ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2012

МЕХАНІКА

УДК 531.36

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк,**
Ю. А. Мартынюк-Черниенко

О робастной устойчивости импульсных систем с последействием

Рассматривается класс неточных механических систем, математическое описание которых представлено так называемыми гибридными системами уравнений, т. е. системами, состоящими из двух типов уравнений, связанных между собой. А именно, рассматриваются системы с последействием при импульсных возмущениях, для которых развит прямой метод Ляпунова на основе вспомогательных функций, заданных на произведении пространств.

Рассматриваемый класс систем имеет многие приложения (см. [1–6] и приведенную библиографию). Как и в случае импульсной системы без последействия, импульсное возмущение может стабилизировать движение системы с последействием даже в том случае, когда обе компоненты системы имеют неустойчивое решение. В работе приведены основные теоремы прямого метода Ляпунова, основанные на вспомогательных функциях, определенных на произведении пространств.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнения возмущенного движения механической системы с неточными значениями параметров

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t, x_t, \alpha), \qquad t \neq \tau_k, \\ &\Delta x = I_k(t, x(t^-)), \qquad t = \tau_k, \qquad k \in \mathbb{N}_+, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $x_t \in PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, $f\colon \mathbb{R}_+ \times PC \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$; $PC = PC([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ — пространство кусочно-непрерывных справа функций $\varphi\colon [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$; $I_k\colon \mathbb{R}_+ \times S(H) \to \mathbb{R}^n$, $S(H) = \{x \in \in \mathbb{R}^n, \|x\| < H\}$; $\Delta x = x(t) - x(t^-)$; $t_0 < \tau_k < \tau_{k+1}$, $\tau_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $k \in \mathbb{N}_+$; $\alpha \in \mathcal{G}$ — параметр неточности системы (1), $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$; $\mathbb{N}_+$ — множество всех положительных чисел.

Пусть $|\varphi| = \sup\limits_{-\tau \leqslant s \leqslant 0} \|\varphi(s)\|$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора в $\mathbb{R}^n$ и $x_t(s) = x(t+s)$ при $-\tau \leqslant s \leqslant 0$; dx/dt обозначает правую производную вектора состояния системы $x(t)$.

Пусть $\sigma \geqslant t_0$ и

$$x(\sigma) = \varphi(s) \in PC([-\tau, 0), \mathbb{R}^n), \qquad \sigma \geqslant t_0. \tag{2}$$

Движение системы (1) корректно определено при начальном состоянии (2), если вектор-функция $x(t)\colon [\sigma - \tau, \beta) \to \mathbb{R}^n$ для некоторого значения β $(0 < \beta \leqslant +\infty)$ непрерывна при $t \in [\sigma - \tau, \beta) \setminus \{\tau_k, k = 1, 2, \ldots\}$, ее значения $x(\tau_k^+)$, $x(\tau_k^-)$ существуют, выполняется соотношение $x(\tau_k^+) = x(\tau_k)$ для любого $\tau_k \in [\sigma - \tau, \beta)$ и $x(t)$ удовлетворяет системе уравнений (1) при любом $\alpha \in \mathcal{G}$.

Будем предполагать, что порядок системы (1) при любом $\alpha \in \mathcal{G}$ остается неизменным, и состояние равновесия $x = 0$ для системы (1) является единственным, т. е. $f(t, 0, \alpha) = I_k(t, 0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, при всех $t \geqslant t_0$ и любых $\alpha \in \mathcal{G}$.

