КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Теория и методы оптимизации

УДК 519.174.1

Т.М. ПРОВОТАР, К.Д. ПРОТАСОВА

УРАВНОВЕШЕННЫЕ 2-РАЗБИЕНИЯ ГРАФОВ

Показано, что для произвольного конечного связного графа с множеством вершин V существует уравновешенное разбиение $V=V_1\cup\cup V_2$ такое, что ind V_1=1, ind V_2=2. Рассмотрено и исследовано также два игровых варианта этого утверждения.

Введение. Все графы, рассматриваемые в данной работе, считаются связными и неориентированными.

Рассмотрим граф Γ (V,E) с множеством вершин V и множеством ребер E. Для произвольных двух вершин $x,y\in V$ обозначим $d(x,y)$ длину кратчайшего пути от x до y. Для произвольной вершины $x\in V$, подмножества $A\subseteq V$ и неотрицательного целого числа m обозначим:

$$B(x,m)=\{y\in V: d(x,y)\le m\},$$

$$B(A,m) = \bigcup_{a\in A} B(a,m).$$

Подмножества $B(x,m)$ и $B(A,m)$ называются *шарами* радиуса m вокруг вершины x и подмножества A графа V. Обозначим через $B_m(V)$ семью всех шаров радиуса m с центрами в вершинах графа.

Непустое подмножество $A\subseteq V$ имеет конечный индекс, если найдется такое неотрицательное целое число m, что $V=B(A,m)$. Наименьшее число m, для которого справедливо это равенство, называется индексом подмножества A и обозначается $ind\ A$. Очевидно, что $ind\ A\le m$ тогда и только тогда, когда подмножество A пересекается с каждым шаром из семейства $B_m(V)$.

Уравновешенные разбиения множества вершин графов

Расстояние Хаусдорфа dist(A, B) между какими-либо двумя непустыми подмножествами A, B конечного индекса множества вершин V определяется формулой:

$$\mathrm{dist}(A, B) = \max\{\max_{a\in A} \min_{b\in B} d(a,b),\ \max_{b\in B} \min_{a\in A} d(b, a)\}.$$

Заметим, что ind A=dist(V, A) для произвольного непустого подмножества $A \subseteq V$, а dist $(A,B) \leq$ ind A, dist$(A,B) \leq$ ind B.

По определению, разбиение $\mathcal{P}$ множества вершин графа $\Gamma(V, E)$ на Q подмножеств имеет конечный индекс, если найдется неотрицательное целое число m, такое что ind $P_I \leq m$, $I \in \{1,..., Q\}$ для всех подмножеств P_I разбиения $\mathcal{P}$. Наименьшее неотрицательное целое число m, для которого выполняются неравенства ind$P_I \leq m$, называется индексом разбиения $\mathcal{P}$ и обозначается ind$\mathcal{P}$. Очевидно, что ind$\mathcal{P} \leq k$, где k – натуральное число, тогда и только тогда, когда каждое подмножество $P_I \in \mathcal{P}$ плотно относительно семейства шаров $B_k(V)$, т. е., каждое подмножество P_I пересекается с каждым шаром из $B_k(V)$.

По теореме 1 из [1] (см. также [2, теорема 1.1]) для произвольного конечного графа $\Gamma(V,E)$ и натурального числа r, $|V| \geq r$ существует разбиение $V=V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_r$ такое, что ind $V_i \leq r-1$ для всех $i \in \{1,..., r\}$.

