ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 517.983

С. Л. Гефтер, Т. Е. Стулова

О корректности некоторого нерезонансного операторно-дифференциального уравнения в пространстве целых функций экспоненциального типа

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Пусть E — банахово пространство и A — замкнутый линейный оператор в E с областью определения, которая может не быть плотной в пространстве E. Мы предполагаем, что оператор A имеет ограниченный обратный оператор и доказываем корректность дифференциального уравнения $w' = Aw + f(z)$ в специальном пространстве целых функций.

1. Пусть E — банахово пространство и $Q\colon E \to E$ — ограниченный линейный оператор. Рассмотрим линейное уравнение второго рода

$$Qu + b = u. \tag{1}$$

Если спектральный радиус $\rho(Q)$ оператора Q меньше 1, то для любого $b \in E$ уравнение (1) имеет единственное решение

$$u = b + \sum_{n=1}^{\infty} Q^n b, \tag{2}$$

и это решение непрерывно зависит от вектора b. Таким образом, в этом случае уравнение (1) является корректным. Условие $\rho(Q) < 1$ можно рассматривать как тот факт, что оператор Q является "малым параметром". В настоящей работе изучается линейное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве, являющееся аналогом уравнения (1), а именно, рассматривается следующее неявное линейное дифференциальное уравнение:

$$Tw' + g(z) = w, \tag{3}$$

где $T\colon E \to E$ — ограниченный линейный оператор, g — E-значная целая функция. Вместо ряда (2) мы получаем ряд

$$w(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} T^n g^{(n)}(z). \tag{4}$$

Этот ряд является конечной суммой в следующих алгебраических ситуациях: 1) g — полином; 2) оператор T нильпотентен. В общем случае мы показываем, что для сходимости ряда (4) достаточно малости пары (T, g) в том смысле, что $\rho(T)\sigma(g) < 1$, где $\sigma(g)$ — экспоненциальный тип функции g (см. теорему 1). Кроме того, мы получаем интегральное представление типа Коши для решения уравнения (3) (см. теорему 9).

Используя уравнение (3), мы изучаем неоднородное уравнение

$$w' = Aw + f(z) \tag{5}$$

с замкнутым обратимым оператором в нерезонансном случае, т. е. в случае, когда экспоненциальный тип функции $f(z)$ меньше, чем $\min\{|\lambda|\colon \lambda \in \sigma(A)\}$, где $\sigma(A)$ — спектр оператора A. Здесь мы не предполагаем, что область определения оператора A плотна. В качестве следствия теоремы 1 получаем утверждение о корректной разрешимости неоднородного уравнения (5) в пространстве целых функций экспоненциального типа (см. теорему 2).

Отметим, что линейные неоднородные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве исследовались в многочисленных работах (см., например, [1–5]). В большинстве случаев эти уравнения были изучены с помощью техники теории полугрупп. В частности, для получения решения неоднородного уравнения нужно было знать решения однородного уравнения. Уравнение на полуоси с оператором, который имеет неплотную область определения, изучалось в работах П. Соболевского и Ю. Сильченко [6], Ж. Де Прато и Е. Синестрати [7] (см. также [5, раздел 3.5]). Неявные линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве исследовались в работе [8] (см. также приведенную там библиогр.). Целые и голоморфные решения явных и неявных линейных дифференциальных уравнений в комплексном банаховом пространстве были рассмотрены в [3, 9–12] и других работах. Эволюционное уравнение с неоднородной частью в виде полинома изучалось в работе [13] Голоморфные решения в форме (4), возможно, впервые были изучены в [14], где рассматривался случай, когда функция $g(z)$ имеет нулевой экспоненциальный тип. В работе [15] изучались голоморфные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве над неархимедовым полем.

2. Рассмотрим множество E_σ всех целых E-значных функций $f(z)$, для которых $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}}(\|f(z)\|e^{-\sigma|z|}) < +\infty$. Тогда E_σ — банахово пространство относительно нормы $\|f\|_\sigma = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}}(\|f(z)\|e^{-\sigma|z|})$. Для $0 < \sigma \leqslant \infty$ положим $\widetilde{E}_\sigma = \bigcup\limits_{\sigma_1<\sigma} E_{\sigma_1}$. Тогда $\widetilde{E}_\sigma$ — пространство целых E-значных функций экспоненциального типа, меньшего, чем σ (если $\sigma = \infty$, то $\widetilde{E}_\infty$ — пространство всех функций экспоненциального типа). Будем рассматривать это пространство с естественной топологией индуктивного предела банаховых пространств.

