УДК 519.1

Б. В. Олійник

Самоподібність і вінцеві добутки метричних просторів

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Розглянуто конструкцію нескінченно ітерованого вінцевого добутку метричних просторів. Встановлено умови, за яких нескінченно ітерований вінцевий степінь скінченного метричного простору є самоподібним, а також доведено, що група ізометрій діє на ньому самоподібно. Показано, що для довільної скінченної групи нескінченно ітерований вінцевий степінь цієї групи реалізується як повна група ізометрій самоподібного метричного простору з самоподібною дією.

1. Нехай $s\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — монотонно зростаюча неперервна функція, $s(0) = 0$, що називається шкалою. Трансформацією метричного простору (X, d_X) за допомогою шкали s називається простір $(X, s(d_X))$, в якому відстань d_X замінюється відстанню $s(d_X)$. В загальному випадку $s(d_X)$ є напівметрикою, тобто для неї може не виконуватись нерівність трикутника. Якщо $s(d_X)$ є метрикою, то трансформація називається метричною. Це матиме місце зокрема тоді, коли похідна шкали s' не зростає (див. [1]).

Поняття метричної трансформації було введено Л. М. Блюменталем у 30-х роках минулого століття (див. [2]). Дослідженню метричних трансформацій просторів присвячено багато праць, зокрема метричні трасформації евклідових просторів у підпростори гільбертового простору вивчались в роботах Д. фон Неймана і І. Шонберга [3, 4].

Відповідно до роботи [5] метричні простори (X, d_X) і (Y, d_Y) називатимемо ізоморфними, якщо існують бієкція $g\colon X \to Y$ і шкала s такі, що для довільних u, $v \in X$ виконується рівність

$$d_X(u, v) = s(d_Y(g(u), g(v))),$$

тобто метричний простір X ізометричний трансформації простору (Y, d_Y) за допомогою шкали s. У цьому випадку простір (X, d_X) позначатимемо як $s(Y)$. Якщо простір (X, d_X) ізоморфний деякому підпростору простору (Y, d_Y), то говоритимемо, що (X, d_X) ізоморфно занурюється в (Y, d_Y). Ізоморфні метричні простори є топологічно еквівалентними, а їх групи ізометрій ізоморфні.

2. Нехай простір (X, d_X) є рівномірно дискретним, тобто існує таке додатне число r, що для довільних точок x_1 і x_2 простору X, $x_1 \neq x_2$, виконується нерівність $d_X(x_1, x_2) \geqslant r$. Припустимо, що простір (Y, d_Y) обмежений. Зафіксуємо деяку функцію-шкалу $s(t)$, для якої виконується нерівність

$$\operatorname{diam}(s(Y)) < r. \tag{1}$$

На множині $X \times Y$ розглянемо метрику d_s, яку задамо таким чином:

$$d_s((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} d_X(x_1, x_2), & \text{якщо} \quad x_1 \neq x_2, \\ s(d_Y(y_1, y_2)), & \text{якщо} \quad x_1 = x_2. \end{cases}$$

Метричний простір $(X \times Y, d_s)$ називається *вінцевим добутком* метричних просторів X і Y та позначається $X \operatorname{wr} Y$ (див. [6]). Зауважимо, що вінцевий добуток $X \operatorname{wr} Y$ містить ізоморфну копію кожного з просторів X і Y.

Нехай тепер (X_1, d_1), (X_2, d_2), $\ldots$ — нескінченна послідовність рівномірно дискретних метричних просторів скінченного діаметра, а r_1, r_2, $\ldots$ — нескінченна послідовність додатних дійсних чисел така, що для довільних точок $a, b \in X_i$, $a \neq b$, справедливі нерівності $d_i(a,b) \geqslant r_i$, $i \geqslant 1$.

