КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Системный анализ

УДК 517.938

Т.Н. БОЙКО

ПРАКТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗВИВАЮЩИХСЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для класса развивающихся динамических систем предложены определения практической устойчивости, которые обобщают хорошо известные. Найдены необходимые и достаточные условия практической устойчивости на основе метода функций Ляпунова.

Введение. Работа посвящена вопросам практической устойчивости развивающихся динамических систем [1]. Появление систем такого типа в первую очередь связано с развитием экономической теории финансово-промышленных структур, которая становится все более актуальной в последнее время [2]. Многие модели в данной области могут быть описаны более адекватно в рамках развивающихся систем дифференциальных уравнений. На основе разработанных методов практической устойчивости могут быть даны ответы на многие экономические вопросы. Исследование практической устойчивости систем такого вида находит применение и в таких прикладных задачах как обработка сигналов, распознавание образов и т. д. Для развивающихся систем в работе предложены определения практической устойчивости. Построены функции Ляпунова, с помощью которых получены необходимые и достаточные условия практической устойчивости систем такого типа. При исследовании практической устойчивости в данной работе проводится анализ невозмущенного движения исходя из свойств множеств начальных данных (что является развитием идей, изложенных в [3, 4]). Введенное понятие практической устойчивости развивающихся систем позволяет значительно расширить круг исследуемых задач и решить их численно.

Постановка задачи и основные обозначения. Пусть τ_1, τ_2, ..., τ_N – некоторое разбиение отрезка $[T_0, T_1]$, где

$$\tau_j = \{t : t \in [t_{j-1}, t_j)\},\quad j = 1, 2, ..., N-1,$$

$$\tau_N = \{t : t \in [t_{N-1}; t_N]\},\quad t_0 = T_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{N-1} < t_N = T_1.$$

Пусть также $\tau_{j1}, \tau_{j2}, ..., \tau_{jK_j}$, $j = 1, 2, ..., N$ – некоторое подразбиение разбиения $\tau_1,\ \tau_2,\ ...,\ \tau_N$, где

$$\tau_{jk} = \{t : t \in [t_{jk-1}; t_{jk}), k = 1, ..., K_j;\ j = 1, 2, ..., N-1\},$$

$$\tau_{Nk} = \{t : t \in [t_{Nk-1}; t_{Nk})\}, k = 1, 2, ... K_N - 1,$$

$$\tau_{NK_N} = \{t : t \in [t_{NK_N - 1}; t_{NK_N}]\}, t_{j0} = t_{j-1} < t_{j1} < ... < t_{jK_j - 1} < t_{jK_j} = t_j,\quad j = 1, 2, ..., N,$$

$$\bigcup_{k=1}^{K_j} \tau_{jk} = \tau_j.$$

Предположим, что динамика процесса задается следующей развивающейся системой:

$$\frac{dx^{(j)}(t)}{dt} = f^{(jk)}(x^{(j)}, t),\quad t \in \tau_{jk}, k = \overline{1, K_j}, j = \overline{1, N}; \tag{1}$$

$$x^{(j)}(t_{jk-1}) = g^{(jk)}(x^{(j)}(t_{jk-1}-)),\quad k = 2, 3, ..., K_j,$$

$$x^{(j)}(t_{j0}) = x^{(j)}(t_{j-1}) = g^{(j1)}(x^{(j-1)}(t_{j0}-)), j = 1, 2, ..., N, \tag{2}$$

где $x^j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, ..., x_{n_j}^{(j)})^T - n_j$ – измеримый вектор фазовых координат; $f^{(jk)} : R^{n_j} \times \tau_{jk} \to R^{n_j}, k = 1, 2, ..., K_j, j = 1, 2, ..., N$ – вектор-функции, удовлетворяющие условиям теорем существования и единственности решения системы (1) при $t \in \tau_{jk}$, $g^{(jk)} : R^{n_j} \to R^{n_j}, k = 2, 3, ..., K_j, j = 1, 2, ..., N$ – функции, задающие скачок; $g^{(j1)} : R^{n_{j-1}} \to R^{n_j}$, $j = 1,2,...,N$ задают изменение размерности фазового состояния.

