КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

И.Н. ПАРАСЮК, М.Ф. КАСПШИЦКАЯ

# О РЕШЕНИИ КОМБИНАТОРНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ НЕЧЕТКИМ МЕТОДОМ ВЕКТОРА СПАДА

*Рассмотрены вопросы модификации нечеткого метода вектора спада для решения многокритериальной оптимизационной задачи комбинаторного типа для случая разнородных исходных данных. Основное внимание уделено изучению метода, его частичных реализаций с учетом вида используемых функций принадлежности. Для иллюстрации используется оптимизационная задача на выборках с заданным числом элементов.*



**Введение**. Вопросы формализации и решения комбинаторных оптимизационных задач в размытых информационных пространствах в настоящее время остаются весьма актуальными. Несмотря на богатый арсенал методов, накопленный в данной области, дальнейшие исследования в этом направлении представляются чрезвычайно важными. Среди таких методов, в частности, следует отметить метод вектора спада (МВС) [1], позволяющий определить локальные решения задачи даже в весьма сложных практических случаях. Накопление опыта применения этого метода для различных информационных сред является не только полезным делом, но и весьма желательным. Собственно поэтому, проводя исследования в данном направлении, авторами настоящей статьи предложены различные нечеткие варианты метода вектора спада, основанные на понятии размытой окрестности, для решения однокритериальных оптимизационных задач [2, 3].

В настоящей работе рассматривается во многом более сложная задача – многокритериальная комбинаторная оптимизационная задача для случая разнородных информационных данных, представленных для ее решения. Предлагаются различные модификации нечеткого варианта метода вектора спада, описаны его соответствующие версии для определения множества Парето.

**Постановка задачи**. Пусть даны множество $A$ элементов, $|A| = n$, и множество признаков $B$, $|B|=k$. Причем, относительно множества $B$ заметим, что оно состоит из объектов разной природы: четких чисел, нечетких чисел, булевых переменных либо лингвистических переменных.

И пусть каждому из элементов $a_i$, $i$=1, . . ., $n$ множества $A$ поставлен в соответствие кортеж из $k$ объектов, что принадлежат множеству $B$. Таким образом, множеству А соответствует матрица

$$\tilde{A} = \left[ \alpha_{ij} \right],$$

где $\alpha_{ij}$ – признак $\beta_j \in B$ элемента $a_i$; представленный объектом одного из четырех видов; например, в работе [3] это было четкое или нечеткое число постоянного наименования для всей таблицы $\tilde{A}$ .

Суть задачи. состоит в том, чтобы выбрать из множества $A$ подмножество $A_0 \supseteq A$ из $m$ элементов таким образом, чтобы достичь минимума функционалов $F_r(x)$, $r$ = 1,2 . . ., $r_0$ при выполнении условия $U(x) \le C$, $C$=const.

Формально имеем обобщение задач 1, 2 из [3]. Отличие заключается в многокритериальности задачи и разнородности признаков.

Естественно считать, что каждый из критериев отдельно определен на данных одного типа: либо на четких числах; либо на размытых числах; либо на булевых переменных, либо на лингвистических переменных.

Для простоты представим множество $B$ как объединение множеств $B_s$, $s$=1, 2, 3, 4, причем $B_u \cap B_t = \varnothing$, $u$, $t$ = 1, 2, 3, 4, $u \ne t$. Считаем, что $B_1$ включает в себя те признаки, которые выражаются четкими числами; $B_2$ – признаки, которые выражаются нечеткими числами; $B_3$ – признаки, выраженные булевыми переменными; $B_4$ – лингвистическими переменными; $x \in X$, по-прежнему, является выборкой $m$ элементов из множества $A$, $X$ – множество всех таких выборок.

Далее, $F_1(x)=F_1(x, B_1)$, $F_2(x) = F_2(x, B_2)$, $F_3(x) = F_3(x, B_3)$, $F_4(x) = F_4(x, B_4)$. Аналогично представляется $U(x)$.

Метод вектора спада в этом случае сводится к построению последовательности приближенных множеств Парето. Следовательно, выбираем, как и в [2], начальное приближение $x_0 \in X$. Задаем функцию принадлежности для точек из множества $\Omega(x_0)$, например,

$$\mu(x, x_0) = 1, \text{ если } \quad F_i(x) < F_i(x_0), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad U(x) \le C,$$

$\mu(x, x_0) = 0$, если хотя бы одно из вышеприведенных неравенств не выполняется.