Оскільки простори (X_1, d_1), (X_2, d_2), $\ldots$ рівномірно дискретні і скінченного діаметра, то існує послідовність шкал $\alpha = (s_2(x), s_3(x), s_4(x), \ldots)$, для якої справедливі нерівності

$$\operatorname{diam}(s_2(X_2)) < r_1, \qquad \operatorname{diam}(s_i(X_i)) < s_{i-1}(r_{i-1}), \qquad i \geqslant 3. \tag{2}$$

На декартовому добутку множин $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ визначимо метрику ρ_α за правилом

$$\rho_\alpha((a_1, a_2, \ldots), (b_1, b_2, \ldots)) =$$
$$= \begin{cases} d_1(a_1, b_1), & \text{якщо } a_1 \neq b_1, \\ s_2(d_2(a_2, b_2)), & \text{якщо } a_1 = b_1 \text{ and } a_2 \neq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ s_n(d_n(a_n, b_n)), & \text{якщо } a_1 = b_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n \neq b_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases} \tag{3}$$

Означення 1. Метричний простір $\left(\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i, \rho_\alpha\right)$ називатимемо нескінченно ітерованим вінцевим добутком метричних просторів (X_1, d_1), (X_2, d_2), $\ldots$ з послідовністю шкал α і позначатимемо $\operatorname*{wr}\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha) X_i$.

Нескінченно ітерований вінцевий добуток метричних просторів (X_1, d_1), (X_2, d_2), $\ldots$ гомеоморфний проективній границі скінченно ітерованих вінцевих добутків метричних просторів X_1, $X_1 \operatorname*{wr}\limits_{s_2} X_2$, $(X_1 \operatorname*{wr}\limits_{s_2} X_2) \operatorname*{wr}\limits_{s_3} X_3$, $\ldots$ (див. [7]) з природними проекціями.

Конструкція простору $\operatorname*{wr}\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha) X_i$ є єдиною з точністю до ізоморфізму. Це випливає з такого твердження.

Твердження 1. *Нехай α_1 і α_2 — дві послідовності шкал такі, що виконуються нерівності* (2). *Тоді метричні простори $\operatorname*{wr}\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha_1) X_i$ і $\operatorname*{wr}\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha_2) X_i$ ізоморфні.*

Група ізометрій простору $\operatorname*{wr}\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha_1) X_i$ характеризується в термінах нескінченно ітерованих вінцевих добутків груп. Нагадаємо означення цієї конструкції (див. [8]).

Нехай (G_1, X_1), (G_2, X_2), $\ldots$ — нескінченна послідовність груп перетворень. Група перетворень $\left(G, \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \wr_{i=1}^{\infty}(G_i, X_i)$ називається нескінченно ітерованим вінцевим добутком груп (G_1, X_1), (G_2, X_2), $\ldots$, якщо для кожного перетворення $u \in G$ виконуються такі умови:

1) якщо $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)^u = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$, то для кожного $i \geqslant 1$ значення y_i залежить тільки від значень x_1, $\ldots$, x_i;

2) для фіксованих $x_1, \ldots, x_{i-1}$ відображення $g_i(x_1, \ldots, x_{i-1})$, що визначається рівністю

$$g_i(x_1, \ldots, x_{i-1})(x_i) = y_i, \qquad x_i \in X_i,$$

є перетворенням на множині X_i, яке належить G_i.

Як випливає з означення, кожен елемент $u \in G$ можна записати у вигляді таблиці

$$u = [g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), \ldots],$$

де $g_1 \in G_1$, $g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}) \in G_i^{X_1 \times \ldots \times X_{i-1}}$, $i \geqslant 2$. Кожен елемент $u \in G$ діє на $(m_1, m_2, \ldots) \in \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ за таким правилом:

$$(m_1, m_2, m_3 \ldots)^u = (m_1^{g_1}, m_2^{g_2(m_1)}, m_3^{g_3(m_1,m_2)}, \ldots).$$

Теорема 1. *Група ізометрій нескінченно ітерованого вінцевого добутку метричних просторів (X_1, d_1), $(X_2, d_2), \ldots$ ізоморфна як група перетворень нескінченно ітерованому вінцевому добутку їх груп ізометрій*

$$\mathrm{Isom}(\operatorname*{wr}_{i=1}^{\infty} X_i) \simeq \wr_{i=1}^{\infty} \mathrm{Isom}\, X_i.$$

3. Нагадаємо означення самоподібного метричного простору (див. [9]).

