ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2012

МЕХАНІКА

УДК 539.3

В. Н. Бастун

К оценке нижней границы интервала рассеяния предельных напряжений в элементах оболочечных конструкций

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

Предложен подход к оценке нижней границы интервала рассеяния предельных напряжений в элементах оболочечных конструкций в вероятностной постановке на основе корреляционной связи параметров разброса границы прочности с характеристиками пластичности материала. В качестве примера рассмотрена тонкостенная круговая цилиндрическая оболочка, изготовленная из высокопрочной стали мартенситного класса и нагруженная осевой растягивающей силой и внутренним давлением.

В процессе эксплуатации материал многих элементов конструкций в результате воздействия ряда факторов (усталость при циклическом деформировании, наличие агрессивной окружающей среды, накопление микроповреждений) претерпевает структурные изменения, приводящие к деградации его механических свойств, увеличению разброса значений предельных напряжений, охрупчиванию. Сказанное подтверждается увеличением в результате наработки разброса характеристик твердости [1], которые тесно коррелируют с характеристиками прочности. Заметим, что охрупчивание материала может быть обусловлено также работой конструкции в условиях сложного напряженного состояния [2, 3] и низких температур [4], воздействием радиационного облучения [5, 6]. Вследствие возможности существенного увеличения интервала разброса прочностных свойств материала в процессе эксплуатации конструкции актуальной является оценка величины этого интервала, что позволяет устанавливать величину запаса прочности по отношению к нижнему значению предела прочности, т. е. по нижней границе прочности, а не по отношению к его среднему значению.

Ниже рассматривается подход к оценке нижней границы интервала рассеяния предельных (разрушающих) напряжений в элементах оболочечных конструкций в вероятностной постановке на основе корреляционной связи параметров разброса предела прочности с пластичностью материала. Полагаем, что значения предела прочности $\sigma_{\text{в}}$ есть случайные величины, их рассеяние является следствием статистического распределения дефектов и подчиняется нормальному закону распределения, а величина интервала рассеяния определяется уровнем пластичности материала. Согласно этому закону, функция F распределения случайной величины x имеет вид [7]

$$F(x) = \frac{1}{D_x\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(x-\overline{m}_x)^2}{2D_x^2}\right] dx. \tag{1}$$

Здесь $\overline{m}_x$ — математическое ожидание; D_x — среднее квадратичное отклонение (стандарт).

Значения этих параметров находятся экспериментально на основании испытаний представительной партии образцов по формулам

$$\overline{m}_x = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i n_i}{N}; \qquad D_x = \left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i - \overline{m}_x)^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i - 1}\right]^{1/2}, \tag{2}$$

где n_i — абсолютная частота в данном интервале значений x_i.

Построение нижней границы интервала рассеяния предельных напряжений рассмотрим на примере гладкой круговой цилиндрической оболочки, нагруженной осевой растягивающей силой P и внутренним давлением p. При этом в стенке оболочки возникает двухосное напряженное состояние, характеризуемое продольным σ_z и поперечным σ_θ напряжениями, которые определяются по формулам

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi(D-h)h} + \frac{p(D-2h)}{2h}, \qquad \sigma_\theta = \frac{p(D-2h)}{2h}, \tag{3}$$

где D — наружный диаметр оболочки; h — толщина стенки.

Полагая, что в исходном состоянии материал изотропен и наступление разрушения определяется условием постоянства энергии формоизменения, граница интервала рассеяния значений предельных напряжений будет описываться уравнением

$$\sigma_z^2 - \sigma_z\sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = \sigma_{\text{в}}^2. \tag{4}$$

Здесь $\sigma_{\text{в}}$ — предел прочности материала. Тогда нижнюю границу интервала рассеяния предельных напряжений можно построить, вычитая из каждой точки границы прочности (4) величину вероятностного интервала рассеяния δ. Величина интервала рассеяния в рассматриваемом случае напряженного состояния определяется как $KD_{\sigma_{\text{вэ}}}(\overline{\varepsilon}_{\text{э}}^{\text{p}})$, где $D_{\sigma_{\text{вэ}}}$ — стандарт предельного (разрушающего) эквивалентного напряжения $\sigma_{\text{вэ}}$, являющийся функцией предельного значения эквивалентной пластической деформации $\overline{\varepsilon}_{\text{э}}^{\text{p}}$; K — коэффициент, характеризующий величину разброса предельных напряжений и определяемый принятым вероятностным уровнем события Q. Так, например, при вероятности события $Q = 95\%$ $K = 2$, а при $Q = 99\%$ $K = 3$ [8]. Предельное эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{вэ}}$ и эквивалентная пластическая деформация $\overline{\varepsilon}_{\text{э}}^{\text{p}}$ определяются по формулам [3]

