УДК 517.53

М. О. Гірник

Субгармонічні функції покращеного регулярного зростання

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)

Знайдено асимптотику субгармонічної функції покращеного регулярного зростання за кутовою щільністю її міри Ріса. Для цього доведено новий варіант так званої леми про зсув.

Клас цілих функцій покращеного регулярного зростання ввели у розгляд і досліджували Б. В. Винницький та Р. В. Хаць [1–5]. Вони довели критерій для цієї регулярності у випадку, коли нулі зосереджені на скінченній множині променів. Ми ж у даному повідомленні розглядаємо загальний випадок субгармонічних функцій, для яких існує покращена кутова щільність міри Ріса.

Застосовуватимемо стандартні позначення і основні факти теорії потенціалу [6] та теорії цілих функцій цілком регулярного зростання [7]. Позначатимемо через C з індексами додатні сталі, через $n(r, \theta_1, \theta_2)$ — міру Ріса μ сектора $\{z\colon |z| \leqslant r, \theta_1 < \arg z \leqslant \theta_2\}$, $n(r) := n(r, 0, 2\pi)$, $n(z, t) := \mu(\{\xi\colon |\xi - z| \leqslant t\})$. Для формулювання наших результатів потрібні кілька означень. Кажуть, що міра Ріса має покращену кутову щільність, якщо для всіх θ_1, θ_2, $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 2\pi$, крім, можливо, не більше зліченної множини, виконується співвідношення

$$n(r, \theta_1, \theta_2) = \Delta(\theta_1, \theta_2) r^{\rho} + o(r^{\rho_1}), \qquad r \to \infty, \tag{1}$$

рівномірно за θ_1, θ_2, де $0 < \rho_1 < \rho$. Продовжимо функцію $\Delta(\theta) := \Delta(0, \theta)$ на всю множину дійсних чисел через співвідношення $\Delta(\theta + 2\pi) := \Delta(\theta) + \Delta(2\pi)$.

Теорема 1. *Нехай субгармонічна функція u порядку ρ задовольняє умову* (1) *з нецілим ρ, $[\rho] = p < \rho_1 < \rho$. Тоді існують дійсне число ρ_2, $\rho_1 < \rho_2 < \rho$, та виняткова множина S такі, що*

$$u(re^{i\varphi}) = h(\varphi) r^{\rho} + o(r^{\rho_2}), \qquad S \not\ni re^{i\varphi} \to \infty, \tag{2}$$

де

$$h(\varphi) = \frac{\pi}{\sin(\pi\rho)} \int_0^{2\pi} \cos(\rho(|\varphi - \theta| - \pi))\, d\Delta(\theta), \tag{3}$$

а

$$S \subset \bigcup_k \{z\colon |z - z_k| \leqslant r_k\}, \qquad \sum_{|z_k| \leqslant R} r_k = o(R), \qquad R \to \infty. \tag{4}$$

Теорема 2. *Нехай субгармонічна функція*

$$u(z) = m\log|z| + \operatorname{Re} P(z) + \int\limits_{\mathbf{C}} \log\left|E\left(\frac{z}{\xi}, p\right)\right| d\mu(\xi) \tag{5}$$

порядку ρ задовольняє умову (1) з натуральним ρ, $[\rho] = p$. Тут $E(w,p)$ — первинний множник Вейєрштрасса роду p, $m \geqslant 0$ — ціле число, $P(z)$ — многочлен степеня не вище p, a_p — його старший коефіцієнт,

$$\int\limits_{\{\xi\colon |\xi|\leqslant r\}} \xi^{-\rho} d\mu(\xi) = \delta + o(r^{\rho_3 - \rho}), \qquad r \to +\infty, \tag{6}$$

де $\delta \in \mathbf{C}$, $0 < \rho_3 < \rho$. Тоді існують дійсне число ρ_2, $\rho_1 < \rho_2 < \rho$, та виняткова множина S такі, що мають місце (2) та (4) з

$$h(\varphi) = \int\limits_{\varphi}^{2\pi+\varphi} (\varphi - \theta)\sin(\rho(\theta - \varphi))\, d\Delta(\theta) + \tau\cos(\rho\varphi + \sigma), \tag{7}$$

де $\tau = |\delta/\rho + a_p|$, $\sigma = \arg(\delta/\rho + a_p)$.