Если переключения происходят в те моменты, когда изменяется размерность фазового пространства, тогда, как частный случай, получаем дифференциальную систему с изменением размерности фазового пространства. Вопросы практической устойчивости для такого класса систем детально изучены в [5]. Основное отличие развивающихся систем состоит в том, что переключения и размерность фазового пространства могут изменяться независимо друг от друга.

В дальнейшем будем предполагать, что $\Phi_t^{(jk)} \subset R^{n_j}$, $k = \overline{1, K_j}, j = \overline{1, N}$ – компакты $G_0 \subset R^{n_1}, 0 \in G_0, 0 \in \Phi_t^{(jk)}$.

Определение 1. Невозмущенное решение $x^{(j)}(t) = 0, t \in \tau_{jk}$, $k = \overline{1, K_j}$, $j = \overline{1, N}$ системы (1), (2) (предполагаем, что оно является решением системы (1), (2)) и называется $\{G_0, \Phi_t^{(11)}, \Phi_t^{(12)}, ..., \Phi_t^{(NK_N)}, T_0, T_1\}$-устойчивым, если для любой точки $x^{(1)}(T_0)=x_0^{(1)}\in G_0$ соответствующее решение $x^{(j)}(t)\in \Phi_t^{(jk)}$, $t\in\tau_{jk}$, $k=\overline{1,K_j}$, $j=\overline{1,N}$.

Для построения эффективных методов проверки качества практической устойчивости развивающихся динамических систем будем рассматривать следующие типы множеств начальных условий:

1) $G_0=\{x^{(1)}\in R^{n_1}:\sigma(x^{(1)})<1\},\sigma:R^{n_1}\to R^1,\sigma\in C(R^{n_1})$;

2) частичный случай 1) $\sigma(x^{(1)})=x^{(1)T}Bx^{(1)}/c^2$, где B положительно определенная матрица порядка n_1, $c>0$ – некоторая постоянная $\big(G_0=$ $=\{x^{(1)}:\ x^{(1)T}Bx^{(1)}<c^2\}\big)$.

Учитывая практическую важность перечисленных начальных множеств (в виде эллипсоидов, и т. п.), дадим определение практической устойчивости в этих наиболее важных случаях.

Определение 2. Невозмущенное движение $x^{(j)}(t)=0,t\in\tau_{jk}$, $k=\overline{1,K_j}$, $j=\overline{1,N}$ системы (1), (2) будем называть $\{\sigma,\Phi_t^{(11)},\Phi_t^{(12)},...,\Phi_t^{(NK_N)},T_0,T_1\}$-устойчивым, если $x^{(j)}(t)\in\Phi_t^{(jk)},t\in\tau_{jk},k=\overline{1,K_j},j=\overline{1,N}$ для всех начальных условий $x^{(1)}(T_0)=x_0^{(1)}\in\{x_0^{(1)}:\sigma(x_0^{(1)})<1\}$.

Соответственно, если $G_0=\{x^{(1)}:x^{(1)T}Bx^{(1)}<c^2\}$, то невозмущенное движение системы (1), (2) $x^{(j)}(t)=0,t\in\tau_{jk},k=\overline{1,K_j},j=\overline{1,N}$ будем называть $\{c,B,\Phi_t^{(11)},\Phi_t^{(12)},...,\Phi_t^{(NK_N)},T_0,T_1\}$-устойчивым.

Рассмотрим два типа фазовых ограничений, для которых сформулируем критерии практической устойчивости:

$$\Phi_t^{(jk)}=\{x^{(j)}:\psi_{jk}(x^{(j)},t)\le 1\},t\in\tau_{jk},k=\overline{1,K_j},j=\overline{1,N},$$

$$\Gamma_t^{(jk)}=\{x^{(j)}:|\,l_s^{(jk)T}(t)x^{(j)}\,|\le 1,s=1,M_j\},t\in\tau_{jk},k=\overline{1,K_j},j=\overline{1,N},$$

где $l_s^{(jk)}(t)$ – непрерывные вектор-функции размерностью n_j; $\psi_{jk}(x^{(j)},t)$ – скалярные функции, непрерывные по совокупности аргументов при $t\in\tau_{jk}$ вместе со своими частными производными по $x^{(j)}$; $\Phi_t^{(jk)}$ – замкнутые выпуклые множества для каждого $t\in\tau_{jk}$, которые содержат внутреннюю точку $x^{(j)}(t)=0$, $j=\overline{1,N}$.

