УДК 519.832.3

В.В. РОМАНЮК

ДИСКРЕТНАЯ БЕСШУМНАЯ ДУЭЛЬ С КОСОСИММЕТРИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ВЫИГРЫША НА ЕДИНИЧНОМ КВАДРАТЕ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ КОНКУРЕНТНЫХ ПРОЦЕССОВ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЙ

Ключевые слова: *бесшумная дуэль, конечное множество чистых стратегий, оптимальное поведение, равновесная ситуация в чистых стратегиях.*

ОБЛАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Антагонистические игры с выбором момента времени являются достаточно гибкими и простыми моделями относительно широкого класса социально-экономических явлений с конфликтами в условиях противоположных интересов [1, 2]. Одной из наиболее изученных в этой связи считают антагонистическую игру типа дуэли, задаваемую своей функцией выигрыша $F(x, y)$ на единичном квадрате

$$X \times Y = [0;1] \times [0;1], \tag{1}$$

где $X = [0;1]$ и $Y = [0;1]$ — множества чистых стратегий первого и второго игроков соответственно. В игре типа дуэли с симметричными возможностями игроков функция выигрыша имеет вид

$$F(x, y) = \left[\frac{1+\operatorname{sign}(y-x)}{2} K(x, y) + \frac{1-\operatorname{sign}(y-x)}{2} L(x, y)\right] \operatorname{sign}(|y-x|), \tag{2}$$

т.е. соблюдается условие ее кососимметричности

$$F(x, y) = -F(y, x) \tag{3}$$

при монотонном возрастании по x обеих функций $K(x, y)$ и $L(x, y)$ при любом значении y, а также при монотонном убывании по y этих же функций при любом значении x.

Более узкий класс дуэлей составляют так называемые бесшумные дуэли [3, 4], в которых функция выигрыша (2) имеет вид

$$F(x, y) = p(x) - q(y) + p(x)q(y)\operatorname{sign}[q(y) - p(x)] \tag{4}$$

с обязательными условиями

$$p(0) = 0, \ q(0) = 0 \tag{5}$$

и

$$p(1) = 1, \ q(1) = 1 \tag{6}$$

для вероятностных функций $p(x)$ и $q(y)$ меткости первого и второго игроков соответственно. С помощью бесшумных дуэлей можно моделировать принятие решений в ситуациях, когда, с одной стороны, некое действие необходимо выполнить как можно позже, а с другой — своим поведением необходимо опередить конкурента, который преследует аналогичные цели.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ В ОБЛАСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ

В наиболее тривиальном случае бесшумной дуэли вероятностные функции меткости игроков, удовлетворяющие условиям (5) и (6), являются линейными:

$$p(x) = x, \ q(y) = y. \tag{7}$$

Тогда функция выигрыша (4) принимает вид

$$F(x, y) = x - y + xy\operatorname{sign}(y - x). \tag{8}$$

Однако и в этом случае игра, определяемая функцией выигрыша (8), носит решение, мало напоминающее тривиальное. Хотя условие кососимметричности (3) указывает на нулевое оптимальное значение игры и идентичные оптимальные стратегии обоих игроков, сама конфигурация этих стратегий является довольно сложной для того, чтобы игрок мог воплотить в реальность свое оптимальное поведение. Действительно, в наиболее тривиальном случае бесшумной дуэли с функцией выигрыша (8) каждый игрок для достижения своего ожидаемого нулевого выигрыша должен применить оптимальную смешанную стратегию, состоящую в случайном выборе чистых стратегий согласно закону распределения [5, 6]

$$\rho(u) = \begin{cases} 0, & u \in \left[0; \dfrac{1}{3}\right), \\ \dfrac{1}{4u^3}, & u \in \left[\dfrac{1}{3}; 1\right], \end{cases} \tag{9}$$

при $u = x$ или $u = y$. Заметим, что здесь идет речь о реализации некоторого подмножества единичного сегмента чистых стратегий, т.е. континуума чистых стратегий, а это уже принципиально неразрешимая задача. Такая неразрешимость еще более усиливается при рассмотрении задач с одноразовой возможностью проведения бесшумной дуэли, когда две идентичные фирмы-конкуренты пытаются вывести свои услуги на инновационный рынок или на рассмотрение вносится рациональное предложение двумя оппонентами [7]. Поэтому изучение возможностей адаптации модели бесшумной дуэли к условиям ее немногократного повторения представляет в известной степени актуальную задачу. Кроме того, практически целесообразно привести множества чистых стратегий игроков к множествам изолированных точек, поскольку непрерывность этих множеств носит характер соответствующей абстракции в предельном переходе.