Прокоментуємо ці теореми. Розглянуто загальний випадок субгармонічних функцій покращеного регулярного зростання, однак виняткова множина більша, ніж у вищевказаних роботах Винницького та Хаця, де ця множина міститься в об'єднанні кругів зі скінченною сумою радіусів. Коротко пояснимо хід доведенння теорем 1 та 2. Ми в основному наслідуємо класичну схему знаходження асимптотики цілих функцій цілком регулярного зростання [7, розділ 2]. Новий момент полягає в тому, що так звана лема про зсув нулів [7, с. 130–140, 143–147; 8, с. 416] не застосовна в нашій ситуації, оскільки це приводить до погіршення точності залишкового члена асимптотики. З огляду на вказану обставину ми використовуємо прийом з [9]. Сформулюємо наші аналоги леми про зсув для випадків нецілого та цілого порядків і доведемо один з них (доведення у випадку цілого порядку подібне, однак пов'язане з подоланням деяких труднощів технічного характеру).

Лема 1. *Для довільних дійсних чисел $\varepsilon > 0$, ρ, ρ_1 ($p = [\rho] < \rho_1 < \rho$), $R > 1$, γ, $0 < \gamma < 1$, і для будь-яких канонічних інтегралів нецілого порядку ρ*

$$L_j(z) = \int\limits_{\mathbf{C}} \log\left|E\left(\frac{z}{\xi}, p\right)\right| d\mu_j(\xi), \qquad j = 1, 2,$$

що мають скінченні верхні щільності їхніх мір Ріса по відношенню до r^ρ і $d\mu_2(\xi) = d\mu_1(T\xi)$, де відображення $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ вимірне за Борелем та задовольняє умови $|T\xi| = |\xi|$, $|T\xi - \xi|/|\xi| < R^{-\gamma}$, існують сталі C_1, C_2 такі, що

$$|L_1(z) - L_2(z)| < C_1 R^{\rho - \gamma + \varepsilon}$$

для $z \in \{\xi\colon R \leqslant |\xi| < 2R\} \setminus S$, де S є винятковою множиною, що міститься в об'єднанні кругів із сумою радіусів, меншою ніж $C_2 R^{1-\varepsilon}$.

Лема 2. *Для довільних дійсних чисел* $\varepsilon > 0$, ρ, $\rho_1 (p-1 < \rho_1 < \rho = [\rho] = p \in \mathbb{N})$, $R > 1$, γ, $0 < \gamma < 1$, *і будь-яких інтегралів цілого порядку* ρ

$$L_j(z) := \int\limits_{\{\xi\colon |\xi| \leqslant R\}} \log\left|E\left(\frac{z}{\xi}, p-1\right)\right| d\mu_j(\xi) + \int\limits_{\{\xi\colon |\xi| > R\}} \log\left|E\left(\frac{z}{\xi}, p\right)\right| d\mu_j(\xi), \qquad j = 1, 2,$$

що мають скінченні верхні щільності їхніх мір Ріса по відношенню до r^ρ *і* $d\mu_2(\xi) = d\mu_1(T\xi)$, *де відображення* $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *вимірне за Борелем та задовольняє умови* $|T\xi| = |\xi|$, $|T\xi - \xi|/|\xi| < R^{-\gamma}$, *існують сталі* C_2, C_3 *такі, що*

$$|L_1(z) - L_2(z)| < C_3 R^{\rho - \gamma + \varepsilon}$$

для $z \in \{\xi\colon R \leqslant |\xi| < 2R\} \setminus S$, *де* S *є винятковою множиною, що міститься в об'єднанні кругів із сумою радіусів, меншою ніж* $C_2 R^{1-\varepsilon}$.