Для получения критериев практической устойчивости будем использовать определение функций Ляпунова, допуская их непрерывность вместе с частными производными на областях определения. Все необходимые сведения о функциях Ляпунова изложены, например, в [3].

Теорема 1. Если для системы (1), (2) найдутся положительно определенные функции Ляпунова $V_{jk}(x^{(j)},t)$, которые удовлетворяют условиям

$$\left\{x^{(j)}: V_{jk}(x^{(j)},t)<1\right\}\subset \Phi_t^{(jk)},\ t\in\tau_{jk},\ k=\overline{1,K_j},\ j=\overline{1,N}; \tag{3}$$

$$\left(\frac{dV_{jk}(x^{(j)},t)}{dt}\right)_{(1),(2)}\le 0 \tag{4}$$

при $x^{(j)}\in\left\{x^{(j)}: V_{jk}(x^{(j)},t)<1\right\}$, $t\in\tau_{jk}$, $k=\overline{1,K_j}$, $j=\overline{1,N}$;

для любого $s\in\{1,2,\ldots,N\}$

$$\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{k=1}^{K_j-1}(V_{jk}(x^{(j)}(t_{jk}-),t_{jk})-V_{jk+1}(x^{(j+1)}(t_j),t_j))+$$

$$+\sum_{j=1}^{s-1}(V_{jK_j}(x^{(j)}(t_{jK_j}-),t_{jK_j})-V_{j+11}(x^{(j+1)}(t_{jK_j}),t_{jK_j}))\ge 0; \tag{5}$$

$$G_0\subset\left\{x^{(1)}: V_{11}(x^{(1)},t_{10})<1\right\}, \tag{6}$$

то невозмущенное решение системы (1), (2) $x^{(j)}(t)=0, t\in\tau_{jk}, k=\overline{1,K_j}, j=\overline{1,N}$ будет $\{G_0,\Phi_t^{(11)},\Phi_t^{(12)},...,\Phi_t^{(NK_N)},T_0,T_1\}$-устойчивым.

Доказательство (от противного). Пусть выполняются условия (3)–(6), но найдутся $1\le k_0\le K_j$, $1\le j_0\le N$ и такое значение $\bar t\in\tau_{j_0k_0}$, при котором $x^{(j_0)}(\bar t)\notin\Phi_{\bar t}^{(j_0k_0)}$. Тогда, согласно (3) и используя непрерывность функции Ляпунова $V_{j_0k_0}(x^{(j_0)},t)$, в точке $\bar t$ будет выполняться неравенство $V_{j_0k_0}(x^{(j_0)}(\bar t),\bar t)\ge 1$. Кроме этого, согласно (4), на траекториях системы (1), (2) имеем

$$\sum_{j=1}^{j_0-1}\sum_{k=1}^{k_0-1}\int_{t_{jk-1}}^{t_{jk}}\left(\frac{dV_{jk}(x^{(j)},t)}{dt}\right)_{(1),(2)}dt+V_{j_0k_0}(x^{(j_0)}(\bar t),\bar t)-V_{j_0k_0}(x^{(j_0)}(t_{j_0-1}),t_{j_0-1})\le 0.$$

Поэтому

$$V_{11}(x^{(1)}(t_{11}-),t_{11})-V_{12}(x^{(1)}(t_{10}),t_{10})+$$

$$+V_{12}(x^{(1)}(t_{12}-),t_{12})-V_{13}(x^{(1)}(t_{12}),t_{12})+\ldots+$$

$$+V_{j0-11}(x^{(j0-1)}(t_{j0-1}-),t_{j0-1})-V_{j0-12}(x^{(j0-1)}(t_{j0-2}),t_{j0-2})+\ldots+$$

$$+V_{j0k0}(x^{(j0)}(\bar t),\bar t)-V_{j0-1k0-1}(x^{(j0)}(t_{j0-1}),t_{j0-1})\le 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{j0-1}\sum_{k=1}^{k0-1}(V_{jk}(x^{(j)}(t_{jk}-),t_{jk})-V_{j+1k}(x^{(j+1)}(t_{jk}),t_{jk}))+$$