Условия, при которых для заданных начальных функций (2) существует единственное решение $x(t, \alpha) = x(t, \sigma, \varphi, \alpha)$, имеют вид (см. [2]):

H_1) вектор-функция f непрерывна на $[\tau_{k-1}, \tau_k] \times PC \times \mathcal{G}$ при любом $k \in \mathbb{N}_+$ и $\varphi \in PC(\rho^*) = \{\varphi \in PC : |\varphi| < \rho^*, \rho^* > 0\}$ и $\lim\limits_{(t,\varphi) \to (\tau_k^-, \varphi)} f(t, \varphi, \alpha) = f(\tau_k^-, \varphi, \alpha)$ существует при любом $\alpha \in \mathcal{G}$;

H_2) вектор-функция f является локально липшицевой по φ для любого компактного множества в $PC(\rho^*)$ при любом значении $\alpha \in \mathcal{G}$;

H_3) для любого $k \in \mathbb{N}_+$ $I_k(t, x) \in C(\mathbb{R}_+ \times S(H), \mathbb{R}^n)$;

H_4) существует величина $H_1 > 0$ $(H_1 \leqslant H)$ такая, что при $x \in S(H_1)$ вектор $x + I_k(\tau_k, x) \in S(H)$ при всех $k \in \mathbb{N}_+$.

Далее, для краткости, решение $x(t, \sigma, \varphi, \alpha)$ будем обозначать $x(t, \alpha)$.

Определение 1. Состояние равновесия $x = 0$ системы (1)

а) устойчиво, если для любых $\sigma \geqslant t_0$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, \sigma) > 0$ такое, что при $\varphi \in PC(\delta)$ при всех $t \geqslant \sigma$ имеет место оценка $\|x(t, \alpha)\| \leqslant \varepsilon$ при любых $\alpha \in \mathcal{G}$;

б) равномерно устойчиво, если величина δ в определении *а* не зависит от σ;

в) асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и существует $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$ такое, что при $\varphi \in PC(\delta_0)$ верно соотношение $\lim \|x(t, \alpha)\| = 0$ при $t \to \infty$.

Укажем условия, при которых нулевое решение системы (1) обладает определенным типом устойчивости или неустойчивости в смысле приведенных определений.

Матричнозначная функция на произведении пространств. Для системы (1) будем рассматривать функцию

$$U(t, *) = [v_{ij}(t, *)], \qquad i, j = 1, 2, \tag{3}$$

на произведении пространств $\mathbb{R}^n$ и $PC(H)$. Предположим, что элементы $v_{ij}(t, *)$ удовлетворяют таким условиям.

Условие B_1: функционал $v_{11}(t, \varphi)\colon \mathbb{R}_+ \times PC(H) \to \mathbb{R}_+$ определен при всех $t \geqslant t_0$ и, кроме того,

а) $v_{11}(t, x)$ — непрерывен на $[\tau_{k-1}, \tau_k) \times PC(H)$ при $\varphi \in PC(H)$, $k \in \mathbb{N}_+$, и существует предел

$$\lim_{(t,y) \to (\tau_k^-, \varphi)} v_{11}(t, y) = v_{11}(\tau_k^-, \varphi);$$

б) функционал $v_{11}(t, \varphi)$ — локально липшицев по φ на любом компактом множестве в $PC(H)$ и $v_{11}(t, 0) = 0$ при всех $t \geqslant t_0$.

Условие B_2: функция $v_{22}(t,x)\colon \mathbb{R}_+ \times S(H^*) \to \mathbb{R}_+$ определена при всех $t \geqslant t_0$ и, кроме того,

а) функция $v_{22}(t,x)$ непрерывна на $[\tau_{k-1}, \tau_k) \times S(H^*)$ при каждом $k \in \mathbb{N}$ и при всех $x \in S(H^*)$ и $k \in \mathbb{N}$ существует предел

$$\lim_{(t,u)\to(\tau_k^-,\psi)} v_{22}(t,u) = v_{22}(\tau_k^-, \psi);$$

б) функция $v_{22}(t,x)$ локально липшицева по $x \in S(H^*)$ и $v_{22}(t,0) = 0$ при всех $t \geqslant t_0$.

Условие B_3: элемент $v_{12}(t,\varphi,x) = v_{21}(t,\varphi,x)$ и $v_{12}(t,\varphi,x)\colon \mathbb{R}_+ \times PC(H) \times S(H^*) \to \mathbb{R}$ является корректирующим, определен на произведении пространств $\mathbb{R}^n \times PC(H)$ и удовлетворяет условиям B_1, B_2 по переменным φ, x соответственно.