Рассмотрим этот процесс более детально. Как видно, согласно матрице $\tilde{A}$, некоторому $x$, равному, например, $(a_1, a_4, a_6)$, будет соответствовать матрица

$$\tilde{A}\,(x)= \begin{bmatrix} \alpha_{11}\ \alpha_{12}\ , \dots, \alpha_{1n} \\ \alpha_{41}\ \alpha_{42}\ , \dots, \alpha_{4n} \\ \alpha_{61}\ \alpha_{62}\ , \dots, \alpha_{6n} \end{bmatrix}.$$

Если признаки упорядочены согласно множеств $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, т. е. столбцы матрицы $\widetilde{A}$ описывают сначала группу признаков, что принадлежит множеству $B_1$, потом группу признаков, что принадлежат множеству $B_2$ и т.д., то матрица $\widetilde{A}(x)$ схематически будет представлена блоками $B_i(x)$:

$$\widetilde{A}(x) = [B_1(x), B_2(x), B_3(x), B_4(x)].$$

В этих предположениях представляем далее задачу как поиск такого множества $x^* \in X$ мощности $m$, на котором достигаются минимумы на множестве $X$ для функций $F_1(x) = F_1(x, B_1(x)), \ldots, F_4(x) = F_4(x, B_4(x))$ при условии $U(x) \le C$.

Допустим, что для числового определения $F_i(x)$ можно взять расстояние между соответствующими $\alpha_{ij} \in B_r$, $r = 1, 2, 3, 4$. Тогда

$$D(x_1,x_2) = \sum_{a_i \in x_1} \sum_{a_j \in x_2} d\left(a_i, a_j\right), \text{ где } d\left(al, a_k\right) = \sum d\left(\alpha_{lj}, \alpha_{kj}\right)$$

в зависимости от того, какому из подмножеств принадлежат $\alpha_{lj}, \alpha_{kj}$ $(B_1, B_2, B_3$ или $B_4)$ определяем соответствующие расстояния:

для четких чисел как суммарную абсолютную величину разницы четких чисел; для нечетких чисел как суммарную абсолютную величину разницы нечетких чисел;

для булевых переменных – как расстояние Хемминга;

для лингвистических переменных – устанавливаются на основе экспертных оценок.

Таким образом,

$F_1(x)$ выражается в четких числах,

$F_2(x)$ выражается в нечетких числах,

$F_3(x)$ выражается в целых числах,

$F_4(x)$ выражается в нечетких приближенных числах.

Алгоритм 1. Задав определенный вид функций принадлежности (пока не вникая в ее суть), формируем окрестность $\widetilde{\Omega}(x,x_0)$. Из точек этой окрестности образуем множество $\widetilde{\Omega}^0(x,x_0)$, для которого

$$F_i(x, B_i(x)) \le F_i(x_0, B_i(x_0)), \quad i = 1, 2, 3, 4, \; x \in \widetilde{\Omega}(x,x_0).$$

Ясно, что $\widetilde{\Omega}(x, x_0) \supseteq \widetilde{\Omega}^0(x, x_0)$. Множество $\widetilde{\Omega}^0(x, x_0)$ является пересечением четырех подмножеств окрестности $\widetilde{\Omega}(x, x_0)$, соответственно для которых $F_i(x, B_i(x)) \le F_i(x_0, B_i(x_0))$, $i = 1, 2, 3, 4$. В каждом из этих подмножеств найдем точки $x_0^1$, $x_0^2$, $x_0^3$, $x_0^4$, что дают минимум соответствующих функций $F_i(x, B_i(x))$.

Далее, строим окрестности этих точек (опять посредством соответствующих функций принадлежности), находим их пересечение и на этом пересечении точки, что предоставляют минимум соответствующим целевым функциям. Эти действия можно продолжить и дальше в виде итераций, пока пересечение множеств не будет постоянным на двух соседних шагах итераций, или приближенное решение, найденное на определенном шаге итерации, удовлетворит требованиям для принятия решений. Таким образом, наши действия можно интерпретировать как нахождение приближенного множества Парето: в этом случае на некотором шаге $s$ итерационного процесса $\widetilde{\Omega}^{s}(x, x^{s}) = \varnothing$. Приближенным множеством Парето считаем $\widetilde{\Omega}^{s-1}(x, x^{s-1})$.

Для последующих обобщений введем два определения.

Определение 1. Размытая окрестность четкого множества $D \subset X$ задается с помощью функции принадлежности $\Phi(x)=\max\limits_{y\in D}\varphi(x, y)$, $x\in X$, где $\varphi(x,y)$ – функция принадлежности $x$ при фиксированном $y\in D$.