Нехай (X, d) — метричний простір.

Неперервне відображення $f\colon X \to X$ називається *стискуючим*, якщо існує додатне дійсне число $r < 1$ таке, що для всіх $x, y \in X$ виконується нерівність

$$d(f(x), f(y)) \leqslant r d(x, y). \tag{4}$$

Якщо в нерівності (4) досягається рівність, то функція f називається *відображенням подібності.*

Якщо метричний простір (X, d) повний і задані стискуючі відображення $f_i\colon X \to X$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то існує непорожній компактний підпростір K простору X, для якого виконується рівність

$$K = f_1(K) \bigcup \cdots \bigcup f_n(K). \tag{5}$$

У цьому випадку K називається *самоподібною множиною* відносно стискуючих відображень $f_1, \ldots, f_n$ (див. [9]).

Якщо метричний простір (X, d) компактний і існують такі стискуючі відображення $f_1, \ldots, f_n$, що рівність (5) виконується для всього простору X, тобто $X = = f_1(X) \bigcup \ldots \bigcup f_n(X)$, то називатимемо такий метричний простір *самоподібним.*

Теорема 2. *Нехай (X, d_X) — скінченний метричний простір і для довільного $i \geqslant 1$ виконується рівність $X_i = X$. Припустимо, що послідовність шкал $\alpha = (s_2(x), s_3(x), \ldots)$ задовольняє умову* (2) *і існує таке дійсне додатне число $q < 1$, що виконуються нерівності*

$$\frac{\mathrm{diam}\, s_{i+1}(X)}{\min\limits_{x,y \in X, x \neq y} s_i(d_X(x, y))} \leqslant q, \qquad i \geqslant 1. \tag{6}$$

Тоді нескінченно ітерований вінцевий добуток $\operatorname*{wr}_{i=1}^{\infty}(\alpha) X_i$ є самоподібним простором.

Доведення. Оскільки простір (X, d_X) є скінченним, то він є компактним, а тому $\operatorname*{wr}_{i=1}^{\infty}(\alpha) X_i$ компактний як тихонівський добуток компактних просторів.

Припустимо, що $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Для кожного $1 \leqslant j \leqslant n$ визначимо відображення $f_i\colon \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i \to \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ за таким правилом:

$$f_i(u_1, u_2, u_3, \ldots) = (x_i, u_1, u_2, u_3, \ldots).$$

Покажемо, що для кожного i відображення f_i є стискуючим. Нехай $\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots)$, $\overline{v} = (v_1, v_2, \ldots) \in \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. Припустимо, що

$$\rho_\alpha(\overline{u}, \overline{v}) = s_l(d(u_l, v_l)). \tag{7}$$

За визначенням метрики ρ_α маємо

$$\rho_\alpha(f_i(\overline{u}), f_i(\overline{v})) = \rho_\alpha((x_i, u_1, u_2, \ldots), (x_i, v_1, v_2, \ldots)) =$$

$$= \begin{cases} s_2(d(u_1, v_1)), & \text{якщо } \ u_1 \neq v_1, \\ s_3(d(u_2, v_2)), & \text{якщо } \ u_1 = v_1 \ \text{ і } \ u_2 \neq v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{8}$$

З формул (3) і (7) випливає, що $u_1 = v_1, \ldots, u_{l-1} = v_{l-1}$, $u_l \neq v_l$. А тому з (8) отримаємо

$$\rho_\alpha(f_i(\overline{u}), f_i(\overline{v})) = s_{l+1}(d(u_l, v_l)). \tag{9}$$