ЦЕЛЬ СТАТЬИ

Широкий класс социально-экономических явлений с конфликтами в условиях противоположных интересов оснащает двух участников стратегически ограниченно. Это необходимо учитывать при построении соответствующей функции выигрыша для антагонистической игры типа дуэли, которая будет служить моделью этих явлений. Например, если при выведении своих услуг на инновационный рынок две идентичные фирмы-конкуренты имеют в распоряжении некоторый конечный период времени, выраженный в днях или неделях, то, исходя из логических соображений, при моделировании данного конфликта каждой фирме следует дать дискретное множество чистых стратегий, подразумевая один день или одну неделю для каждой. Задача настоящей статьи состоит в определении антагонистической игры типа бесшумной дуэли с дискретным множеством чистых стратегий для каждого игрока и конструкции программной процедуры для получения быстрого решения этой игры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ БЕСШУМНОЙ ДУЭЛИ НА ЕДИНИЧНОМ КВАДРАТЕ

Дискретной бесшумной дуэлью на единичном квадрате назовем антагонистическую игру с выбором момента времени, в которой функция выигрыша имеет вид (8), причем

$$x \in \left\{0, \frac{1}{N-1}, \frac{2}{N-1}, \ldots, \frac{N-2}{N-1}, 1\right\} = \left\{\frac{i-1}{N-1}\right\}_{i=1}^{N} =$$
$$= \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{N-1}, x_N\} = \{x_i\}_{i=1}^{N} \subset X = [0; 1], \tag{10}$$

$$y \in \left\{0, \frac{1}{N-1}, \frac{2}{N-1}, \ldots, \frac{N-2}{N-1}, 1\right\} = \left\{\frac{j-1}{N-1}\right\}_{j=1}^{N} =$$
$$= \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{N-1}, y_N\} = \{y_j\}_{j=1}^{N} \subset Y = [0; 1], \tag{11}$$

где $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Иными словами, каждый игрок имеет в наличии по N чистых стратегий, равномерно распределенных по единичному сегменту $[0; 1]$. Очевидно, что в этом случае функцию выигрыша целесообразно называть матрицей выигрыша $\mathbf{F}$ с элементами $f_{ij} = F(x_i, y_j)$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N}$, причем

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & F(x_1, y_2) & F(x_1, y_3) & \cdots & F(x_1, y_{N-1}) & F(x_1, y_N) \\ -F(x_1, y_2) & 0 & F(x_2, y_3) & \cdots & F(x_2, y_{N-1}) & F(x_2, y_N) \\ -F(x_1, y_3) & -F(x_2, y_3) & 0 & \cdots & F(x_3, y_{N-1}) & F(x_3, y_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -F(x_1, y_{N-1}) & -F(x_2, y_{N-1}) & -F(x_3, y_{N-1}) & \cdots & 0 & F(x_{N-1}, y_N) \\ -F(x_1, y_N) & -F(x_2, y_N) & -F(x_3, y_N) & \cdots & -F(x_{N-1}, y_N) & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В наиболее тривиальном случае, когда у каждого игрока в наличии по две чистых стратегии, т.е. при $N = 2$, матрица выигрыша (12) будет иметь вид

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Нетрудно увидеть, что здесь нижняя V_* и верхняя V^* цены игры совпадают:

$$V_* = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} f_{ij} = 0 = f_{22} = V^* = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} f_{ij}, \quad (14)$$

и матричная 2×2-игра с матрицей выигрыша (13) имеет седловую точку $S(2)$ в чистых стратегиях:

$$S(2) = \{x_2, y_2\}. \quad (15)$$

Итак, при наименее сложном стратегическом оснащении бесшумная дуэль решается достаточно просто и является несущественной игрой. Можно предположить, что при добавлении одной чистой стратегии игра по-прежнему остается несущественной. Это легко проверить, принимая $N = 3$ и решая матричную 3×3-игру с матрицей