Доведення леми 1. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $n(1) = \mu_1(\{z\colon |z| \leqslant 1\}) = \mu_2(\{z\colon |z| \leqslant 1\}) = 0$. Зобразимо канонічні інтеграли L_j, $j = 1, 2$, у формі

$$L_j(z) = \sum_{k=1}^{k=4} L_{j,k}(z),$$

де

$$L_{j,1}(z) := \int\limits_{\{\xi\colon |\xi| \leqslant R/2\}} \log\left|E\left(\frac{z}{\xi}, p\right)\right| d\mu_j(\xi),$$

$$L_{j,2}(z) := \int\limits_{\{\xi\colon |\xi| > 4R\}} \log\left|E\left(\frac{z}{\xi}, p\right)\right| d\mu_j(\xi),$$

$$L_{j,3}(z) := \int\limits_{\{\xi\colon R/2 < |\xi| \leqslant 4R\}} \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\xi} + \cdots + \frac{1}{p(z/\xi)^p}\right) d\mu_j(\xi),$$

$$L_{j,4}(z) := \int\limits_{\{\xi\colon R/2 < |\xi| \leqslant 4R\}} \log\left|1 - \frac{z}{\xi}\right| d\mu_j(\xi).$$

Розпочнемо з оцінки різниці $|L_{1,1}(z) - L_{2,1}(z)|$, для цього застосуємо метод з [9, с. 970–975]:

$$|L_{1,1}(z) - L_{2,1}(z)| = \left|\int\limits_{|\xi| \leqslant R/2} \left(\log\left|E\left(\frac{z}{\xi}, p\right)\right| - \log\left|E\left(\frac{z}{T\xi}, p\right)\right|\right) d\mu_1(\xi)\right|. \tag{8}$$

Виберемо однозначну вітку функції $H(\theta) := \log E(z/(te^{i\theta}), p)$ на дузі $\widehat{\xi, T\xi}$. Зазначимо, що глобальний вибір такої вітки на колі $\{te^{i\theta}\colon t = |\xi|\}$ неможливий. Застосовуючи формулу

$$H'(\theta) = -\frac{\left(\dfrac{z}{|\xi|} e^{-i\theta}\right)^p}{1 - \dfrac{z}{|\xi|} e^{-i\theta}} \frac{z}{|\xi|} e^{-i\theta} (-i),$$

отримуємо оцінку

$$
\begin{aligned}
&\left|\log\left|E\left(\frac{z}{\xi},p\right)-\log\left|E\left(\frac{z}{T\xi},p\right)\right|\right|\right| \leqslant |H(\arg\xi)-H(\arg T\xi)| \leqslant \\
&\quad \leqslant \max_{\theta\in[\arg\xi,\arg T\xi]} H'(\theta)R^{-\gamma} \leqslant \max_{\theta\in[\arg\xi,\arg T\xi]} |z|^{p+1}|\xi|^{-p}/|\xi-z|R^{-\gamma}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Застосовуючи (9), продовжимо оцінку (8), стандартно (див., напр., [7, с. 22–23]) оцінюючи інтеграл Стільтьєса

$$
|L_{1,1}(z)-L_{2,1}(z)| \leqslant C_4R^{p+1-\gamma}\int\limits_0^{R/2}\frac{dn(t)}{(|z|-t)t^p} \leqslant C_5R^{p-\gamma}\int\limits_0^{R/2}\frac{dn(t)}{t^p} \leqslant C_6R^{\rho-\gamma}. \tag{10}
$$

Подібні міркування дають оцінку

$$
|L_{1,2}(z)-L_{2,2}(z)| \leqslant C_7R^{p+1-\gamma}\int\limits_{4R}^{\infty}\frac{dn(t)}{(t-|z|)t^p} \leqslant C_8R^{p+1-\gamma}\int\limits_{4R}^{\infty}\frac{dn(t)}{t^{p+1}} \leqslant C_9R^{\rho-\gamma}. \tag{11}
$$