При помощи вектора $\theta \in \mathbb{R}_+^2$ построим функцию [3]

$$V(t,\varphi,x) = \theta^T U(t,*)\theta \tag{4}$$

и будем применять ее вместе с полной производной

$$D^+V(t,\varphi,x) = \theta^T D^+U(t,*)\theta \tag{5}$$

вдоль решений системы (1). Здесь

$$D^+U(t,x,\varphi) = \limsup\{[U(t+h, x_{t+h}(t,\varphi), \varphi(0) + hf(t,\varphi,\alpha)) - U(t,x,\varphi)]h^{-1}\colon h \to 0^+\}$$

вычисляется поэлементно.

Функция (4), разрешающая вместе с производной (5) проблему устойчивости состояния $x = 0$ системы (1), называется функцией Ляпунова, заданной на произведении пространств $\mathbb{R}^n$ и $PC(H)$.

Заметим, что если в матрице (4) $v_{ij}(t,\varphi,x) = 0$ при $i \neq j$, i, $j = 1,2$, тогда функция $V(t,\varphi,x)$ имеет вид

$$V_0(t,\varphi,x) = \theta_1^2 v_{11}(t,\varphi) + \theta_2^2 v_{22}(t,x), \qquad \theta_i \in \mathbb{R}_+.$$

Далее будем обозначать $V_1(t,\varphi) = \theta_1^2 v_{11}(t,\varphi)$ и $V_2(t,x) = \theta_2^2 v_{22}(t,x)$.

Функционал $V_1(t,\varphi)\colon \mathbb{R}_+ \times PC(H) \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу B_0, если $\theta_1^2 v_{11}(t,\varphi)$ удовлетворяет условию B_1 и для любого $\varphi \in PC([\sigma-\tau,\infty),\mathbb{R}^n)$ функционал $V_1(t,\varphi)$ непрерывен при всех $t \geqslant \sigma$.

Заметим, что функционал $V_1(t,\varphi)$ вида

$$V_1(t,\varphi) = \int_{-\tau}^{0} b(s+t)\|\varphi(s)\|^\gamma ds, \qquad \gamma \geqslant 1$$

принадлежит классу B_0, если $b(u) \in PC([\sigma-\tau,\infty),\mathbb{R}_+)$ и существует постоянная $m > 0$ такая, что $\int\limits_{t-\tau}^{t} b(s)ds \leqslant m$ при всех $t \geqslant \sigma$ (см. [4]).

Далее применяются некоторые классы функций сравнения при получении достаточных условий устойчивости движения системы (1). А именно,

$$K = \{w \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)\colon \text{ строго возрастающие и } w(0) = 0\};$$

$$Q = \{\psi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)\colon \psi(0) = 0, \psi(s) > 0 \text{ при } s > 0\};$$

$$Q^* = \{\psi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)\colon \text{ неубывающие}, \psi(0) = 0, \psi(s) \geqslant s \text{ при } s > 0\}.$$

Достаточные условия устойчивости. Установим условия робастной устойчивости состояния $x = 0$ системы (1) на основе функции (3) при некоторых дополнительных условиях.

Теорема 1. *Предположим, что для системы* (1) *построена функция* (3), *в которой элементы* $v_{ij}(t, \varphi, x) = 0$ *при* $i \neq j$ *и существуют функции сравнения* $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$, $\overline{w}_3 \in K$*-классу и* $\overline{\psi} \in Q$*-классу такие, что для функции* $V_0(t, x, \varphi) = V_1(t, \varphi) + V_2(t, x)$ *верны оценки*