Теорема 1 (о корректности уравнения (3) в пространстве $\widetilde{E}_{\sigma_0}$). *Пусть $T\colon E \to E$ — ограниченный линейный оператор, $\sigma_0 = 1/\rho(T)$, $\sigma < \sigma_0$ и $g(z)$ — целая функция экспоненциального типа σ (в случае, когда $\rho(T) = 0$, т. е. T квазинильпотентный, мы считаем, что $1/\rho(T) = \infty$). Тогда уравнение (3) имеет единственное целое решение экспоненциального типа σ, $w(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n g^{(n)}(z)$, этот ряд сходится равномерно на компактных множествах и решение непрерывно зависит от g в топологии пространства $\widetilde{E}_{\sigma_0}$.*

Доказательство. Пусть $\sigma < \sigma_1 < \sigma_0$ и $f \in E_{\sigma_1}$. Применяя интегральную формулу Коши, можно показать, что оператор дифференцирования D ограничен в E_{σ_1} и $\|D^n\| \leqslant n!e^n n^{-n}\sigma_1^n$. Положим $Q = \widetilde{T}D$, где $(\widetilde{T}f)(z) = Tf(z)$. Теперь заметим, что $g \in E_{\sigma_1}$

и уравнение (3) может быть переписано в виде уравнения второго рода $Qw + g = w$. Так как операторы $\widetilde{T}$ и D коммутируют, то по формуле Гельфанда $\rho(Q) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|Q^n\|} \leqslant \leqslant \rho(T)\sigma_1 < 1$. Следовательно, в пространстве E_{σ_1} уравнение (3) имеет единственное решение $w = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Q^n g = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n g^{(n)}$. Так как $g \in \bigcap\limits_{\sigma_1>\sigma} E_{\sigma_1}$, то мы получаем, что уравнение (3) имеет единственное решение экспоненциального типа, не большего, чем σ. Поскольку $g(z) = = w(z) - Tw'(z)$, то экспоненциальный тип $w(z)$ не может быть меньше σ. Таким образом, он равен σ. Так как оператор $(I - Q)^{-1}$ непрерывен в каждом пространстве E_{σ_1}, $\sigma_1 > \sigma$, то отсюда следует и непрерывная зависимость решения от g. Равномерная сходимость на компактах ряда (4) следует из сходимости в пространстве E_{σ_1}. Теорема доказана.

Пусть теперь A — замкнутый линейный оператор в пространстве E с областью определения $D(A)$, которая может не быть плотной в E. Рассмотрим дифференциальное уравнение (5).

Теорема 2 (о корректности уравнения (5) в нерезонансном случае в пространстве $\widetilde{E}_{\sigma_0}$). *Пусть замкнутый оператор $A\colon D(A) \to E$ имеет ограниченный обратный и $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа, меньшего $\sigma_0 = \min\{|\lambda|\colon \lambda\epsilon\sigma(A)\}$. Тогда уравнение* (5) *имеет единственное целое решение экспоненциального типа, меньшего σ_0, $w(z) = = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} f^{(n)}(z)$, и это решение непрерывно зависит от f в топологии пространства $\widetilde{E}_{\sigma_0}$.*

Доказательство. Пусть $T = A^{-1}$. Тогда $\sigma_0 = 1/\rho(T)$. Если $\sigma_1 < \sigma_0$, $f \in E_{\sigma_1}$ и $g(z) = = -A^{-1}f(z)$, то $g \in E_{\sigma_1}$. Теперь остается только заметить, что уравнение (5) эквивалентно уравнению (3).

Рассмотрим некоторые примеры.

С нашей точки зрения, теорема 2 интересна даже в одномерном случае.

П р и м е р 1. Пусть $E = \mathbb{C}$ и $A = I$. Рассмотрим дифференциальное уравнение $w' = w + f(z)$. Если $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа $\sigma < 1$, то это уравнение имеет единственное целое решение экспоненциального типа σ, $w(z) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z)$, и это решение непрерывно зависит от правой части f в топологии пространства $\widetilde{E}_1$.

П р и м е р 2. Рассмотрим следующее уравнение вынужденных колебаний: $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$, где $\omega > 0$ и $f(t)$ — след целой функции экспоненциального типа σ на вещественной оси. Переходя к системе уравнений первого порядка, получаем, что при $\sigma < \omega$ это уравнение имеет единственное решение $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\omega^{2k+2}} f^{(2k)}(t)$, которое можно продолжить до целой функции экспоненциального типа σ.