Перейдемо до оцінки

$$
\begin{aligned}
|L_{1,3}(z)-L_{2,3}(z)| &= \left|\int\limits_{\{R/2<|\xi|\leqslant 4R\}} \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{1}{k}\left(\left(\frac{z}{\xi}\right)^k-\left(\frac{z}{T\xi}\right)^k\right)d\mu_1(\xi)\right| \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{\{R/2<|\xi|\leqslant 4R\}} \sum_{k=1}^{k=p}\frac{|z|^k}{k}\left|\frac{1}{\xi^k}-\frac{1}{(T\xi)^k}\right| d\mu_1(\xi) \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{\{R/2<|\xi|\leqslant 4R\}} \sum_{k=1}^{k=p}\frac{|z|^k}{k}\max_{w\in[\xi,T\xi]}\frac{k}{|w|^{k+1}}|\xi-T\xi|\,d\mu_1(\xi) \leqslant \\
&\leqslant C_{10}R^{-\gamma}\int\limits_{R/2}^{4R} dn(t) \leqslant C_{11}R^{\rho-\gamma}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Далі,

$$
\begin{aligned}
L_{1,4}(z)-L_{2,4}(z) &= \int\limits_{R/2<|\xi|\leqslant 4R}\left(\log\left|1-\frac{z}{\xi}\right|-\log\left|1-\frac{z}{T\xi}\right|\right)d\mu_1(\xi) = \\
&= \int\limits_{R/2<|\xi|\leqslant 4R}\log\left|1+\frac{T\xi-\xi}{z-T\xi}\right|d\mu_1(\xi) \leqslant \int\limits_{R/2<|\xi|\leqslant 4R}\log\left(1+\frac{|T\xi-\xi|}{|z-T\xi|}\right)d\mu_1(\xi) \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{R/2<|\xi|\leqslant 4R}\log\left(1+\frac{R^{-\gamma}|\xi|}{|z-T\xi|}\right)d\mu_1(\xi) \leqslant \int\limits_{R/2<|\xi|\leqslant 4R}\log\left(1+\frac{4R^{1-\gamma}}{|z-T\xi|}\right)d\mu_1(\xi) = \\
&= \int\limits_{R/2<|\xi|\leqslant 4R}\log\left(1+\frac{4R^{1-\gamma}}{|z-\xi|}\right)d\mu_2(\xi).
\end{aligned} \tag{13}
$$

Позначимо через $\nu(z,t)$ міру $\mu_2(\{\xi\colon R/2 < |\xi| \leqslant 4R\} \bigcap \{\xi\colon |\xi - z| \leqslant t\})$. Продовжимо оцінку (13):

$$L_{1,4}(z) - L_{2,4}(z) = \int\limits_{R/2<|\xi|\leqslant 4R} \log\left(1 + \frac{4R^{1-\gamma}}{|z-\xi|}\right) d\mu_2(\xi) =$$

$$= \int\limits_0^{8R} \log\left(1 + \frac{4R^{1-\gamma}}{t}\right) d\nu(z,t) = \log\left(1 + \frac{4R^{1-\gamma}}{8R}\right)\nu(z,8R) +$$

$$+ \int\limits_0^{8R} \frac{1}{1+\dfrac{4R^{1-\gamma}}{t}} \frac{4R^{1-\gamma}}{t^2} \nu(z,t)dt \leqslant \frac{1}{2R^\gamma} n(10R) + 4R^{1-\gamma} \int\limits_0^{8R} \frac{1}{t+4R^{1-\gamma}} \frac{n(z,t)}{t} dt. \quad (14)$$

Застосуємо метод з роботи Хеймана [10]. Назвемо точку z легкою відносно міри $\mu(z \in \in L(\mu))$, якщо для кожного $t \in (0{,}4R^{1-\gamma}]$ виконується умова $n(z,t) < tR^{\rho-1+\varepsilon} 0 < \varepsilon < 1$. В іншому випадку точка z називається важкою ($z \in H(\mu)$). У випадку легкої точки $z \in L(\mu)$ продовжимо оцінку (14):

$$4R^{1-\gamma} \int\limits_0^{4R^{1-\gamma}} \frac{1}{t+4R^{1-\gamma}} \frac{n(z,t)}{t} dt \leqslant \int\limits_0^{4R^{1-\gamma}} R^{\rho-1+\varepsilon} dt \leqslant C_{12} R^{\rho-\gamma+\varepsilon}. \quad (15)$$