Разбиение $X_1, X_2, ..., X_t, X_{t+1}, ... , X_r$ конечного множества X, $|X|=n$ на r подмножеств, $1 \leq r < n$, $n=rs+t$, $0 \leq t < r$ называют уравновешенным, если

$$|X_1| = |X_2| = ... = |X_t| = s+1,$$

$$|X_{t+1}| = |X_{t+2}| = ... = |X_r| = s.$$

В случае $r|\, n$, имеем

$$|X_1| = |X_2| = ... = |X_r|.$$

Для удобства изложения дальнейшего материала перейдем к хроматической терминологии. Пусть X, C – произвольные множества, $|C|=k$. Произвольное сюръективное отображение $\chi : X \to C$: называется k-раскраской множества X множеством цветов C. Всякая k-раскраска $\chi : X \to C$ задает разбиение множества X на k непустых подмножеств

$$X = \bigcup_{c\in C} \chi^{-1}(c).$$

В свою очередь, каждое разбиение множества

$$X = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$$

на непустые подмножества можно отождествить с $|I|$-раскраской $\chi : X \to C$, определенной согласно правилу $\chi(x) = \alpha$ тогда и только тогда, когда $x \in X_\alpha$.

Индексом раскраски χ: $V\to C$ множества вершин графа $\Gamma(V,E)$ назовем индекс соответствующего разбиения

$$V=\bigcup_{c\in C} \chi^{-1}(c).$$

Раскраску χ: $X\to\{1, 2, \ldots, r\}$ назовем уравновешенной, если соответствующее ей разбиение

$$X=\chi^{-1}(1)\cup\chi^{-1}(2)\cup\ldots\cup\chi^{-1}(r)$$

уравновешено.

Разбиение множества вершин графа $\Gamma(V,E)$ на r подмножеств имеет индекс, который не превышает m тогда и только тогда, когда при раскраске χ: $V\to\{1, 2, \ldots, r\}$, соответствующей этому разбиению, каждый шар $B(x,m)$, $x\in V$ радиуса m имеет точки всех r цветов. Индексом раскраски называется индекс соответствующего разбиения.

Множество вершин произвольного конечного связного графа, который содержит, по крайней мере 2 вершины, можно разбить на два подмножества индекса 1. Но эти разбиения могут оказаться очень неуравновешенными, как показывает следующий пример.

Рассмотрим дерево $\Gamma_n(V_n, E_n)$, $n\geq 2$, где

$$V_n=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

$$E_n=\{(x_1, x_2), (x_1, x_3),\ldots, (x_1, x_n)\}.$$

Это дерево – звезда. Конечное дерево $\Gamma_n(V, E)$, $|V|>2$ называется звездой с центром $x\in V$, если x не является концевой вершиной дерева и любые два кратчайших пути от x к различным концевым вершинам не имеют общих ребер. Существует всего лишь два способа 2-раскраски этого графа – χ_1, χ_2 множества V_n, которые имеют индекс 1, а именно,

$$\chi_1(x_1)=1,$$
$$\chi_1(x_2)=\chi_1(x_3)=\ldots=\chi_1(x_n)=2;$$

и

$$\chi_2(x_1)=2,$$
$$\chi_2(x_2)=\chi_2(x_3)=\ldots=\chi_2(x_n)=1.$$

Если $n>3$, то эти раскраски неуравновешенны. Итак, для $n>3$ и $r=2$ не существует уравновешенных раскрасок индекса r–1 множества вершин V_n графа звезды.

Учитывая вышеописанный пример возникает вопрос о существовании уравновешенных разбиений в зависимости от их индексов.

По теореме 2 из [1] (см. также [2, теорема 1.2]) для произвольного конечного графа $\Gamma(V, E)$ и натурального числа r существует уравновешенное разбиение

$$V=V_1\cup V_2 \cup \ldots \cup V_r$$

такое, что

$$\operatorname{ind} V_i \le r \quad \text{для всех } i \in \{1, 2, \ldots, r\}.$$

Согласно теореме 3 из [1] для произвольного конечного графа $\Gamma(V,E)$ и натуральных чисел r, n, где r – делитель n, $|V| = n$, существует уравновешенное разбиение

$$V=V_1\cup V_2 \cup \ldots \cup V_r$$

такое, что

$$\operatorname{dist}(V_1, V_2) \le 3,\ \operatorname{dist}(V_2, V_3) \le 3, \ldots, dist\,(V_{r-1}, V_r) \le 3,\ \operatorname{dist}(V_r, V_1) \le 3.$$

Ряд результатов о разбиении графов методом независимых подмножеств на подмножества контролируемых индексов дано в [3].

