УДК 53.01:53.05 + 519.2

И.И. ГОРБАНЬ*

ТЕОРЕМА О СПЕКТРЕ ЧАСТОТ ЗНАЧЕНИЙ РАЗРЯДА РАСХОДЯЩЕЙСЯ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев, Украина

Анотація. *Запропоновано новий доказ теореми про спектр частот значень розряду числової послідовності, що розбігається.*
Ключові слова: *послідовность, що розбігається, теорія гіпервипадкових явищ.*

Аннотация. *Предложено новое доказательство теоремы о спектре частот значений разряда расходящейся числовой последовательности.*
Ключевые слова: *расходящаяся последовательность, теория гиперслучайных явлений.*

Abstract. *New proof of the theorem on spectrum of frequencies of values of class interval for divergent sequences is proposed.*
Keywords: *divergent sequence, theory of hyper-random phenomena.*

1. Введение

Методы и подходы к описанию статистически неустойчивых физических процессов, разработанные в рамках физико-математической теории гиперслучайных явлений [1–7], были использованы в работах [7–11] для построения основ математического анализа расходящихся и многозначных функций, аналогичного классическому математическому анализу.

В монографии [7] (стр. 275–276), в частности, сформулирована теорема о спектре частот значений разряда расходящейся последовательности и приведено ее доказательство. По мнению некоторых математиков, используемые при доказательстве положения неочевидны, что ставит под сомнение справедливость теоремы.

Целью настоящей статьи является другое доказательство теоремы, лишенное указанного недостатка.

2. Исходные понятия

Прежде чем переходить к формулировке и доказательству теоремы, кратко остановимся на некоторых не широко распространенных понятиях, используемых в теореме.

Известно, что не всякая числовая последовательность имеет предел.

Последовательность

$$\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \tag{1}$$

не имеющая предела (расходящаяся последовательность), может быть охарактеризована [7] множеством частичных пределов (предельных точек), образующих спектр предельных точек $\tilde{S}_x$.

Под предельной точкой последовательности (1) подразумевается [12, 13] предел частичной последовательности (подпоследовательности)

$$\{x_{n_k}\} = x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots, \tag{2}$$

образованной из исходной последовательности (1) путем отбрасывания части ее членов с сохранением порядка следования оставшихся членов.

Под спектром предельных точек $\tilde{S}_x$ последовательности (1) понимается множество всех ее предельных точек (то есть множество всех пределов сходящихся подпоследовательностей).

С помощью обобщенного предела $\underset{n\to\infty}{\mathrm{LIM}}$ [7], в отличие от обычного предела $\lim\limits_{n\to\infty}$, допускающего множественность значений, спектр предельных точек описывается выражением $\tilde{S}_x = \underset{n\to\infty}{\mathrm{LIM}}\, x_n$.

Диапазон значений последовательности (1) можно разбить на фиксированные перекрывающиеся разряды (классовые интервалы)

$$(-\infty, x^1), (-\infty, x^2), \ldots, (-\infty, x^{R-1}), (-\infty, +\infty),$$

где x^r – правый конец r-го разряда $(r = \overline{1, R-1})$.