П р и м е р 3. Пусть E — гильбертово пространство, A — замкнутый нормальный оператор в E с дискретным спектром и $0 \notin \sigma(A)$. Пусть $\{e_k\}$ — ортонормированный собственный базис для A, $Ae_k = \lambda_k e_k$, где $\lambda_k \to \infty$. Если $|\lambda_1| = \min\limits_k |\lambda_k|$, $f\colon \mathbb{C} \to E$, $f(z) = \sum\limits_k f_k(z) e_k$ — целая функция и экспоненциальный тип f меньше, чем $|\lambda_1|$, то уравнение (5) $w' = Aw + f(z)$ имеет следующее единственное целое решение, экспоненциальный тип которого меньше, чем $|\lambda_1|$: $w(z) = = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Big(\sum\limits_k \lambda_k^{-(n+1)} f_k^{(n)}(z) e_k\Big)$.

П р и м е р 4. Пусть $E = C[0,1]$, $A = d^2/dx^2$ и $D(A) = \{u \in C^2[0,1]\colon u(0) = u(1) = 0\}$. Тогда оператор A обратим, $(A^{-1}h)(x) = \int\limits_0^1 G(x,y)h(y)\,dy$, где G — функция Грина для соответствующей краевой задачи, $\rho(A^{-1}) = 1/\pi^2$ и $(A^{-(n+1)}h)(x) = \int\limits_0^1 G_{n+1}(x,y)h(y)\,dy$, где $G_1(x,y) = G(x,y)$ и $G_{n+1}(x,y) = \int\limits_0^1 G_n(x,s)G(s,y)\,ds$.

В этом примере при переходе на вещественную ось уравнение (5) принимает форму краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $[0,1]$ с нулевыми граничными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in (0,1), \\ w(t,0) = w(t,1) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Если $f(t,x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x)t^n$, где $c_n \in C[0,1]$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\|c_n\|} < 1/\pi^2$, то задача (5) имеет решение $w(t,x) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1 G_{n+1}(x,y)\partial^n f/\partial t^n(t,y)dy$.

П р и м е р 5. Пусть $E = C[0,1]$, $A = d/dx$ и $D(A) = \{u \in C^1[0,1] \colon u(0) = 0\}$. Тогда $(A^{-(n+1)}h)(x) = (1/n!)\int\limits_0^x (x-y)^n h(y)\,dy$ и $\rho(A^{-1}) = 0$. При переходе на вещественную ось уравнение (5) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in (0,1), \\ w(t,0) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Если f можно продолжить до целой функции экспоненциального типа по второй переменной, то в этом классе функций задача (5) имеет единственное решение

$$w(t,x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_0^x (x-y)^n \frac{\partial^n f}{\partial t^n}(t,y)\,dy = -\int\limits_0^x f(t+x-y,y)\,dy.$$

Важно отметить, что задача (7) для однородного уравнения имеет только нулевое решение даже в классе непрерывно дифференцируемых функций. В частности, оператор A не является оператором Хилле–Иосиды (см. [5, 3.5]).

Покажем теперь, что в случае, когда $g(z)$ — целая функция, не являющаяся функцией экспоненциального типа, уравнение (3) может вообще не иметь непрерывно дифференцированного решения на отрезке $[0,t_0]$, $t_0 > 0$, даже если $\rho(T) = 0$.

П р и м е р 6. Пусть E — гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, T — такой оператор взвешенного сдвига, что $Te_n = e_{n+1}/\sqrt{n+1}$, и $g(z) = e^{z^2}e_0$. Если $w(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n(t)e_n$ является решением уравнения (3) на отрезке $[0,t_0]$, то

$$\begin{cases} e^{t^2} = w_0(t), \\ \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}w_n'(t) = w_{n+1}(t), \quad t \in [0,t_0], \quad n \geqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $w_n(t) = (1/\sqrt{n!})(e^{t^2})^{(n)}$ и $w_{2n}(0) = \sqrt{(2n)!}/n!$. Поэтому $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|w_n(0)|^2 = +\infty$, а это противоречит тому, что w — E-значная функция.