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

имеющей четыре седловые точки:

$$S(3) = \{x_2, y_2\},\ S(3) = \{x_2, y_3\},\ S(3) = \{x_3, y_2\},\ S(3) = \{x_3, y_3\}. \quad (17)$$

Следуя далее, докажем теорему о том, что у каждого игрока при небольшом количестве чистых стратегий, не превосходящем некоторое известное число, бесшумная дуэль с функцией выигрыша (8), задаваемая на дискретных множествах чистых стратегий игроков (10) и (11), имеет ситуации равновесия в чистых стратегиях.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ ДИСКРЕТНОЙ БЕСШУМНОЙ ДУЭЛИ С МАЛЫМ КОЛИЧЕСТВОМ СТРАТЕГИЙ

Теорема. Если в дискретной бесшумной дуэли с матрицей выигрыша (12) каждый игрок имеет семь чистых стратегий или не более пяти чистых стратегий, то эта антагонистическая игра имеет по крайней мере одну ситуацию равновесия в чистых стратегиях, причем при $N = 3$ (три чистых стратегии) существует четыре ситуации равновесия в чистых стратегиях. В остальных случаях игра решается в смешанных стратегиях.

Доказательство. По условию теоремы при $N \in \{2, 3, 4, 5, 7\}$ матрица (12) должна иметь седловые точки. Для случая $N = 2$ (уже рассмотренного выше) существует седловая точка (15). При $N = 3$ в матрице (16)

$$V_* = \max_{i=\overline{1,3}} \min_{j=\overline{1,3}} f_{ij} = 0 = f_{22} = f_{23} = f_{32} = f_{33} = V^* = \min_{j=\overline{1,3}} \max_{i=\overline{1,3}} f_{ij}, \tag{18}$$

откуда следуют соотношения (17), что и определяет наличие четырех ситуаций равновесия в чистых стратегиях при трех чистых стратегиях у каждого игрока.

Обратимся теперь к матрице выигрыша (12). Заметим, что если в каждой строке этой матрицы содержится хотя бы один отрицательный элемент, то это означает, что нижняя цена игры $V_* < 0$. В этом случае благодаря кососимметричности матрицы (12) в каждом ее столбце содержится хотя бы один положительный элемент; значит, верхняя цена игры $V^* > 0$. Тогда $V_* < V^*$ и игра не будет иметь ситуаций равновесия в чистых стратегиях. Выясним, при каких значениях N в каждой строке матрицы выигрыша (12) содержится хотя бы один отрицательный элемент. Для этого сначала при $x < y$ решим неравенство

$$x - y + xy < 0 \tag{19}$$

относительно переменной x. Здесь очевидно, что неравенство (19) имеет место при

$$x < \frac{y}{1+y}, \tag{20}$$

где $y \in (0; 1]$, поскольку случай $x < y = 0$ невозможен. Итак, при $y \in (0; 1]$ из неравенства (20) следует, что $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$. Таким образом, при любом $x < \frac{1}{2}$ существует такое y, что $F(x, y) < 0$. Переходя к дискретной форме функции выигрыша $F(x, y)$, выраженной матрицей (12), чистую стратегию y второго игрока запишем согласно (11) как $y = \frac{j-1}{N-1}$ при $j = \overline{1, N}$. Тогда

$$\frac{y}{1+y} = \frac{\frac{j-1}{N-1}}{1+\frac{j-1}{N-1}} = \frac{j-1}{N+j-2}. \tag{21}$$

Итак, для $x \in \left[0; \frac{j-1}{N+j-2}\right)$ существует такое y из множества (11) без учета $y = 0$, что $F(x, y) < 0$, где очевидно, что $j = \overline{2, N}$.