Определение 2. Размытая окрестность размытого множества $D$, что определена с помощью функции принадлежности $\mu(y)$ на универсуме $X$, задается с помощью функции принадлежности $\wp(x)=\max\limits_{y\in D}\omega(x,\mu(y))$, где $\omega(x,\mu(y))$ – функция принадлежности $x$ при фиксированном $y$.

Отметим, что нечеткую окрестность можно трактовать как частичный случай бинарного нечеткого отношения на универсумах $X_1=X\backslash D$, $X_2=D$ [4].

Пользуясь этими определениями, сформируем вариант МВД для решения многокритериальной оптимизационной задачи. Напомним, что решением многокритериальной минимизационной задачи служит такое множество $\Pi\subset X$ на котором невозможно уменьшение одного из критериев без увеличения хотя бы одного из других критериев.

Общая схема МВС в рассматриваемом случае выглядит следующим образом:

Алгоритм 2.

1. Выбираем произвольно (или руководствуясь определенными рассуждениями) множество $D_0$ – начальное множество. На множестве $D_0$ находим множество Парето $\Pi_0$.

2. С помощью заданной функции принадлежности $\varphi(x, y)$ $x\in X$, $y\in \Pi_0$ находим окрестность $D$ и в ней решаем рассматриваемую многокритериальную задачу; находим таким образом множество Парето $\Pi_1$.

3. Полученное множество Парето $\Pi_1$ выбираем центром „окрестности" $D_2$, и, как выше, рассматриваем в этой окрестности многокритериальную задачу; решение ее обозначим $\Pi_2$.

Итерационный процесс продолжаем, пока на некоторой итерации s не окажется, что $\Pi_s=\Pi_{s-1}$, или полученное приближенное решение не удовлетворит требованию ОПР.

Отметим что основными моментами метода есть: задание функции принадлежности (в данном случае функции $\varphi_s(x, y)$ $x \in X$, $y \in D_s$, $s=1, \ldots ,$) и способа нахождения локального решения (в данном случае $\Pi_s$).

Относительно выбора функции принадлежности следует заметить, что от удачного выбора ее зависит успешность решения задачи. Этот вопрос является слишком важным и нуждается в детальном изучении, которому будет посвящен отдельный раздел данной работы.

Не менее важным является способ нахождения локальных решений задачи в подмножестве $\Pi_s$ окрестности $D_s$. В частности, в случае дискретной многокритериальной задачи и при условии незначительной мощности $D_s$, можно воспользоваться методом полного перебора.

Например, пусть $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$. Согласно этому получаем числовые последовательности $F_i(x_j) = F_i(x_j, B_i(x_j))$, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, \ldots, 6$, которые упорядочены по убыванию. Удобно воспользоваться табличной записью, где первой позицией в строке является наименование критерия, а все другие – аргументы соответствующих значений критерия, упорядоченных по убыванию (табл. 1).

ТАБЛИЦА 1. Критерии и их аргументы

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | $x_1$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_2$ | $x_6$ |
| $F_2$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_3$ | $x_5$ | $x_1$ | $x_6$ |
| $F_3$ | $x_4$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_3$ | $x_2$ |
| $F_4$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | $x_3$ | $x_5$ | $x_6$ |

Далее, в табл. 2 запишем „динамику" спада значений критериев. К примеру, запись $1 \to 4$ в первой строке второго столбца означает, что $F_1(x_3) \geq \; \geq F_1(x_4)$ и т. д. Такое упорядочение в дальнейшем будет использовано для построения приближенного множества Парето, а также может быть применимо для определения множества «перспективных точек», т.е. множества точек, в которых возможно совокупное уменьшение всех частных критериев.

ТАБЛИЦА 2. Динамика спада значений критериев

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 1→3 | 1→4 | 1→5 | 1→2 | 1→6 | 3→4 | 3→5 | 3→2 |
| | 3→6 | 4→5 | 4→2 | 4→6 | 5→2 | 5→6 | 2→6 | |
| $F_2$ | 2→4 | 2→3 | 2→5 | 2→1 | 2→6 | 4→3 | 4→5 | 4→1 |
| | 4→6 | 3→5 | 3→1 | 3→6 | 5→1 | 5→6 | 1→6 | |
| $F_3$ | 4→1 | 4→5 | 4→6 | 4→3 | 4→2 | 1→5 | 1→6 | 1→3 |
| | 1→2 | 5→6 | 5→3 | 5→2 | 6→3 | 6→2 | 3→2 | |
| $F_4$ | 1→2 | 1→4 | 1→3 | 1→5 | 1→6 | 2→4 | 2→3 | 2→5 |
| | 2→6 | 4→3 | 4→5 | 4→6 | 3→5 | 3→6 | 5→6 | |