$$\sigma_{\text{вэ}} = [(\sigma_z^{\text{пр}})^2 - \sigma_z^{\text{пр}}\sigma_\theta^{\text{пр}} + (\sigma_\theta^{\text{пр}})^2]^{1/2}, \tag{5}$$

$$\overline{\varepsilon}_{\text{э}}^{\text{p}} = \frac{2}{\sqrt{3}}[(\overline{\varepsilon}_z^p)^2 + \overline{\varepsilon}_z^p\overline{\sigma}_\theta^p + (\overline{\varepsilon}_\theta^p)^2]^{1/2}, \tag{6}$$

где $\sigma_z^{\text{пр}}$ и $\sigma_\theta^{\text{пр}}$ — предельные значения осевого и окружного напряжений; $\overline{\varepsilon}_z^p$ и $\overline{\varepsilon}_\theta^p$ — равномерные составляющие остаточных продольной и поперечной деформаций. Заметим, что в случае одноосного растяжения, например, в направлении оси z (при этом $\sigma_\theta = 0$ и $\overline{\varepsilon}_\theta^p = -(1/2)\overline{\varepsilon}_z^p$) имеем $\sigma_{\text{вэ}} = \sigma_z^{\text{пр}} = \sigma_{\text{в}}$, $\overline{\varepsilon}_{\text{э}}^{\text{p}} = \overline{\varepsilon}_z^p$.

Зависимость приведенного стандарта $\overline{D}_{\sigma_{\text{вэ}}} = D_{\varepsilon_{\text{вэ}}}/D_{\varepsilon_{\text{вэ}|\overline{\varepsilon}_{\text{э}}^{\text{p}}=0{,}03}}$ от эквивалентной пластической деформации описывается полученным эмпирическим путем уравнением вида

$$\overline{D}_{\sigma_{\text{вэ}}} = \frac{1}{a + b\overline{\varepsilon}_{\text{э}}^{\text{p}}}, \tag{7}$$

где a и b — коэффициенты, зависящие от свойств материала. Здесь величина $\overline{\varepsilon}_{\text{э}}^{\text{p}}$ является функцией вида напряженного состояния q, характеризуемого соотношением σ_z/σ_θ, и может быть определена из условия нарушения устойчивости процесса упруго-пластического деформирования.

Нарушение устойчивости процесса деформирования в рассматриваемом случае произойдет при выполнении одного из условий: $dP = 0$ или $dp = 0$. Величины P и p, полагая $h \ll D$, определяются из (3) следующим образом:

$$P = \frac{\pi}{2}(2q-1)hD\sigma_\theta; \qquad p = \frac{2h\sigma_\theta}{D}.$$

Тогда при условии $dP = 0$ получаем:

$$\frac{dD}{D} + \frac{dh}{h} + \frac{d\sigma_\theta}{\sigma_\theta} = 0. \tag{8}$$

Вводя обозначения $dD/D = d\varepsilon_\theta^p$ и $dh/h = d\varepsilon_r^p$ (здесь $d\varepsilon_r^p$ — приращение радиальной составляющей пластической деформации), выражение (8) представим в виде

$$d\varepsilon_\theta^p + d\varepsilon_r^p + \frac{d\sigma_\theta}{\sigma_\theta} = 0. \tag{9}$$

С учетом условия несжимаемости равенство (9) упростится и запишется так:

$$d\varepsilon_\theta^p = \frac{d\sigma_\theta}{\sigma_\theta}. \tag{10}$$

Из (6) следует

$$\varepsilon_\theta^p = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\overline{\varepsilon}_{\text{э}}^{\text{p}}}{\sqrt{\left(\dfrac{\overline{\varepsilon}_z^p}{\overline{\varepsilon}_\theta^p}\right)^2 + \dfrac{\overline{\varepsilon}_z^p}{\overline{\varepsilon}_\theta^p} + 1}},$$