Подмножество S множества вершин V графа Γ называется независимым, если S не содержит ни одной пары смежных вершин графа Γ. Существование максимального (за включением) независимого подмножества в конечном графе очевидно, для того, чтобы построить такое подмножество в бесконечном графе нужно применить аксиому выбора. Метод независимых подмножеств базируется на таком утверждении.

По теореме 1 из [3], для произвольного графа $\Gamma(V,E)$, $|V| >1$ и Y – максимальное независимое подмножество множества вершин V справедливы утверждения:

1) $\operatorname{ind} Y = \operatorname{ind}(V\backslash Y) =1$;

2) для произвольных $u,v\in Y$ существуют $y_1,\ldots, y_n \in Y$ такие, что $y_1 = u$, $y_n = v$ и $d(y_i, y_{i+1})\le 3$ для всех $i\in\{1, 2,\ldots, n-1\}$;

3) существует максимальное независимое подмножество Y' такое, что для произвольных $u,v\in Y'$, найдутся $y_1, \ldots, y_n \in Y'$ такие, что $y_1=u$, $y_n =v$ и $d(y_i, y_{i+1})\le$ ≤ 2 для всех $i\in\{1, 2,\ldots, n-1\}$.

Для дальнейшего изложения результатов дадим некоторые определения. Радиус $\operatorname{rad}\Gamma$ конечного графа $\Gamma(V, E)$ определяется формулой

$$\operatorname{rad}\Gamma = \min_{v\in V} \max_{x\in V} d(x,v).$$

По теореме 2 из [3], если $\operatorname{rad}\Gamma(V, E) > 2^{r-1} -1$, r – натуральное число, то множество вершин V можно разбить

$$V=V_1\cup V_2 \cup \ldots \cup V_{r+1}$$

так, что

$$\operatorname{ind} V_1 = 1,\ \operatorname{ind} V_2 \le 3,\ ...,\ \operatorname{ind}\ V_i \le 2^i - 1, \ldots,$$
$$\operatorname{ind}\ V_r \le 2^r - 1,\ \ \operatorname{ind}\ V_{r+1} \le 2^r - 1.$$

Напомним, что каждый подграф $\Gamma(V, E')$ графа $\Gamma(V, E)$, где $E' \in E$, называется его фактором. Фактор связного графа, являющийся связным графом, называется остовным фактором. Остовый фактор, являющийся деревом, называется костяком графа или опорным деревом. Под деревом мы понимаем связный граф без циклов. Дерево $\Gamma(V, E')$ с выделенным корнем $x \in V$ назовем x-корневым. Определим частичный порядок $\le$ на множестве V по такому правилу: $y \le z$ тогда и только тогда, когда кратчайший путь от x к z проходит через вершину y.

Основной результат данной работы – это усиленный вариант теоремы 2 из [1], доказанный для $r = 2$.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma(V, E)$ конечный связный граф, $|V| = n$, $n \ge 2$. Тогда существует уравновешенное разбиение $V = V_1 \cup V_2$ такое, что $\operatorname{ind} V_1 = 1$, $\operatorname{ind} V_2 \le 2$.

Доказательство. Поскольку при переходе от графа к его опорному дереву индекс подмножества вершин не уменьшается, можно считать, что наш граф дерево с корнем x. Покажем, что существует раскраска множества вершин V двумя цветами, черным и белым, такая, что каждый шар единичного радиуса содержит хотя бы одну черную вершину, а каждый шар радиуса 2 содержит хотя бы одну белую вершину.