1) $\overline{w}_1^T(\|\varphi(0)\|)A_1\overline{w}_1(\|\varphi(0)\|) \leqslant V_0(t, x, \varphi) \leqslant \overline{w}_2^T(|\varphi|)A_2\overline{w}_2(|\varphi|)$, *где* A_1, A_2 — 2×2*-симметрические постоянные матрицы;* $V_1 \in B_0$*-классу и* V_2 *удовлетворяет условию* B_2*;*

2) для любого вектора $x \in S(H^*)$ *при* $t = \tau_k$ *верны оценки*

$$V_2(\tau_k, x + I_k(\tau_k, x)) - V_2(\tau_k^-, x) \leqslant -\overline{\psi}^T(V(\tau_k^-, x, \varphi))B_k\overline{\psi}(V_2(\tau_k^-, x, \varphi)) \quad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{N},$$

где B_k — 2×2*-постоянные симметрические матрицы, для которых* $\lambda_M^k(B_k) \geqslant 0$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_m^k(B_k) = \infty$, $\lambda_m^k(B_k)$ *— максимальное собственное значение матрицы* B_k, $k \in \mathbb{N}_+$*;*

3) при любом значении $\alpha \in \mathcal{G}$ *для решений* $x(t, \alpha)$ *системы* (1) *в области значений* $x \in S(H^*)$ *выполняется оценка*

$$D^+V_0(t, x, \varphi)|_{(1)} \leqslant \overline{w}_3^T(|x_t|)A_3\overline{w}_3(|x_t|),$$

где A_3 — 2×2*-постоянная симметрическая матрица;*

4) для любого момента $\sigma \geqslant t_0$ *и числа* $\eta > 0$ *существует* $\beta > 0$ *такое, что из условия* $V_0(t, x, \varphi) \geqslant \eta$ *при* $t \geqslant \sigma$ *следует* $V_2(t, x) > \beta$ *при* $t \geqslant \sigma$.

Тогда, если выполняются условия 1–3 и

а) матрицы A_1, A_2 *положительно определенные и* $\lambda_M(A_3) \leqslant 0$, *то состояние равновесия* $x = 0$ *системы* (1) *равномерно устойчиво;*

б) выполняются условия 1–4 теоремы 1 и условие (а), то состояние $x = 0$ *системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Преобразуем оценку для функции $V_0(t, x, \varphi)$ из условия *1* теоремы 1 к виду

$$\lambda_M(A_1)w_1(\|\varphi(0)\|) \leqslant V_0(t, x, \varphi) \leqslant \lambda_M(A_2)w_2(|\varphi|), \tag{6}$$

где $\lambda_m(A_1)$ — минимальное собственное значение матрицы A_1 и $\lambda_M(A_2)$ — максимальное собственное значение матрицы A_2, $w_1, w_2 \in K$-классу и такие, что

$$w_1(\|\varphi(0)\|) \leqslant \overline{w}_1^T(\|\varphi(0)\|)\overline{w}_1(\|\varphi(0)\|) \qquad \text{и} \qquad w_2(|\varphi|) \geqslant \overline{w}_2^T(|\varphi|)\overline{w}_2(|\varphi|).$$

Пусть задано $0 < \varepsilon \leqslant H^*$. Для заданного ε выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\lambda_M(A_2)w_2(\delta) < \lambda_m(A_1)w_1(\varepsilon).$$

Рассмотрим решение $x(t, \alpha) = x(t, \sigma, \varphi, \alpha)$ системы (1) с начальным условием $\varphi \in PC(\delta)$ при $\sigma \geqslant t_0$. Покажем, что при выполнении условий *1–3* теоремы 1 верна оценка $\|x(t, \alpha)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant \sigma$ и при всех $\alpha \in \mathcal{G}$.

Условие *3* теоремы 1 выполняется, если

$$D^+V_0(t,x,\varphi) \leqslant \lambda_M(A_3)w_3(|\varphi|), \tag{7}$$

где $\lambda_M(A_3) \leqslant 0$ — максимальное собственное значение матрицы A_3 при всех $\alpha \in \mathcal{G}$ и $w_3(|\varphi|) \geqslant \overline{w}_3^T(|\varphi|)A_3\overline{w}_3(|\varphi|)$, где $w_3 \in W$-классу.