отсюда

$$d\varepsilon_\theta^p = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{d\overline{\varepsilon}_{\text{э}}^{\text{p}}}{\sqrt{\left(\dfrac{\overline{\varepsilon}_z^p}{\overline{\varepsilon}_\theta^p}\right)^2 + \dfrac{\varepsilon_z^p}{\overline{\varepsilon}_\theta^p} + 1}}. \tag{11}$$

Связь между величинами $\overline{\varepsilon}_z^p/\overline{\varepsilon}_\theta^p$ и $\sigma_z/\sigma_\theta = q$ установим, распространяя форму записи обобщенного закона Гука на пластическую область и полагая коэффициент поперечной деформации равным 0,5. Тогда получим

$$\frac{\overline{\varepsilon}_z^p}{\overline{\varepsilon}_\theta^p} = \frac{2q-1}{2-q}, \tag{12}$$

откуда

$$q = \frac{2\overline{\varepsilon}_z^p + \overline{\varepsilon}_\theta^p}{\overline{\varepsilon}_z^p + 2\overline{\varepsilon}_\theta^p}. \tag{13}$$

Отсюда на основании (11) с учетом (12) следует

$$\overline{\varepsilon}_z^p = \frac{(2q-1)\overline{\varepsilon}_э^p}{2\sqrt{q^2-q+1}}; \qquad d\overline{\varepsilon}_z^p = \frac{(2q-1)d\overline{\varepsilon}_э^p}{2\sqrt{q^2-q+1}}. \tag{14}$$

Подставляя в (10) значение $d\overline{\varepsilon}_z^P$ из (14), а также σ_θ, найденное из (5), а также соответствующее значение $d\sigma_\theta$, находим:

$$\frac{d\sigma_э}{d\overline{\varepsilon}_э^p} = \frac{2q-1}{2\sqrt{q^2-q+1}}. \tag{15}$$

Чтобы избежать неопределенности при $q \to \infty$, введем обозначение $q = 1/m$. Тогда на основании (15) получим

$$\frac{d\sigma_э}{d\overline{\varepsilon}_э^p} = \frac{(2-m)\sigma_э}{2\sqrt{m^2-m+1}}. \tag{16}$$

Условию $dp = 0$ соответствует уравнение

$$\frac{dh}{h} + \frac{d\sigma_\theta}{\sigma_\theta} - \frac{dD}{D} = 0. \tag{17}$$

Согласно принятым обозначениям и условию несжимаемости, получим

$$d\varepsilon_z^p + 2d\varepsilon_\theta^p = \frac{d\sigma_\theta}{\sigma_\theta}. \tag{18}$$

Подставляя сюда значения $d\overline{\varepsilon}_z^p$, $d\overline{\varepsilon}_\theta^p$, $d\sigma_\theta$ и σ_θ, после преобразований получаем

$$\frac{d\sigma_э}{d\overline{\varepsilon}_э^p} = \frac{3\sigma_э}{2\sqrt{q^2-q+1}}. \tag{19}$$

Область применимости равенств (16) и (19) установим из их совместного решения, откуда следует, что их общей точкой является $q = 2$.

Как видно, нарушение устойчивости процесса деформирования происходит при уровнях напряжений, соответствующих различным значениям касательного модуля. Полагая, что

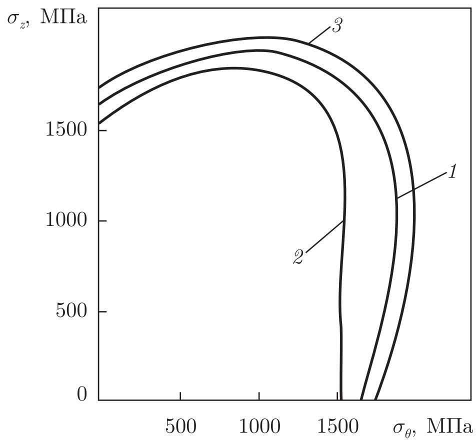

Рис. 1. Нижние границы предельных напряжений в оболочке при разных уровнях пластичности материала

упрочнение материала описывается степенным законом, выражения (16) и (19) представим в конечном виде [3]:

$$\begin{aligned} &\bar{\varepsilon}_\theta^p = \frac{2}{3}\sqrt{q^2 - q + 1}\bar{\varepsilon}^p \qquad \left(q = \frac{\sigma_z}{\sigma_\theta} = 0, \ldots, 2\right); \\ &\bar{\varepsilon}_z^p = \frac{2\sqrt{m^2 - m + 1}}{2 - m}\bar{\varepsilon}^p \qquad \left(m = \frac{1}{q};\ q = 2, \ldots, \infty\right), \end{aligned} \tag{20}$$

где $\bar{\varepsilon}^p$ — равномерная составляющая остаточного удлинения при одноосном растяжении.