$$+V_{j0k0}(x^{(j0)}(\bar{t}),\bar{t})-V_{11}(x^{(1)}(t_{10}),t_{10})\le 0\,.$$

Отсюда, используя условие (5), получаем $V_{11}(x^{(1)}(t_{10}),t_{10})\ge 1$, что противоречит условию (6). Следовательно, наше предположение неправильно. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если для системы (1), (2) найдутся положительно определены функции Ляпунова $V_{jk}(x^{(j)},t)$, $k=\overline{1,K_j}$, $j=\overline{1,N}$, которые удовлетворяют условиям (3)–(5), и

$$\left\{x^{(1)}:x^{(1)T}Bx^{(1)}<c^2\right\}\subset\left\{x^{(1)}:V_{11}(x^{(1)}(t_{10}),t_{10})<1\right\}, \tag{7}$$

то невозмущенное движение $x^{(j)}(t)=0$, $t\in\tau_{jk}$, $k=\overline{1,K_j}$, $j=\overline{1,N}$, системы (1), (2) , $\{c,B,\Phi_t^{(11)},\Phi_t^{(12)},...,\Phi_t^{(NK_N)},T_0,T_1\}$-устойчиво.

Доказательство теоремы 2 полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. Пусть система (1), (2) $\{c,B,\Phi_t^{(11)},\Phi_t^{(12)},...,\Phi_t^{(NK_N)},T_0,T_1\}$ – устойчива, функции $g^{(jk)}(x^{(j)}(t_{jk-1}-)),k=2,3,...,K_j$, $g^{(j1)}(x^{(j-1)}(t_{j0}-))$, $j=1,2,...,N$ одинакового размера $n_j=n$, существуют обратные функции $\psi^{(jk)}=(g^{(jk)})^{-1}$, т. е. $x^{(j-1)}(t_{j_0}-)=\psi^{(jk)}(g^{(j)}(x^{(j-1)}(t_{j_0}-)))$, $j=\overline{2,N}$. Тогда найдутся функции Ляпунова $V_{jk}(x^{(j)},t)$, $t\in\tau_{jk}$, $k=\overline{1,K_j}$, $j=\overline{1,N}$, которые удовлетворяют условиям теоремы 2.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$V_{jk}(x^{(j)},t)=\frac{1}{c^2}F^{(jk)T}(x^{(j)},t)BF^{(jk)}(x^{(j)},t), \tag{8}$$

где

$$F^{(jk)}(x^{(j)},t)=\varphi^{(11)}(\psi^{(11)}(\varphi^{(12)}(\ldots(\psi^{(jk)}(\varphi^{(jk)}(x^{(j)},t,t_{jk-1}),t_{jk-1},t_{jk-2})\ldots,t_{21},t_{11}),t_{11},t_{10}))),$$

$$x^{(j)}(t_{jk-1})=\varphi^{(jk)}(x^{(j)},t,t_{jk-1}),\ t\in\tau_{jk},\ k=\overline{1,K_j},\ j=\overline{1,N}\,.$$

Эти функции положительно определены, поскольку $V_{jk}(0,t)=0$ и $V_{jk}(x^{(j)},t)>0,$ если выполняется условие $\|x^{(j)}\|\ne 0,t\in\tau_{jk}$ (решение (1), (2) существует и единственное, в случае $t\in\tau_{jk}$). Если мы рассмотрим произвольную траекторию системы (1), (2), которая удовлетворяет начальному условию $x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$, и выберем произвольную точку $x^{(j)}(t), t \in \tau_{jk}$ на этой траектории, тогда

$$F^{(jk)}(x^{(j)}, t) = x_0^{(1)}, \; j = \overline{2, N}; \; k = \overline{1, K_j} \quad \varphi^{(1k)}(x^{(1)}(t), t, t_0) = x_0^{(1)}.$$

Учитывая это, $\left(\dfrac{dV_{jk}(x^{(j)},\ t)}{dt}\right)_{(1),(2)} = 0, \;\; t \in \tau_{jk}$, так как $V_{jk}(x^{(j)}, t)$ принимает постоянные значения на траекториях $x^{(j)}(t), t \in \tau_{jk}$ системы (1), (2): $V_{11}(x^{(1)}, t) =$ $= \dfrac{1}{c^2}(x_0^{(1)})^T B x_0^{(1)}, t \in \tau_{11}$. Таким образом, построенные функции Ляпунова удовлетворяют условию (4).