Из условия (7) следует, что

$$D^+V_0(t,x,\varphi)|_{(1)} \leqslant 0 \qquad \text{при} \qquad \sigma \leqslant \tau_{k-1} \leqslant t < \tau_k$$

и при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, функция $V_0(t) = V_0(t, x_t, \varphi(t))$ не возрастает на интервалах $[\tau_{k-1}, \tau_k)$. Из условия *2* теоремы 1 следует оценка функции $V_0(t)$ для значений $t = \tau_k$:

$$V_0(\tau_k) - V_0(\tau_k^-) = V_2(\tau_k, x(\tau_k) + I_k(\tau_k, x(\tau_k^-))) - V_2(\tau_k, x(\tau_k^-)) \leqslant -\lambda_m^k(B_k)\psi(V_0),$$

где $\psi(r) \geqslant \overline{\psi}^T(r)\overline{\psi}(r)$. Поэтому функция $V_0(t)$ не возрастает на интервале $[\sigma, \infty)$ и это приводит к неравенствам

$$\lambda_m(A_1)w_1(\|x(t,\alpha)\|) \leqslant V_0(t) \leqslant V_0(\sigma) \leqslant \lambda_M(A_2)w_2(\delta) < \lambda_m(A_1)w_1(\varepsilon), \qquad t \geqslant \sigma.$$

Отсюда следует, что $\|x(t,\alpha)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant \sigma$ и любых $\alpha \in \mathcal{G}$ как только $\varphi \in PC(\delta)$. Этим доказана равномерная устойчивость состояния $x = 0$ гибридной системы (1).

Далее покажем, что состояние $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво, т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t,\alpha)\| = 0$ при всех $\alpha \in \mathcal{G}$. Обозначим $\eta = \lim V_0(t, x_t)$ при $t \to \infty$. Пусть $\eta > 0$. Тогда, согласно условию *4* теоремы 1, существует $\beta > 0$ такое, что $V_2(t,x) \geqslant \beta$ при всех $t \geqslant \sigma$.

Вычислим величину

$$K = \inf_{\beta \leqslant V_2 \leqslant \lambda_M(A_2)w_2(\delta)} [\psi(V_2)] > 0.$$

Из условия (2) теоремы 1 следует, что

$$V_2(\tau_k) - V_2(\tau_k^-) \leqslant -\lambda_M^k(B_3)\psi(V_2(\tau_k^-)) < -K\lambda_m^k(B_3) \qquad \text{при всех} \qquad k \in \mathbb{N}_+.$$

Функция $V_0(t)$ не возрастает при всех $t \geqslant \sigma$ и при любых значениях $\alpha \in \mathcal{G}$, т. е.

$$V_0(\tau_k) - V_0(\tau_{k-1}) \leqslant V_0(\tau_k) - V_0(\tau_k^-) = V_2(\tau_k) - V_2(\tau_k^-) < -K\lambda_m^k(B_3).$$

Отсюда находим

$$V_0(\tau_k) \leqslant V_0(\tau_m) - K\sum_{i=m}^{s} \lambda_M^i(B_3) \to -\infty \qquad \text{при} \qquad s \to \infty.$$

Полученное противоречие доказывает, что величина η должна быть равна 0, т. е. $\lim \|x(t,\alpha)\| = 0$ при $t \to +\infty$. Этим теорема 1 доказана.