Используя полученные соотношения, определим в качестве примера нижнюю границу интервала рассеяния предельных напряжений применительно к рассмотренной выше оболочке, изготовленной из высокопрочной стали 28Х3СНМВФА мартенситного класса, в области $\sigma_z > 0$, $\sigma_\theta > 0$. Эта сталь имеет следующие характеристики [3]: $\sigma_{\text{в}} = 1740$ МПа, $D_{\sigma_{\text{вэ}}|_{\bar{\varepsilon}^p = 0{,}03}} = 29$ МПа, $a = 0{,}27$; $b = 22{,}6$. Построенные при $K = 3$ описанным выше способом нижние границы интервала рассеяния предельных напряжений, соответствующие различным уровням пластичности $\bar{\varepsilon}^p$, приведены на рис. 1, где *1*, *2* — нижние границы соответственно при $\bar{\varepsilon}^p = 3$ и 0,5%, *3* — граница, построенная по условию (4), ($\sigma_{\text{в}}$ — среднее значение предела прочности). Как видно, при снижении пластичности нижняя граница указанного интервала сокращается, причем в разных направлениях неодинаково. Наиболее интенсивное ее сокращение наблюдается при соотношении напряжений $\sigma_z/\sigma_\theta = 0{,}5$, которое соответствует минимальной пластичности. Отмеченная закономерность согласуется с экспериментальными данными, приведенными в работах [3, 4].

Таким образом, на основании проведенного исследования можно отметить, что рассмотренный подход позволяет определять расчетным путем в вероятностной постановке нижнюю границу интервала рассеяния разрушающих напряжений в элементах оболочечных конструкций в зависимости от уровня пластичности материала, из которого они изготовлены.

1. *Лебедев А. А., Музыка Н. Р., Волчек Н. Л.* Определение поврежденности конструкционных материалов по параметрам рассеяния характеристик твердости // Пробл. прочности. – 2002. – № 4. – С. 5–12.
2. *Бастун В. Н.* О влиянии геометрической формы конструкции на ее несущую способность // Прикл. механика. – 1973. – **9**, № 8. – С. 57–63.

3. *Каминский А. А., Бастун В. Н.* Деформационное упрочнение и разрушение металлов при переменных процессах нагружения. – Киев: Наук. думка, 1985. – 165 с.
4. *Lebedev A. A., Kovalchuk B. I., Giginyak F. F., Lamashevsky V. P.* Handbook of mechanical properties of structural materials at a complex stress state. – New York: Begell, 2001. – 500 p.
5. *Шалаев А. Н.* Действие ионизирующих излучений на металлы и сплавы. – Москва: Атомиздат, 1967. – 210 с.
6. *Бабич Д. В.* О напряженно-деформированном состоянии тонкостенных конструкций при радиационных воздействия // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 8. – С. 95–103.
7. *Болотин В. В.* Статистические методы в строительной механике. – Москва: Госстройиздат, 1961. – 201 с.
8. *Румшиский Л. Э.* Математическая обработка результатов эксперимента. – Москва: Наука, 1971. – 265 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 15.02.2012

В. М. Бастун

До оцінки нижньої межі інтервалу розсіяння граничних напружень в елементах оболонкових конструкцій

Запропоновано підхід до оцінки нижньої межі інтервалу розсіяння граничних напружень в елементах оболонкових конструкцій у ймовірнісній постановці на основі кореляційного зв'язку параметрів розкиду межі міцності з характеристиками пластичності матеріалу. Як приклад розглянуто тонкостінну кругову циліндричну оболонку, виготовлену з високоміцної сталі мартенситного класу та навантажену осьовою розтягальною силою і внутрішнім тиском.

V. N. Bastun

On the estimation of the lower boundary of a dispersion interval of limiting stresses in shell structure elements

An approach to the estimation in the probabilistic statement of the lower boundary of a dispersion interval of limiting stresses in elements of shell structures is proposed. The approach is based on a correlation of the dispersion parameters of an ultimate strength with plasticity characteristics of a material. As an example, a thin-walled circular cylindrical shell is considered. The shell, which is made of a high-strength martensitic steel, is acted upon by the axial tensile force and the internal pressure.