Исходя из схематических записей табл. 2, приходим к следующим выводам:

в точке $x_1$ уменьшаются функции $F_2$ и $F_3$;

в точке $x_2$ уменьшаются функции $F_1$ и $F_3$;

в точке $x_3$ уменьшаются функции $F_1$, $F_2$, $F_3$ и $F_4$;

в точке $x_4$ уменьшаются функции $F_1$, $F_2$ и $F_4$;

в точке $x_5$ уменьшаются функции $F_1$, $F_2$, $F_3$ и $F_4$;

в точке $x_6$ уменьшаются функции $F_1$, $F_2$, $F_3$ и $F_4$.

Таким образом, точками, в которых уменьшаются все критерии, есть $x_3$, $x_5$, $x_6$. Приближенным множеством Парето является множество $\{x_1, x_2, x_4\}$.

**О функциях принадлежности**. Пусть задано $k$ критериев (в данном случае $k = 4$) $F_j(x)$, $j = 1, 2 \ldots, k$, $x \in X$. Для решения задачи, согласно вышеизложенного алгоритма 1, задано $k$ функций принадлежности $\mu_1(x)$, $\mu_2(x), \ldots, \mu_k(x)$, с помощью которых строим нечеткие окрестности для нахождения локальных минимумов соответствующих критериев. Для простоты будем считать, что способ вычисления функции $\mu_j(x)$, $j=1,2,\ldots,k$, не изменяется в течение вычислительного процесса и значения $\mu_j(\mathrm{x})$ на шаге итерации $i$ зависят от $x^i$, т. е. $\mu_j(x) = \mu_j(x, x^i)$. Возникает практический вопрос: как построить функции принадлежности $\mu_j(x)$, $j = 1, 2,..., k$, такие, чтобы они „улавливали" те точки $x \in X$ с окрестности $\Omega(x, x^i)$, $i = 0,1$ ..., которые являются более перспективными относительно минимизации критерия. Например, если $F(x)>0$ на всем пространстве $X$, то

$$\mu(x,x^i)=\begin{cases} \dfrac{F(x)}{F(x^i)}, & \text{если } F(x) \le F(x^i), \\ 0, & \text{если } F(x) > F(x^i) \end{cases}$$

имеет вышеуказанные свойства.

Дальше, пусть $\Phi(x)$ – мажоранта функции $F(x)$, а функция $\varphi(x)$ – ее миноранта, т. е. $\varphi(x) \le F(x) \le \Phi(x)$ для $x \in X$. Тогда функциями принадлежности могут служить, например, функции

$$\mu_1(x,x^i)=\begin{cases} \dfrac{F(x_i)}{\Phi(x)}, & \text{если } \Phi(x) \ge F(x^i), \\ 0, & \text{если } \Phi(x) < F(x^i); \end{cases}$$

$$\mu_2(x, x^i)=\begin{cases} \dfrac{F(x_i)}{\varphi(x)}, & \text{если } \varphi(x) \ge F(x^i), \\ 0, & \text{если } \varphi(x) < F(x^i); \end{cases}$$

$$\mu_3(x,x^i)=\begin{cases} \dfrac{F(x)}{\Phi(x^i)}, & \text{если} \quad F(x) \le \Phi(x^i), \\ 0, & \text{если} \quad F(x) > \Phi(x^i); \end{cases}$$

$$\mu_4(x,x^i)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x^i)}{F(x)}, & \text{если} \quad \varphi(x^i) \le F(x), \\ 0, & \text{если} \quad \varphi(x^i) > F(x). \end{cases}$$

Относительно функций $\mu_3(x, x^i)$ и $\mu_4(x, x^i)$, то они особенно могут быть полезными в алгоритмах МВС, которые для определения локального решения на определенном шаге итеративного процесса используют мажоранту и миноранту целевой функции.

Как и в работах [3, 4], для функций принадлежности, что определяют нечеткий вариант МВС, имеют место понятия адекватности, индифферентности и противоречивости функции принадлежности условиям задачи и схеме применяемого варианта МВС. Функцию принадлежности, что действует в окрестности – универсуме $\Omega(x^i)$, обозначим $\mu(x, x^i)$.

Для задачи минимизации будем придерживаться следующих определений.