П р и м е р. Рассмотрим уравнение [4]

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) + b(t)x(t-\tau), \qquad t \neq \tau_k,$$

$$\Delta x(\tau_k) = I_k(x(\tau_k^-)), \qquad k \in \mathbb{N}_+,$$

где $a(t)$, $b(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a(t) \geqslant \overline{a} > 0$, $|b(t)| \leqslant \overline{b}$, $I_k(x) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Если для этого уравнения выполняются условия:

1) существуют постоянные $b_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$ такие, что $|x+I_k(x)| \leqslant (1+b_k)x^2$ при всех $k \in \mathbb{N}_+$;

2) выполняется неравенство $\overline{a} > \overline{b}\sqrt{\beta}$, где $\beta = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+b_k)$;

3) существует $q > 1$ такое, что $\overline{a} - q\overline{b}\sqrt{\beta} > 0$,
тогда решение $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Далее установим условия неустойчивости состояния $x = 0$ гибридной системы (1).

Теорема 2. *Предположим, что для системы* (1) *построена функция* $V_0(t,x,\varphi)$ *и существуют функции сравнения* $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2 \in W$*-классу,* $\psi \in Q$*-классу такие, что функция* $V_0(t,x,\varphi) = V_1(t,\varphi) + V_2(t,x)$ *ограничена и для нее выполняются условия:*

1) при любых $x \in S(\rho)$ *верна оценка*

$$\overline{w}_1^T(\|x\|)A_1\overline{w}_1(\|x\|) \leqslant V_2(t,x),$$

где A_1 *—* 2×2*-постоянная симметрическая матрица;*

2) существует хотя бы одно значение $\alpha \in \mathcal{G}$*, при котором вдоль решения* $x(t,\alpha)$ *системы* (1) *выполняется неравенство*

$$D^+V_0(t,x,\varphi)|_{(1)} \geqslant \overline{w}_2^T(|x_t|)A_3\overline{w}_2(|x_t|),$$

где A_3 *—* 2×2*-постоянная симметрическая матрица;*

3) для каждого значения $k \in \mathbb{N}_+$ *и* $x \in S(H^*)$ *существует* 2×2*-матрица* $B_3^{(k)}$ *такая, что*

$$V_2(t, x + I_k(\tau_k^-, x)) - V_2(\tau_k^-, x) \geqslant \overline{\psi}^T(V_2(\tau_k^-, x))B_3^{(k)}\overline{\psi}(V_2(\tau_k^-, x)),$$

где $\lambda_m(B_3^{(k)}) \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_m(B_3^{(k)}) = \infty$, $\lambda_m(B_3^{(k)})$ *— минимальное собственное значение матрицы* B_3 *при* $k = 1, 2, \ldots;$

4) для любых $\sigma \geqslant t_0$ *и* $\eta > 0$ *существует* $\beta > 0$ *такое, что из условия* $V_0(t, x_t, \eta) \geqslant \eta$ *при* $t \geqslant \sigma$ *следует, что* $\|x(t,\alpha)\| \geqslant \beta$ *при всех* $t \geqslant \sigma$ *и при любых* $\alpha \in \mathcal{G}$.

Тогда, если матрицы A_1, A_3 *положительно определенные, то состояние* $x = 0$ *системы* (1) *неустойчиво.*

Доказательство. Пусть $x(t,\alpha)$ — решение системы (1) при любом $\alpha \in \mathcal{G}$ и при начальной функции $\varphi \in PC(\delta)$, где $\delta > 0$ — сколь угодно малое число. Предположим, что при выполнении условий теоремы 3 решение $x = 0$ устойчиво. Пусть $\sigma \in [\tau_{m-1}, \tau_m)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}_+$. Из условий (1)–(3) теоремы 3 следует, что:

а) $\lambda_m(A_1)w(\|x\|) \leqslant V_2(t,x,\eta)$;

б) $D^+V_0(t,x,\varphi)|_{(1)} \geqslant \lambda_m(A_3)w_2(|x_t|)$,
где $\lambda_m(A_3)$ — минимальное собственное значение матрицы A_3 и $w_2(r) \leqslant \overline{w}_2^T(r)\overline{w}_2(r)$ при любом значении $r \in [0, +\infty)$;

в) $V_0(\tau_k) - V_0(\tau_k^-) = V_2(\tau_k) - V_2(\tau_k^-) \geqslant \lambda_m^k(B_3)\psi(V_2(\tau_k^-))$, где $\psi \in Q$-классу и $\psi(r) \leqslant \overline{\psi}^T(r)\overline{\psi}(r)$.