Остается показать, что при определенных N для $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ также существует хотя бы одно значение y такое, что $F(x, y) < 0$. Для этого рассмотрим элементы матрицы (12), расположенные под главной диагональю, т.е. зададим $x > y$. Решением неравенства

$$x - y - xy < 0 \tag{22}$$

относительно переменной x будет

$$x < \frac{y}{1-y} \tag{23}$$

или, более точно,

$$y < x < \frac{y}{1-y}. \tag{24}$$

Очевидно, что для соблюдения двойного неравенства (24) необходимо исключить случаи, когда $y = 0$ и $y = 1$. Тем не менее при $y \in (0; 1)$ из неравенства (24) получаем $x \in (0; 1)$, что в общей сложности имеем при подстановке каждого значения y из интервала $(0; 1)$. В дискретном варианте получим

$$\frac{y}{1-y} = \frac{\frac{j-1}{N-1}}{1-\frac{j-1}{N-1}} = \frac{j-1}{N-j}, \tag{25}$$

где при $x \in \left(\frac{j-1}{N-1}; \frac{j-1}{N-j}\right)$, $j = \overline{2, N-1}$, существует такое y, что $F(x, y) < 0$.

Выясним, при каких условиях во множество интервалов

$$\left\{\left(\frac{j-1}{N-1};\frac{j-1}{N-j}\right)\right\}_{j=2}^{N-1} \tag{26}$$

переменной x входят все значения $x \ge \frac{1}{2}$. Вначале из этого множества исключим те интервалы, которые являются подмножествами полуинтервала $\left[0;\frac{1}{2}\right)$, поскольку для него существование отрицательных элементов в строках матрицы (12) уже установлено. Очевидно, что если $\frac{j-1}{N-j} \le \frac{1}{2}$, то

$$\left(\frac{j-1}{N-1};\frac{j-1}{N-j}\right) \subset \left[0;\frac{1}{2}\right). \tag{27}$$

Тогда необходимы только такие x, при которых $\frac{j-1}{N-j} > \frac{1}{2}$. Отсюда получаем условие $j > \frac{N+2}{3}$ для целых значений j. Однако если некоторый интервал множества (26) содержит точку $x = 1$, то следующие за ним интервалы (если таковые есть) также не имеет смысла рассматривать, поскольку при $x = 1$ из неравенства (22) вытекает отрицательность элементов последней строки матрицы (12) при $y \in \left(\frac{1}{2};1\right)$. Так если при некотором j впервые выполнено неравенство $\frac{j-1}{N-j} \ge 1$, то при таком $j \ge \frac{N+1}{2}$ следует прекратить рассмотрение, т.е. здесь имеем $j < \frac{N+1}{2} + 1 = \frac{N+3}{2}$.

Теперь проанализируем, каким образом множество интервалов (26) при таком целом j, что $j \in \left(\frac{N+2}{3};\frac{N+3}{2}\right)$, покрывает полуинтервал $x \in \left[\frac{1}{2};1\right)$. Для этого рассмотрим разность между левым концом последующего интервала и правым концом предыдущего интервала:

$$\frac{(j+1)-1}{N-1} - \frac{j-1}{N-j} = \frac{j}{N-1} - \frac{j-1}{N-j} = \frac{j(N-j)-(j-1)(N-1)}{(N-1)(N-j)} =$$

$$= \frac{jN - j^2 - jN + N + j - 1}{(N-1)(N-j)} = \frac{-j^2 + j + N - 1}{(N-1)(N-j)}, \tag{28}$$

где $j \in \left(\frac{N+2}{3};\frac{N+3}{2}\right)$ при $j = \overline{2, N-2}$. Необходимо рассмотреть все случаи с $N \in \mathbb{N} \setminus \{2, 3\}$. Итак, оценим разность (28) для целых значений интервала $\left(\frac{N+2}{3};\frac{N+3}{2}\right)$. Знаменатель представляет положительное число, поскольку при максимально возможном $j = \frac{N+3}{2}$ имеем

$$(N-1)\left(N - \frac{N+3}{2}\right) = (N-1)\left(\frac{2N-N-3}{2}\right) = (N-1)\frac{N-3}{2} > 0. \tag{29}$$

Значит, знак в разности (28) определяется числителем, точнее, корнями квадратного уравнения

$$-j^2 + j + N - 1 = 0\,. \tag{30}$$

Его дискриминант равен

$$1+4\cdot 1\cdot (N-1)=4N-3, \tag{31}$$

откуда корни уравнения (30) имеют вид

$$j=j_1=\frac{-1+\sqrt{4N-3}}{-2}=\frac{1-\sqrt{4N-3}}{2} \tag{32}$$

или

$$j=j_2=\frac{-1-\sqrt{4N-3}}{-2}=\frac{1+\sqrt{4N-3}}{2}. \tag{33}$$

Первый корень (32), безусловно, неприемлем, так как $j_1=\frac{1-\sqrt{4N-3}}{2}<0$ при $N\in\mathbb{N}\setminus\{2,3\}$. Поскольку ветки параболы $-j^2+j+N-1$ направлены вниз, то при $j<j_2=\frac{1+\sqrt{4N-3}}{2}$ разность (28) положительна и при целых значениях j из интервала

$$\left(\frac{N+2}{3};\frac{N+3}{2}\right)\cap\left(\frac{N+2}{3};\frac{1+\sqrt{4N-3}}{2}\right) \tag{34}$$