Применим индукцию по числу вершин n. Для $n = 2$ теорема очевидна. Допустим, что мы уже указали соответствующие раскраски для всех деревьев с числом вершин меньше n.

Обозначим через d расстояние от корня x до самой отдаленной вершины дерева. Если $d=1$, покрасим корень x черным цветом, а остальные вершины произвольно, заботясь лишь о том, чтобы раскраска была уравновешенна.

Допустим, что $d > 1$ и обозначим через x_d конечную вершину дерева, для которой $d(x, x_d) = d$. Если таких вершин несколько, выберем любую из них.

Пусть $x = x_0, x_1, ..., x_{d-2}, x_{d-1}, x_d$ – кратчайший путь от корня x до конечной вершины x_d. Удалим ребро (x_{d-2}, x_{d-1}). После этого наше дерево Γ распадается на два дерева: Γ_1 – дерево с корнем x, Γ_2 – дерево с корнем x_{d-1}.

К дереву Γ_1 применим предположение индукции и раскрасим его уравновешено двумя цветами так, что каждый единичный шар содержит, по крайней мере, одну черную вершину, а каждый шар радиуса 2 содержит, по крайней мере, одну белую вершину.

По построению расстояние от корня x_{d-1} графа Γ_2 до какой-либо его вершины, отличной от x_{d-1}, равняется 1. Покрасим вершину x_{d-1}, черным цветом, а вершину x_d – белым. Таким образом, мы раскрасили уравновешенно множество вершин графа Γ_1 вместе с вершинами x_{d-1}, x_d. Продолжим эту раскраску уравновешенно на остальные вершины графа Γ.

Доказанная теорема приводит к двум играм между двумя игроками в наперед заданном конечном графе, который имеет, по крайней мере, две вершины. В каждой из этих игр за первым игроком закрепляется черный цвет, а за вторым – белый. Далее игроки по очереди красят вершины графа своими цветами. Заканчиваются игры, когда покрашены все вершины графа.

В первой игре стратегия второго игрока заключается в том, чтобы по окончанию игры множество всех вершин белого цвета имела индекс ≤ 2. Стратегия первого игрока – помешать второму игроку достичь своей цели.

Теорема 2. Для произвольного графа $\Gamma(V, E)$ второй игрок имеет выигрышную стратегию.

Доказательство. Очередной ход второго игрока по выигрышной стратегии зависит лишь от предыдущего шага первого игрока. Пусть на предыдущем ходу первый игрок покрасил черным цветом некоторую вершину v. Второй игрок рассматривает шар $B(v, 1)$. Если в этом шаре имеются неокрашенные вершины, он выбирает какую-либо из них и красит ее белым цветом. Если в этом шаре покрашены все вершины, второй игрок выбирает для раскраски какую-либо вершину из неокрашенных вершин.

Допустим, что, придерживаясь этой стратегии, второй игрок все же проиграл игру. Поскольку подмножество белых вершин, как оказалось, имеет индекс больше 2, тогда найдется вершина $v < V$, такая, что все вершины в шаре $B(v, 2)$ черные. Вершина v покрашена первым игроком на некотором шаге k. Поскольку второй игрок на k+1 шаге не мог выбрать ни одну вершину в шаре $B(v, 1)$, то все эти вершины покрашены первым игроком до k-го шага. Возьмем произвольную вершину $u \in B(v, 1)$, $u \neq v$. Она покрашена первым игроком на некотором шаге s, $s < k$. Но тогда на (s+4)-м ходу второй игрок обязательно должен был покрасить одну из вершин в шаре $B(u, 1)$. Таким образом, в шаре $B(v, 2)$ непременно имеется, по крайней мере, одна белая вершина, что противоречит нашему предположению.

Во второй игре стратегия первого игрока заключается в том, чтобы по окончанию игры множество черных вершин имело индекс 3, а стратегия второго игрока – помешать первому игроку достичь своей цели. В отличие от первой игры, в этой игре все зависит от игрового поля. Для некоторых графов выигрышную стратегию имеет первый игрок, для других – второй.