Для проверки выполнения условия (3) предположим, что система (1), (2) $\{c, B, \Phi_t^{(11)}, \Phi_t^{(12)}, ..., \Phi_t^{(NK_N)}, T_0, T_1\}$ – устойчива, но существуют $1 \le k_0 \le K_j$, $1 \le j_0 \le N$ и такое значение $\overline{x}^{(j_0)} \notin \Phi_{\bar{t}}^{(j_0 k_0)}$, для которого справедливо следующее неравенство:

$$V_{j_0 k_0}(\overline{x}^{(j_0)}, t) = \frac{1}{c^2} F^{(j_0 k_0)T}(\overline{x}^{(j_0)}, t) B F^{(j_0 k_0)}(\overline{x}^{(j_0)}, t) < 1.$$

Из последнего неравенства получаем, что для начальной точки $F^{(j_0 k_0)}(x^{(j)}, t) = x_0^{(1)}$ траектории, которая проходит через точку $\overline{x}^{(j_0)}$, справедливо неравенство $\dfrac{1}{c^2}(x_0^{(1)})^T B x_0^{(1)} < 1$. Отсюда следует, что $x_0^{(1)} \in$ $\in \{x^{(1)} : \; x^{(1)T} B x^{(1)} < c^2\}$, а поэтому с $\{c, B, \Phi_t^{(11)}, \;\; \Phi_t^{(12)}, ..., \Phi_t^{(NK_N)}, T_0, T_1\}$ – устойчивости системы (1), (2) следует, что $\overline{x}^{(j_0)} \in \Phi_{\bar{t}}^{(j_0 k_0)}$ и это приводит к противоречию с предположением. Выполняются также условия (5), поскольку $\{x^{(1)} : x^{(1)T} B x^{(1)} < c^2\} = \{x^{(j)} : V(x^{(j)}, t) < 1, t \in \tau_{jk}\} = ... = \{x^{(N)} : V(x^{(N)}, t) < 1, \;\; t \in \tau_{jN}\}$. Условие (6) также выполнено.

Таким образом, теорема доказана.

Выводы. Получены необходимые и достаточные условия практической устойчивости для развивающихся систем. Для наиболее распространенных в приложениях множеств начальных данных построены функции Ляпунова, на основании которых легко устанавливается практическая устойчивость систем.

Предложенные условия являются развитием известных работ [3, 4]. Благодаря полученным результатам представляется возможным исследование практической устойчивости экономических систем, которые описываются развивающимися дифференциальными системами.

Т.М. Бойко

ПРАКТИЧНА СТІЙКІСТЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ, ЩО РОЗВИВАЮТЬСЯ

Для класу динамічних систем, що розвиваються, запропоновані означення практичної стійкості, які узагальнюють добре відомі. Знайдені необхідні й достатні умови практичної стійкості за допомогою функцій Ляпунова.

T.M. Boyko

PRACTICAL STABILITY OF DEVELOPING DYNAMICAL SYSTEMS

The definitions of practical stability are proposed for the class of developing dynamical systems, which generalize the well-known ones. The necessary and sufficient conditions for practical stability using Lyapunov functions are found.

1. *Гаращенко Ф.Г., Бойко Т.М.* Математичні моделі зі зміною вимірності фазового простору для опису діяльності фінансово-промислових структур // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 1. – С. 79–81.
2. *Косачев Ю.В.* Экономико-математические модели эффективности финансово-промышленных структур – М.: Логос, 2004. – 245 с.
3. *Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – Киев: Наук. думка, 1985. – 304 с.
4. *Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.* Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2000. – 197 с.
5. *Гаращенко Ф.Г., Сопронюк Є.Ф.* Теореми про практичну стійкість систем зі зміною вимірності фазового простору // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2003. – Вип. 4. – С. 171 – 177.

Получено 25.11.2009

Об авторе:

Бойко Татьяна Николаевна,
аспирант кафедры моделирования сложных систем, факультета кибернетики Киевского национального университета имени Тараса Шевченко.
E-mail: tbojko@gmail.com