З нерівностей (6), (7), (9) випливає такий ланцюг нерівностей:

$$\rho_\alpha(f_i(\overline{u}), f_i(\overline{v})) \leqslant \operatorname{diam} s_{l+1}(X) < q \min_{x,y \in X, x \neq y} s_l(d_X(x, y)) \leqslant q s_l(d(u_l, v_l)) = q\rho_\alpha(\overline{u}, \overline{v}).$$

Отже, відображення f_i є стискуючим. Крім того, має місце така рівність:

$$\prod_{i=1}^{\infty} X_i = f_1\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i\right) \bigcup \cdots \bigcup f_n\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i\right).$$

Таким чином, простір $\mathop{\mathrm{wr}}\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha) X_i$ є самоподібним відносно стискуючих відображень $f_1, \ldots f_n$.

4. Нагадаємо деякі означення (див. [10]). Нехай, як і в п. 3, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Множину всіх нескінченних послідовностей, елементами яких є елементи множини X, позначимо X^ω. Визначимо метрику за таким правилом: для довільних $\gamma_1 = (u_1, u_2, \ldots)$, $\gamma_2 = (v_1, v_2, \ldots) \in X^\omega$

$$\sigma(\gamma_1, \gamma_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1}, & \text{якщо } \gamma_1 \neq \gamma_2, \\ 0, & \text{якщо } \gamma_1 = \gamma_2, \end{cases}$$

де m — довжина найбільшого спільного початку послідовностей γ_1 і γ_2.

Означення 2 [10, с. 10]. Точна дія групи G на просторі X^ω називається самоподібною, якщо для довільних $g \in G$ і $x \in X$ існують $h \in G$ і $y \in X$ такі, що рівність

$$g(xw) = yh(w) \tag{10}$$

виконується для довільної нескінченної послідовності $w \in X^\omega$.

Теорема 3. *Нехай (X, d_X) — скінченний метричний простір і для довільного $i \geqslant 1$ виконується рівність $X_i = X$. Тоді для довільної послідовності шкал α, що задовольняє умову (2), група ізометрій нескінченно ітерованого вінцевого степеня $\underset{i=1}{\overset{\infty}{\mathrm{wr}}}(\alpha)X_i$ має самоподібну дію.*

Доведення. Припустимо, що $\alpha = (s_2(x), s_3(x), \ldots)$. Метричні простори X^ω і $\underset{i=1}{\overset{\infty}{\mathrm{wr}}}(\alpha)X_i$ визначені на одній множині. Крім того, з теореми 1 випливає, що кожна ізометрія простору $\underset{i=1}{\overset{\infty}{\mathrm{wr}}}(\alpha)X_i$ є ізометрією простору X^ω.

Нехай $g \in \mathrm{Isom}(\underset{i=1}{\overset{\infty}{\mathrm{wr}}}(\alpha)X_i)$. Виберемо деякі $x \in X$ і $w = (w_1, w_2, \ldots)$ — нескінченну послідовність, елементами якої є елементи множини X. З теореми 1 випливає, що

$$g = [g_1, g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), \ldots],$$

де $g_1 \in \mathrm{Isom}\, X$, $g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}) \in \mathrm{Isom}\, X^{X_1 \times \ldots \times X_{i-1}}$, $i \geqslant 2$, і елемент g діє на послідовність $(x, w_1, w_2, \ldots) \in \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ згідно з рівністю