предыдущий и последующий интервалы из множества (26) не пересекаются:

$$\left(\frac{j-1}{N-1};\frac{j-1}{N-j}\right)\cap\left(\frac{(j+1)-1}{N-1};\frac{(j+1)-1}{N-(j+1)}\right)=$$

$$=\left(\frac{j-1}{N-1};\frac{j-1}{N-j}\right)\cap\left(\frac{j}{N-1};\frac{j}{N-j-1}\right)=\varnothing. \tag{35}$$

Заметим, что разность

$$\frac{1+\sqrt{4N-3}}{2}-\frac{N+2}{3}=\frac{3\sqrt{4N-3}-2N-1}{6} \tag{36}$$

между вторым корнем (33) и началом интересующих нас отсчетов целых значений j является убывающей функцией от N при $N\in\mathbb{N}\setminus\{2,3\}$. Действительно, первая производная разности (36)

$$\frac{d}{dN}\left(\frac{3\sqrt{4N-3}-2N-1}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{4N-3}}-\frac{1}{3} \tag{37}$$

обращается в нуль (как нетрудно проверить) в точке $N=3$. В этой точке вторая производная

$$\frac{d^2}{dN^2}\left(\frac{3\sqrt{4N-3}-2N-1}{6}\right)=\frac{d}{dN}\left(\frac{1}{\sqrt{4N-3}}-\frac{1}{3}\right)=\frac{-2}{(\sqrt{4N-3})^3} \tag{38}$$

отрицательна, поэтому точка $N=3$ является точкой максимума разности (36). Значит, при $N\geq 4$ разность (36) убывает, но при $N=7$ разность (36) обращается в нуль. Следовательно, при любом целом $N>7$

$$\left(\frac{N+2}{3};\frac{1+\sqrt{4N-3}}{2}\right)=\varnothing \tag{39}$$

и пересечение (34) также пусто. Это означает, что при любом целом $N>7$ не существует таких целых значений j, чтобы соотношение (35) выполнялось, т.е. во множество интервалов (26) переменной x входят все $x\in\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Далее проверим вхождение во множество (26) точки $x=\frac{1}{2}$. Для этого необходимы такие целые значения j из интервала $\left(\frac{N+2}{3};\frac{N+3}{2}\right)$, чтобы $\frac{j-1}{N-1}<\frac{1}{2}$ или, более конкретно, $j<\frac{N+1}{2}$. Таким образом, при целых $j\in\left(\frac{N+2}{3};\frac{N+1}{2}\right)$ точка $x=\frac{1}{2}$ входит во множество (26). Поскольку

$$\frac{N+1}{2}-\frac{N+2}{3}=\frac{3N+3-2N-4}{6}=\frac{N-1}{6}, \tag{40}$$

то при $N>7$ хотя бы одно целое j обязательно войдет в интервал $\left(\frac{N+2}{3};\frac{N+1}{2}\right)$. Тогда множество интервалов (26) полностью покроет полуинтервал $x\in\left[\frac{1}{2};1\right)$ и при $N>7$ для $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ также найдется хотя бы одно такое значение y, что $F(x,y)<0$. Поэтому при $N>7$ в каждой строке матрицы (12) содержится хотя бы один отрицательный элемент, а нижняя цена игры $V_*<0$, верхняя цена игры $V^*>0$; следовательно, при $N>7$ матрица (12) не имеет седловых точек в чистых стратегиях и соответствующая антагонистическая игра решается в смешанных стратегиях.