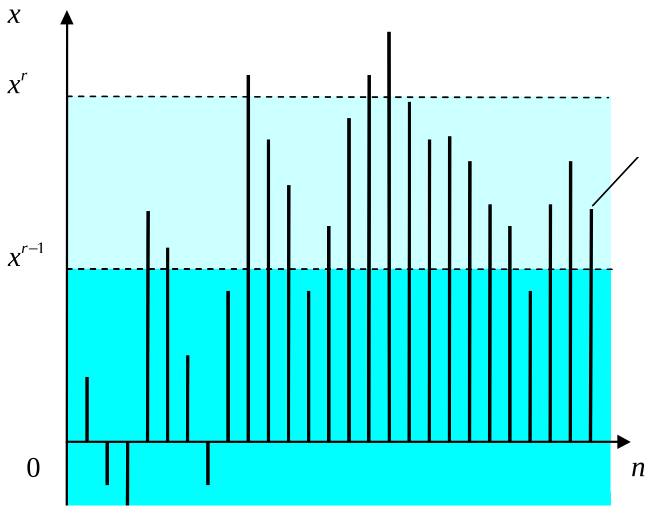

Рис. 1. Числовая последовательность $\{x_n\}$

В системе координат (n, x) (где $n = 1, 2, \ldots$ – число членов последовательности $X_n = x_1, x_2, \ldots, x_n$) r-му разряду соответствует подпоследовательность X_n^r, образованная из членов последовательности X_n, попавших в рассматриваемый разряд (на рис. 1 в слегка затемненную неограниченную снизу полосу).

При фиксированном числе членов n последовательности X_n частоту заполнения r-го разряда характеризует частота $p_n^r = \dfrac{n^r}{n}$, где n^r – количество членов, попадающих в r-й разряд.

Очевидно, значения частоты p_n^r лежат в интервале $[0,1]$.

Из множества частот p_n^r для фиксированного разряда r и $n = 1, 2, \ldots$ можно образовать бесконечную последовательность $\{p_n^r\}$. Эта последовательность не обязательно сходится (то есть может иметь множество предельных точек). Множество частичных пределов (предельных точек) последовательности частот $\{p_n^r\}$ образует спектр $\tilde{S}_p^r$ частот значений r-го разряда.

Спектры $\tilde{S}_p^r$, соответствующие различным разрядам r, являются характеристиками последовательности (1).

3. Теорема и ее доказательство

Теорема. Если спектр $\tilde{S}_p^r$ частот значений r-го разряда последовательности (1) содержит две предельные точки $p_{a_1}^r$, $p_{a_2}^r$ ($p_{a_1}^r < p_{a_2}^r$), то предельной является также любая точка p_a^r, лежащая в интервале $p_{a_1}^r < p_a^r < p_{a_2}^r$.

Для доказательства рассмотрим произвольное число p_a^r, удовлетворяющее указанному неравенству. Заметим, что при неограниченном увеличении числа членов n

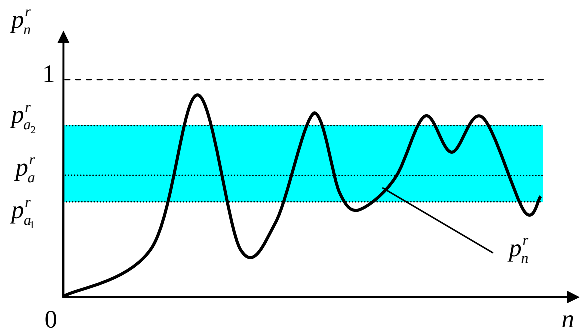

Рис. 2. Последовательность частот значений $\{p_n^r\}$

величина p_n^r бесконечное число раз оказывается то меньше, то больше числа p_a^r (рис. 2), а значения p_n^r меняются таким образом, что модуль приращения $|\Delta p_n^r| = |p_{n+1}^r - p_n^r|$ меньше величины $1/n$.

Сформируем из последовательности $\{p_n^r\}$ подпоследовательность $\{p_{n_k}^r\}$, члены которой удовлетворяют следующим условиям, гарантирующим, что $|p_a^r - p_{n_{k+1}}^r| < |p_a^r - p_{n_k}^r|$:

• членом последовательности $\{p_{n_k}^r\}$ может быть только член p_n^r последовательности $\{p_n^r\}$, удовлетворяющий условию $p_n^r < p_a^r < p_{n+1}^r$;

• каждый последующий член последовательности $\{p_{n_k}^r\}$ больше предыдущего ее члена: $p_{n_{k+1}}^r > p_{n_k}^r$ (рис. 3).