Из условий *б*, *в* следует, что функция $V_0(t,x,\varphi)$ не убывает на любом решении $x(t,\alpha)$ на интервалах $[\sigma, \tau_m)$ и $[\tau_k, \tau_{k+1})$ при $k \geqslant m$. Так как $V_0(\tau_k^-) \geqslant V_0(\tau_{k-1})$, то

$$V_0(\tau_k) - V_0(\tau_{k-1}) \geqslant \lambda_m^k(B_3)\psi(V_2(\tau_k^-)). \tag{8}$$

Поэтому верна оценка $V_0(t) \geqslant V_0(\sigma)$ при всех $t \geqslant \sigma$. Согласно условию a теоремы 3, имеем оценку $V_2(\tau_k^-) \geqslant \lambda_m(A_1)w_1(\|x(\tau_k^-)\|) \geqslant \lambda_m(A_1)w_1(\beta)$. Отсюда из (8) следует

$$V_0(\tau_k) - V_0(\tau_{k-1}) \geqslant \lambda_m^k(B_3)\psi(\lambda_m(A_1)w_1(\beta))$$

и далее

$$V_0(\tau_k) \geqslant V_0(\tau_m) + \psi(\lambda_m(A_1)w_1(\beta)) \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_M^k(B_3) \to \infty \qquad \text{при} \qquad k \to \infty.$$

Это противоречит ограниченности функции $V_0(t)$ при всех $t \geqslant \sigma$. Теорема 2 доказана.

Заключительные замечания. При построении функций $V_1(t,\varphi)$ и $V_2(t,x)$ могут быть применены некоторые известные результаты (см., например, [3] и др.). Применение матричнозначных функций (3) и функций вида $V_0(t,\varphi,x) = V_1(t,\cdot) + V_2(t,\cdot)$, заданных на произведении пространств $PC(\delta) \times \mathbb{R}^n$, позволяет расширить применение теорем прямого метода Ляпунова для импульсных систем (см. [6, 7] и библиографию там).

1. *Wang Q.* Stability and boundedness of impulsive systems with time delay. – Waterloo, Ontario, Canada: Univ. of Waterloo, 2007. – 204 p.
2. *Shen J., Luo Z., Liu X.* Impulsive stabilization of functional differential equations via Liapunov functionals // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – **240**. – P. 1–5.
3. *Martynyuk A. A.* Stability of motion: the role of multicomponent Lyapunov's functions. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2007. – 322 p.
4. *Shen J. H.* Razumikhin techniques in impulsive functional differential equations // Nonlinear Analysis. – 1999. – **36**. – P. 119–130.
5. *Yan J., Shen J.* Impulsive stabilization of functional differential equations dy Lyapunov–Razumikhin functions // Nonlinear Analysis. – 1999. – **37**. – P. 245–255.
6. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
7. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.* Stability analysis of nonlinear systems. – New York: Marcel Dekker, 1989. – 305 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 21.12.2011

Академік НАН України **А. А. Мартинюк, Ю. А. Мартинюк-Чернієнко**

Про робастну стійкість імпульсних систем із післядією

Досліджується клас механічних систем, що описуються неточними рівняннями. А саме, розглядається система із післядією при імпульсних збуреннях. За допомогою методу функцій Ляпунова, означених на добутку просторів, встановлено умови робастної стійкості в термінах обмежень на спеціальні матриці.

Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk,**
Yu. A. Martynyuk-Chernienko

On the robust stability of impulsive systems with delay

We investigate a class of mechanical systems that are described by uncertain systems of equations. Namely, we consider the systems with delay under impulsive perturbations. By using the method of Lyapunov functions defined on a product of spaces, the robust stability criteria are established under fairly simple algebraic conditions.