Из теоремы 1 для решения уравнения (3) можно получить интегральное представление типа Коши. Для этого мы используем интегральную формулу Коши для n-й производной

$g^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=r} \dfrac{g(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$ и следующее понятие формального интеграла в пространстве формальных рядов Лорана. Пусть V — произвольное комплексное векторное пространство и $V[[\zeta, 1/\zeta]]$ — пространство всех формальных рядов Лорана с коэффициентами из V. Для $f(\zeta) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^n \in V\left[\left[\zeta, \dfrac{1}{\zeta}\right]\right]$ мы полагаем $\oint f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i b_{-1}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1,* $\mathcal{E}_T(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!T^n}{\zeta^{n+1}}$ *— формальное преобразование Лапласа–Бореля резольвенты Фредгольма оператора* T *и* $\mathcal{E}_T(\zeta - z)$ *— следующий формальный ряд по степеням* $1/\zeta$*:*

$$\mathcal{E}_T(\zeta - z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!T^n}{\zeta^{n+1}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^j \right)^{n+1}.$$

Тогда произведение $\mathcal{E}_T(\zeta - z)g(\zeta)$ *корректно определено как элемент пространства* $E[[z]][[\zeta, 1/\zeta]]$ *и*

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \mathcal{E}_T(\zeta - z) g(\zeta)\, d\zeta,$$

где интеграл в правой части равенства понимается как формальный интеграл в пространстве формальных рядов Лорана.

1. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – Москва: Наука, 1967. – 467 с.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – Москва: Наука, 1970. – 536 с.
4. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
5. *Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M. et al.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. – Basel: Birkhäuser, 2001. – 523 p.
6. *Сильченко Ю., Соболевский П.* Разрешимость задачи Коши для эволюционного уравнения в банаховом пространстве с неплотно заданным операторным коэффициентом, порождающим полугруппу с особенностью // Сиб. мат. журн. – 1986. – **27**, № 4. – С. 93–104.
7. *Da Prato G., Sinestrati E.* Differential operators with non dense domain // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. – 1987. – **14**. – P. 285–344.
8. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и сингулярными дифференциальными уравнениями. – Днепропетровск: Системные технологии, 2006. – 273 с.
9. *Горбачук М. Л.* Про аналітичні розв'язки диференціально-операторних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 5. – С. 596–607.
10. *Gorbachuk M., Gorbachuk V.* On the well-posed solvability in some classes of entire functions of the Cauchy problem for differential equations in a Banach space // Methods Funct. Anal. Topology. – 2005. – **11**, No 2. – P. 113–125.
11. *Balser W., Duval A., Malek S.* Summability of formal solutions for abstract Cauchy problems and related convolution equations // Ulmer Seminare über Funktionalanalysis und Differetialgleichungen. – 2007. – **11**. – P. 29–44.
12. *Gefter S., Stulova T.* On holomorphic solutions of some implicit linear differential equation in a Banach space // Operator Theory: Advances and Applications. – Basel: Birkhäuser, 2009. – Vol. 191. – P. 331–340.

13. *Баб'як-Білецька Л., Горбачук О.* Пряма асимтотична задача для еволюційного рівняння з неоднорідною частиною у вигляді многочлену // Мат. студії. – 2000. – **23**, № 1. – С. 84–91.
14. *Gefter S., Stulova T.* On entire solutions of some inhomogeneous linear differential equations in a Banach space // Proceedings of the 3rd Nordic EWM Summer School for PhD Students in Mathematics. – TUCS General Publication, Turku, 2009. – No 53. – P. 211–214.
15. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk V. M.* On holomorphic solutions of some inhomogeneous linear differential equations in a Banach space over a non-Archimedean field // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. – 2010. – **2**, No 2. – P. 114–121.

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 28.12.2011

С. Л. Гефтер, Т. Є. Стулова

Про коректність деякого нерезонансного операторно-диференціального рівняння в просторі цілих функцій експоненціального типу

Нехай E — банахів простір і A — замкнений лінійний оператор в E з областю визначення, що може не бути щільною в просторі E. Ми вважаємо, що оператор A має обмежений обернений оператор і доводимо коректність диференціального рівняння $w' = Aw + f(z)$ у спеціальному просторі цілих функцій.

S. L. Gefter, T. E. Stulova

On the well-posedness of some nonresonant operator differential equations in a space of entire functions of exponential type

Let E be a Banach space, and let A be a closed linear operator on E with the domain of definition that may be not dense in E. We suppose that A has a bounded inverse operator and prove the well-posedness of the differential equation $w' = Aw + f(z)$ in a special space of entire functions.