Если $\mu(x^{i+1}, x^i) > \mu(x^i, x^{i-1})$, то алгоритм МВС, построенный с помощью функции $\mu$, будет адекватным; если $\mu(x^{i+1}, x^i) = \mu(x^i, x^{i-1})$ – индифферентным, а при условии $\mu(x^{i+1}, x^i) < \mu(x^i, x^{i-1})$ – противоречивым. Естественно, что применять противоречивые алгоритмы не стоит, кроме некоторых частных случаев.

Что касается функций принадлежности, что действуют в окрестности – универсуме $\Omega(x^i)$, то в общем случае относительно рассматриваемой задачи, она записывается так:

$$\mu(x, x^i) = \mu(x, x^i, F_1(x),\ldots, F_s(x), F_1(x^i),\ldots, F_s(x^i), U(x) - C, U(x^i) - C).$$

В случае алгоритма 1, когда минимизацию проводим на каждом шаге итерации для частичных критериев $F_r$, $r$=1, . . . , $s$, и приближенным множеством Парето считаем пересечение соответствующих окрестностей, то функцией принадлежности в этой окрестности будет величина

$$\mu(x, x^i) = \min(\mu_1(x, x^i), \mu_2(x, x^i), \ldots, \mu_s(x, x^i)).$$

Из последней записи можно сделать вывод, что при адекватности каждой из функций принадлежности $\mu_r(x, x^i)$, $r = 1,\ldots, s$, функция принадлежности $\mu(x, x^i)$ тоже будет адекватной.

*Утверждение.* В случае адекватности функции принадлежности $\mu(x)$ задачу минимизации функции $F(x)$ можно заменить задачей максимизации функции $\mu(\text{x})$, причем их локальные решения на каждом шаге алгоритма совпадают.

Доказательство легко осуществить за принципом "от противного".

**Заключение**. В настоящей работе рассмотрены нечеткие алгоритмы решения задач одного класса многокритериальной оптимизации в четкой постановке на примере оптимизационной задачи на выборках с заданным числом элементов. Вполне очевидно, что предложенный подход может успешно применяться для решения других типов задач, а также в случае представления их в нечетком виде, т.е. применение нечеткого алгоритма для решения задачи с нечеткими исходными данными. При этом темой отдельных исследований могут служить вопросы построения устойчивых алгоритмов нечеткого метода вектора спада для решения задач комбинаторной оптимизации в четкой и нечеткой постановках, а также оценивание получаемых приближенных решений.

*І.М. Парасюк, М.Ф. Каспшицька*

ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМБІНАТОРНОЇ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ НЕЧІТКИМ МЕТОДОМ ВЕКТОРА СПАДУ

Розглянуті питання модифікації нечіткого методу вектора спаду для розв'язування багатокритеріальної оптимізаційноої задачі комбінаторного типу для випадку різнорідних вихідних даних. Основна увага приділена вивченню методу, його часткових реалізацій з урахуванням вигляду використовуваних функцій приналежності. Для ілюстрації використовується оптимізаційна задача на вибірках із заданим числом елементів.

*I.N. Parasyuk, M.F. Kaspschicka*

ON A SOLUTION TO COMBINATORIAL MULTICRITERION OPTIMIZATION PROBLEM BY SLUMP-VECTOR FUZZY METHOD

Modification issues of slump-vector fuzzy method for combinatorial-type multicriterion optimization problem in the case of heterogeneous basic data are considered. Main attention is devoted to the study of the method and its partial implementations taking into account a type of membership functions used. For illustration purposes, the optimization problem on samples with predefined number of elements is used.

The questions of modification of unclear method of vector of slump are considered for the decision of multicriterion optimization task of combinatorics type for the case of heterogeneous basic data. Basic attention is spared the study of method, his partial realization taking into account the type of in-use functions of belonging. For illustration an optimization task is used on selections with the set number of elements.

1. *Сергієнко І.В.* Один метод роз`язування задач на відшукання екстремальних значень. //Автоматика. – 1964. – № 5. – С. 15–21.
2. *Парасюк И.Н.,Каспшицкая М.Ф.* О развитии метода вектора спада на случай размытых окрестностей // Компьютерная математика. – 2008. – № 2. – С. 145–155.
3. *Парасюк И.Н., Каспшицкая М.Ф.* Размытый алгоритм метода вектора спада для решения оптимизационных задач на выборках // Компьютерная математика. – 2009. – № 1. – С. 152–163.
4. *Леоненков А.В.* Нечеткое моделирование в среде MATLAB u fuzzy TECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.–736 с.

Получено 22.04.2009

***Об авторах:***

*Парасюк Иван Николаевич*,
член-корреспондент НАН Украины, заведующий отделом
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
*E-Mail: ivpar1@i.com.ua*

*Каспшицкая Мария Фадеевна*,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.