Крім цього,

$$4R^{1-\gamma} \int\limits_{4R^{1-\gamma}}^{8R} \frac{1}{t+4R^{1-\gamma}} \frac{n(z,t)}{t} dt \leqslant 4R^{1-\gamma} \int\limits_0^{10R} \frac{n(t)dt}{t^2} \leqslant C_{13} R^{-\gamma+1} \int\limits_0^{10R} t^{\rho-2} dt \leqslant$$

$$\leqslant C_{14} R^{\rho-\gamma}. \quad (16)$$

Оцінимо розмір виняткової множини важких точок $H(\mu) \bigcap \{\xi\colon R \leqslant |\xi| < 2R\}$. З одного боку, має місце міра

$$n(2R) \leqslant C_{15} R^\rho. \quad (17)$$

З іншого боку, якщо $z \in H(\mu)$, то існує $t_z \in (0{,}4R^{1-\gamma}]$ таке, що має місце нерівність $n(z,t_z) \geqslant \geqslant t_z R^{\rho-1+\varepsilon}$, і звідси стандартними міркуваннями (див., напр., [9, с. 972–973]) отримуємо, що множина $H(\mu) \bigcap \{z\colon R < |z| \leqslant 2R\})$ покривається не більш ніж зліченною множиною кругів вигляду $\{z\colon |z - z_j| \leqslant t_j\}$, де точка t_j — важка, і виконується

$$\sum_{R<|z_j|\leqslant 2R} t_j R^{\rho-1+\varepsilon} \leqslant 6\mu(H(\mu) \bigcap \{z\colon R < |z| \leqslant 2R\}) \leqslant C_{16} R^\rho,$$

звідки випливає

$$\sum_{R<|z_j|\leqslant 2R} t_j < C_{17} R^{1-\varepsilon}. \quad (18)$$

Функції $L_{1,4}(z)$ і $L_{2,4}(z)$ рівноправні, тому для $z \in \{\xi\colon R < |\xi| \leqslant 2R\}$ зовні виняткової множини $H(T\mu)$ такого ж розміру, що й $H(\mu)$, виконується нерівність

$$L_{2,4}(z) - L_{1,4}(z) \leqslant C_{17} R^{\rho-\gamma}. \tag{19}$$

З нерівностей (10)–(12), (16), (18), (19) випливає твердження леми 1.

1. *Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V.* On asymptotic behavior of entire functions of order less than one // Мат. студії. – 2003. – **19**, № 1. – С. 97–105.
2. *Винницький Б. В., Хаць Р. В.* Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку // Там само. – 2004. – **21**, № 2. – С. 140–150.
3. *Хаць Р. В.* Про асимптотичне поводження канонічного добутку цілого порядку // Там само. – 2004. – **22**, № 1. – С. 105–110.
4. *Хаць Р. В.* Про коефіцієнти Фур'є одного класу цілих функцій // Там само. – 2005. – **23**, № 1. – С. 99–102.
5. *Винницький Б. В., Хаць Р. В.* Про регулярність зростання цілої функції нецілого порядку з нулями на скінченній системі променів // Там само. – 2005. – **24**, № 1. – С. 31–38.
6. *Hayman W. K., Kennedy P. B.* Subharmonic functions. Vol. 1. – London; New York; San Francisco: Academic Press, 1976. – 285 p.
7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1956. – 632 с.
8. *Гольдберг А. А.* Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. IV // Мат. сб. – 1965. – **66**, № 3. – С. 411–457.
9. *Гирнык М. А.* Об асимптотических свойствах некоторых канонических произведений. II // Сиб. мат. журн. – 1976. – **17**, № 5. – С. 967–985.
10. *Hayman W. K.* Questions of regularity connected with the Phragmén–Lindelöf principle // J. Math. pures et appl. – 1956. – **35**. – P. 113–126.

Львівська комерційна академія
Надійшло до редакції 10.07.2008

M. O. Hirnyk

Subharmonic functions of improved regular growth

We find the asymptotic of a subharmonic function with improved regular growth in the terms of the angular density of its Riesz measure. A new version of the so-called shift lemma is proved.