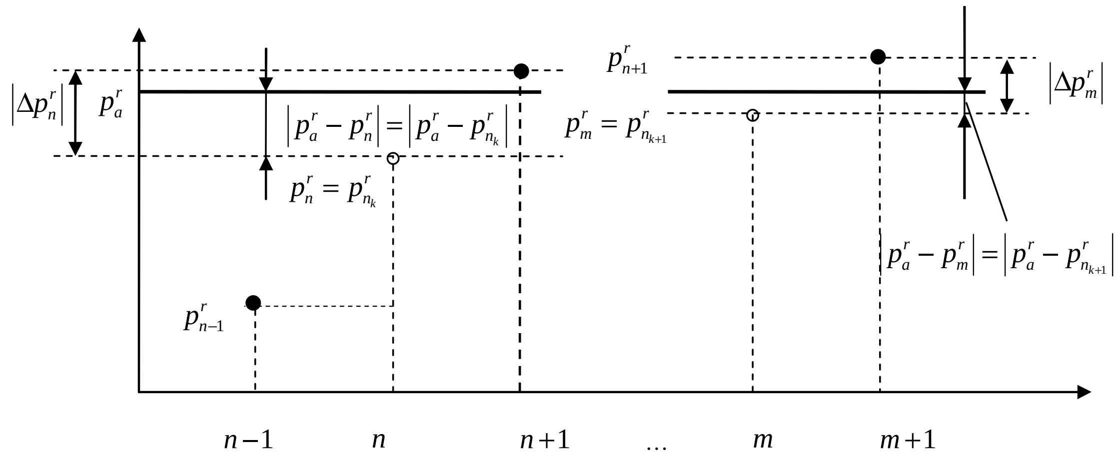

Рис. 3. Иллюстрация схемы отбора членов последовательности $\{p_{n_k}^r\}$

Поскольку $|p_a^r - p_{n_k}^r| < 1/n_k$, то при $k \to \infty$ (тогда $n_k \to \infty$) приращение $|p_a^r - p_{n_k}^r| \to 0$, то есть p_a^r является пределом подпоследовательности $\{p_{n_k}^r\}$.

Таким образом, p_a^r является предельной точкой последовательности (1), что и требовалось доказать.

4. Вывод

Приведенное новое доказательство подтверждает справедливость теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений / Горбань И.И. – К.: ИПММС НАН Украины, 2007. – 184 с.
2. Gorban I.I. Hyper-random phenomena: definition and description / I.I. Gorban // Information Theories and Applications. – 2008. – Vol. 15, N 3. – P. 203 – 211.

3. Gorban I.I. Disturbance of statistical stability / I.I. Gorban // Information Models of Knowledge. – Kiev – Sofia: ITHEA, 2010. – P. 398 – 410.
4. Gorban I.I. Disturbance of statistical stability (part II) / I.I. Gorban // International Journal of Information Theories and Applications. – 2011. – Vol. 18, N 4. – P. 321 – 333.
5. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с.
6. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости / И.И. Горбань // Журнал технической физики. – 2014. – № 3. – С. 22 – 30.
7. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2014. – 444 с.
8. Горбань И.И. Расходящиеся последовательности и функции / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2012. – № 1. – С. 106 – 118.
9. Горбань И.И. Многозначные величины, последовательности и функции / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2012. – № 3. – С. 147 – 161.
10. Горбань И.И. Многозначные детерминированные величины и функции / И.И. Горбань // Труды седьмой научно-практической конференции «Математическое и имитационное моделирование систем МОДС 2012». – К., 2012. – С. 257 – 260.
11. Gorban I.I. Divergent and multiple-valued sequences and functions / I.I. Gorban // Problems of Computer Intellectualization. Book 28. – Kiev – Sofia: ITHEA, 2012. – P. 359 – 374.
12. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г.М. – М.-Л.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1958. – Т. 1. – 607 с.
13. Ильин В.А. Математический анализ / Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. – М.: Изд-во московского университета, 1985. – Т. 1. – 660 с.

Стаття надійшла до редакції 08.12.2014