Пример 1. Допустим, что граф имеет две разные вершины u, v, каждая из которых смежная с конечными вершинами u_1, u_2 и v_1, v_2 соответственно. На этом графе выигрышную стратегию имеет второй игрок. Действительно, пусть на первом шаге первый игрок покрасил некоторую вершину w. Второй игрок выбирает одну из троек u, u_1, u_2 или v, v_1, v_2, которые не содержат вершину w. Пусть для определенности это будет тройка u, u_1, u_2. Вершина u красится белым цветом. Следующим шагом второй игрок выбирает одну из вершин u_1 или u_2, еще не окрашенных первым игроком. Пусть для определенности это будет вершина u_1. Она красится белым цветом, после чего все вершины в шаре $B(u_1, 1)$ белые.

Пример 2. Для графов-отрезков выигрышную стратегию во второй игре имеет первый игрок. Действительно, возьмем граф с множеством вершин $\{1,2,..., n\}$ и множеством ребер $\{(1, 2), (2, 3), ..., (n – 1, n)\}$. На первом шаге первый игрок красит черным цветом вершину 1. Далее его следующий шаг зависит от предыдущего шага второго игрока. Если второй игрок перед этим ходом покрасил белым цветом вершину s, первый игрок рассматривает вершины s–1, s+1. Если вершина s–1 не покрашена, первый игрок красит ее черным цветом. Если вершина s–1 уже покрашена, но вершина s+1 не покрашена, тогда красится вершина s+1 черным цветом. Если все три вершины s–1, s, s+1 покрашены, первый игрок ходит произвольно. Допустим, что, придерживаясь этой стратегии, первый игрок все же проиграл. Тогда найдутся три последовательные белые вершины s–1, s, s+1. Они покрашены вторым игроком на ходах с некоторыми номерами k_1, k_2, k_3. Следуя описанной стратегии первого игрока, имеем $k_1 < k_2 < k_3$. Но тогда после того, как второй игрок покрасил вершину s, первый игрок непременно должен был бы покрасить вершину s+1.

Эти размышления приводят к решению такой задачи. На книжной полке стоят n книжек. Двое друзей выбирают по очереди по одной книжке. Доказать, что каждый из них имеет такую стратегию выбора, которая не позволяет другому выбрать три книжки, стоящие на полке последовательно.

Т.М. Провотар, К.Д. Протасова

ВРІВНОВАЖЕНІ 2-РОЗБИТТЯ ГРАФІВ

Показано, що для довільного скінченного зв'язного графа з множиною вершин V існує врівноважене розбиття $V = V1\cup V2$ таке, що ind $V1$ = 1, ind $V2$ = 2. Розглянуто і досліджено також два ігрові варіанти цього твердження.

T.M. Provotar, K.D. Protasova

BALANCED 2-PARTITIONS OF GRAPHS

We show that there is exist a balanced partition $V=V1\cup V2$ for finite connected graphs with the set of vertices V, such that ind $V1$=1 and ind $V2$ = 2. We also consider and investigate two game situations of this statement.

1. *Протасова К.Д.* Уравновешенные разбиения графов. – М.: Математические заметки. – 2006. –**79**, № 1б. – С. 127–133.
2. *Protasov I., Banakh T.* Ball Structures and Colorings of Groups and Graphs. – Lviv: Math. Stud. Monogr. Ser. V. 11, VNTL, 2003. – 123 p.
3. *Провотар Т.М., Протасова К.Д.* Розбиття графів методом незалежних підмножин // Доповіді НАН України, Сер. А, 2010. – № 10. – С. 41–43.

Получено 22.12.2010

Об авторах:

Провотар Татьяна Михайловна,
ведущий инженер Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,

Протасова Ксения Дмитриевна,
младший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук
Киевского национального университета имени Тараса Шевченко.