклінічна петля (а) при $\kappa = 0,3$ й $D = 0,6352306$ ($\Sigma > 0$) та профіль координати $U(\xi)$ (б)

Гомоклінічну петлю було виявлено для точки B при $\kappa = 0,3$ й $D = 0,6352306$ (рис. 4, а). Для петлі — $\lambda = (12,551; -11,523 \pm 16,328i)$, сідлова величина $\Sigma = 1,028 > 0$. Це означає наявність в її околі складної структури траєкторій, зокрема нетривіальної гіперболічної підмножини [7], яка формує хаотичний атрактор. Для цього випадку в роботах [8–10] описано біфуркації в околі петлі та показано структурну нестійкість однопараметричних систем поблизу петлі. Зокрема, проаналізована можливість утворення багатообхідних петель, які повторюють форму основної петлі. У випадку системи (4) було виявлено таку двообхідну петлю (див. рис. 4).

Таким чином, динамічна система (4) має періодичні, мультиперіодичні, хаотичні, гетероклінічні та гомоклінічні розв'язки. Залежно від сідлової величини гомоклінічні петлі зазнають біфуркацій з утворенням періодичних режимів, багатообхідних петель або хаотичних атракторів. Причиною існування різноманітних хвильових режимів є нерівноважність середовища, яка відображена в динамічному рівнянні стану моделі (1).

1. *Вахненко В. А., Даниленко В. А., Кулич В. В.* Элементы теории самоорганизации и нелинейных волновых процессов в природных средах со структурой / НАН Украины. Ин-т геофизики им. С. И. Субботина. – Препр. – Киев, 1991. – 44 с.
2. *Пригожин И., Кондепуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. – Москва: Мир, 2002. – 461 с.
3. *Danylenko V. A., Danevych T. B., Makarenko O. S. et al.* Self-organization in nonlocal non-equilibrium media. – Kyiv: S. I. Subbotin Ins-te of Geophys. NAS of Ukraine, 2011. – 333 p.
4. *Даневич Т. Б., Даниленко В. А.* Точні аналітичні розв'язки нелінійних рівнянь динаміки релаксуючих середовищ з просторовою та часовою нелокальністю // Доп. НАН України. – 2004. – № 3. – С. 110–114.
5. *Демехин Е. А., Шкадов В. Я.* О солитонах в диссипативных средах // Гидродинамика и теплообмен течений жидкости со свободной поверхностью / Сб. науч. тр. под ред. И. Р. Шрейбера. – Новосибирск: Ин-т техн. физ. Сиб. отд-ния АН СССР, 1985. – С. 32–48.
6. *Кудряшов Н. А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва; Ижевск: Ин-т компьютер. исследований, 2004. – 360 с.
7. *Шильников Л. П.* Теория бифуркаций и модель Лоренца // Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – Москва: Мир, 1980. – С. 317–336.
8. *Gonchenko S. V., Turaev D. V., Gaspard P., Nicolis G.* Complexity in the bifurcation structure of homoclinic loops to a saddle-focus // Nonlinearity. – 1997. – **10**. – P. 409–423.
9. *Wiggins S.* Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. – Berlin: Springer, 1990. – 672 p.
10. *Feroe J. A.* Homoclinic orbits in a parametrized saddle-focus system // Phys. D. – 1993. – **62**. – P. 254–262.

Відділення геодинаміки вибуху
 Інституту геофізики ім. С. І. Субботіна
 НАН України, Київ

Надійшло до редакції 06.03.2012

Член-корреспондент НАН Украины **В. А. Даниленко, С. И. Скуратовский**

Солитоподобные волны в неравновесных средах

Исследуются волновые решения математической модели неравновесной среды, которая представляет собой одномерную систему уравнений гидродинамики, замкнутую нелокальным уравнением состояния. С помощью методов качественного анализа показано, что динамическая система, описывающая волновые решения модели, имеет гомоклинические решения шильниковского типа, в окрестности которых возникают периодические и хаотические аттракторы или многообходные гомоклинические петли при изменении параметров модели.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. A. Danylenko, S. I. Skurativskyy**

Soliton-like waves in nonequilibrium media

The article deals with the wave solutions to a mathematical model for nonequilibrium media, which is a one-dimensional system of hydrodynamical equations closed by the nonlocal dynamical equation of state. Using the methods of qualitative analysis, it is shown that the dynamical system describing the wave solutions of the model possesses homoclinic solutions of the Shilnikov type. In a vicinity of these trajectories, the periodic and chaotic attractors or multi-circuit homoclinic loops are appear, when the parameters of the model are varied.