$$g(x, w_1, w_2, \ldots) = (x^{g_1}, w_1^{g_2(x)}, w_2^{g_3(x, w_1)}, \ldots).$$

Позначимо $g_1(x) = y$, $h_1 = w_1^{g_2(x)}$, $h_2 = w_2^{g_3(x, w_1)}$, $\ldots$. Оскільки елемент x є фіксованим, то y є деяким елементом множини X, а h_1 — деяким елементом групи g_1. Аналогічно, можемо вважати, що $h_i = w_i^{g_{i-1}(x, w_1, \ldots, w_{i-1})} = h_i(w_1, \ldots, w_{i-1}) \in \mathrm{Isom} X^{X_1 \times \ldots \times X_{i-1}}$. Отже, елемент h можна записати у вигляді таблиці $h = [h_1, h_2(x_1), h_3(x_1, x_2), \ldots]$. Він є елементом групи $\wr_{i=1}^{\infty} \mathrm{Isom}\, X$, тобто, за теоремою 1, елементом групи $\mathrm{Isom}(\underset{i=1}{\overset{\infty}{\mathrm{wr}}}(\alpha)X_i)$. Крім того, за визначенням елементів y і h виконується рівність

$$g(xw) = yh(w).$$

Таким чином, група $\mathrm{Isom}(\underset{i=1}{\overset{\infty}{\mathrm{wr}}}(\alpha)X_i)$ має самоподібну дію.

Довільна абстрактна група ізоморфна групі ізометрій деякого повного, зв'язного, локально зв'язного метричного простору (див. [11]). Відповідно, довільна скінченна група ізоморфна як абстрактна група групі ізометрій деякого скінченного метричного простору. А тому з теорем 1–3 випливає таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай G — деяка скінченна група. Тоді існує самоподібний метричний простір X такий, що має місце ізоморфізм $\wr_{i=1}^{\infty} G \simeq \mathrm{Isom}(X)$, причому група ізометрій $\mathrm{Isom}(X)$ має на X самоподібну дію.*

1. *Deza M. M., Deza E.* Encyclopedia of distances. – Berlin: Springer, 2009. – 590 p.
2. *Blumenthal L. M.* Remarks concerning the Euclidean four-point property // Ergeb. eines Math. Kolloquiums. – 1936. – No 7. – P. 8–10.
3. *von Neumann J., Schoenberg I. J.* Fourier integrals and metric geometry // Trans. Amer. Math. Soc. – 1941. – **50**. – P. 226–251.
4. *Shoenberg I. J.* Metric spaces and completely monotone functions // Ann. Math. – 1938. – **39**, No 4. – P. 811–841.
5. *Maehara H.* Metric transforms of finite spaces and connected graphs // Discrete Math. – 1986. – **61**. – P. 235–246.
6. *Oliynyk B.* Isometry groups of wreath products of metric spaces // Algebra and Discrete Math. – 2007. – No 4. – P. 123–130.

7. *Oliynyk B.* Semigroup of contractions of wreath products of metric spaces // Discuss. Math. Gen. Algebra and Appl. – 2010. – **30**. – P. 35–43.
8. *Kaloujnine L. A., Beleckij P. M., Feinberg V. T.* Kranzprodukte. – Leipzig: Teubner, 1987. – 168 p.
9. *Kigami J.* Analysis on fractals. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. – 226 p.
10. *Nekrashevych V.* Self-similar groups // Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 117. – Providence, RI: Amer. Math Soc., 2005. – 231 p.
11. *de Groot J.* Groups represented by homeomorphism groups. I // Math. Ann. – 1959. – **138**. – P. 80–102.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 22.02.2012

Б. В. Олийнык

Самоподобность и сплетения метрических пространств

Рассмотрена конструкция бесконечно итерированного сплетения метрических пространств. Получены условия, при которых бесконечно итерированное сплетение конечного метрического пространства на себя есть самоподобное пространство, а также доказано, что группа изометрий действует на нем самоподобно. Показано, что для любой конечной группы бесконечно итерированное сплетение этой группы на себя реализуется как полная группа изометрий самоподобного метрического пространства с самоподобным действием.

B. V. Oliynyk

Self-similarity and wreath products of metric spaces

Infinitely iterated wreath products of metric spaces are considered. For a finite metric space, sufficient conditions under which its infinitely full wreath power is self-similar are presented. It is shown that the isometry group of such a space acts on it self-similarly. For an arbitrary finite group, it is found a self-similar metric space such that its full isometry group is the infinitely iterated wreath power of this group acting on the space self-similarly.