Остается показать, что при $N\in\{4,5,7\}$ матрица (12) имеет седловые точки, а при $N=6$ соответствующая игра решается в смешанных стратегиях. При $N=4$ без учета условия (27) множество (26) является одноэлементным, однако в интервал $\left(\frac{2}{3};2\right)$ не входит стратегия $x=x_3=\frac{2}{3}$, поэтому в третьей строке соответствующей матрицы (12) отсутствуют отрицательные элементы и $V_*=0$. Ввиду условия (3) в третьей строке матрицы (12) существует седловая точка

$$S(4)=\{x_3,\, y_3\}, \tag{41}$$

что можно легко проверить. При $N=5$ без учета условия (27) для (10) множеством (26) является один интервал $\left(\frac{1}{2};1\right)$, в который не входит чистая стратегия $x=x_3=\frac{1}{2}$, поэтому в третьей строке соответствующей матрицы (12) отрицательные элементы отсутствуют и $V_*=0$. Нетрудно убедиться, что в соответствующей 5×5-игре существует седловая точка

$$S(5)=\{x_3,\, y_3\}. \tag{42}$$

Если $N=6$, то, даже несмотря на невыполнение соотношения (39), пересечение (34) с целыми j является пустым и соответствующее двухэлементное множество (26) $\left\{\left(\frac{2}{5};\frac{2}{3}\right),\left(\frac{3}{5};\frac{3}{2}\right)\right\}$ переменной x покрывает не только весь интервал $\left(\frac{1}{2};\,1\right)$, но и весь полуинтервал $\left[\frac{1}{2};1\right)$. Поэтому при $N=6$ в каждой строке матрицы (12) содержится хотя бы один отрицательный элемент, нижняя цена игры $V_*<0$, верхняя цена игры $V^*>0$, матрица (12) не имеет седловых точек в чистых стратегиях и соответствующая 6×6-игра решается в смешанных стратегиях.

Следует отметить случай, когда $N=7$. Здесь выполнено равенство (39), разность (40) обращается в нуль и, кроме того, множество (26) для соотношения (10) снова становится одноэлементным без учета условия (27), и оно состоит из интервала $\left(\frac{1}{2};1\right)$. В этот интервал не входит чистая стратегия $x=x_4=\frac{1}{2}$, поэтому в четвертой строке соответствующей матрицы (12) отрицательные элементы отсутствуют и $V_*=0$. Таким образом, в соответствующей 7×7-игре существует седловая точка

$$S(7)=\{x_4,\, y_4\}. \tag{43}$$

Итак, рассмотрены все случаи чистых стратегий с различным числом N. Теорема доказана.

ПРОГРАММНАЯ ПРОЦЕДУРА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ БЕСШУМНОЙ ДУЭЛИ

Доказанная теорема существенно упрощает анализ дискретной бесшумной дуэли с малым количеством чистых стратегий. Например если упомянутые две идентичные фирмы-конкуренты пытаются вывести свои услуги на инновационный рынок в течение нескольких дней в условиях однократного повторения такого выведения, то идеальным сроком для этого можно считать любое количество дней недели, исключив период в шесть дней, поскольку тогда соответствующее решение будет в смешанных стратегиях. Если, например, $N = 7$ и процесс выхода на инновационный рынок начинается с понедельника, то согласно (43) для каждой фирмы оптимальным днем является четверг. Если выходные дни исключить, то $N = 5$ и согласно (42) стартовать конкурентам следует в среду. Однако возможны и менее благоприятные варианты с точки зрения быстрой реализации принципа оптимальности [5], когда $N = 6$ или $N > 7$. В этом случае каждому игроку необходимо быстро получать решение игры в виде N-элементного вектора вероятностей

$$\mathbf{P} = [\rho_1 \; \rho_2 \; \rho_3 \; \ldots \; \rho_{N-1} \; \rho_N] \tag{44}$$

выбора чистых стратегий из множеств (10) и (11), где $\rho_j \in [0; 1]$ $\forall\, j = \overline{1, N}$ и $\sum\limits_{j=1}^{N} \rho_j = 1$. Для этого можно использовать мощное программно-математическое средство MATLAB с подключенным программным модулем SP для нахождения седловых точек матриц в чистых или смешанных стратегиях [8]. На рис. 1 показано окно с текстом кода программного модуля SP, возвращающего решение матричной игры, нижнюю и верхнюю цены игры, извещение о существенности игры и оптимальное значение игры.

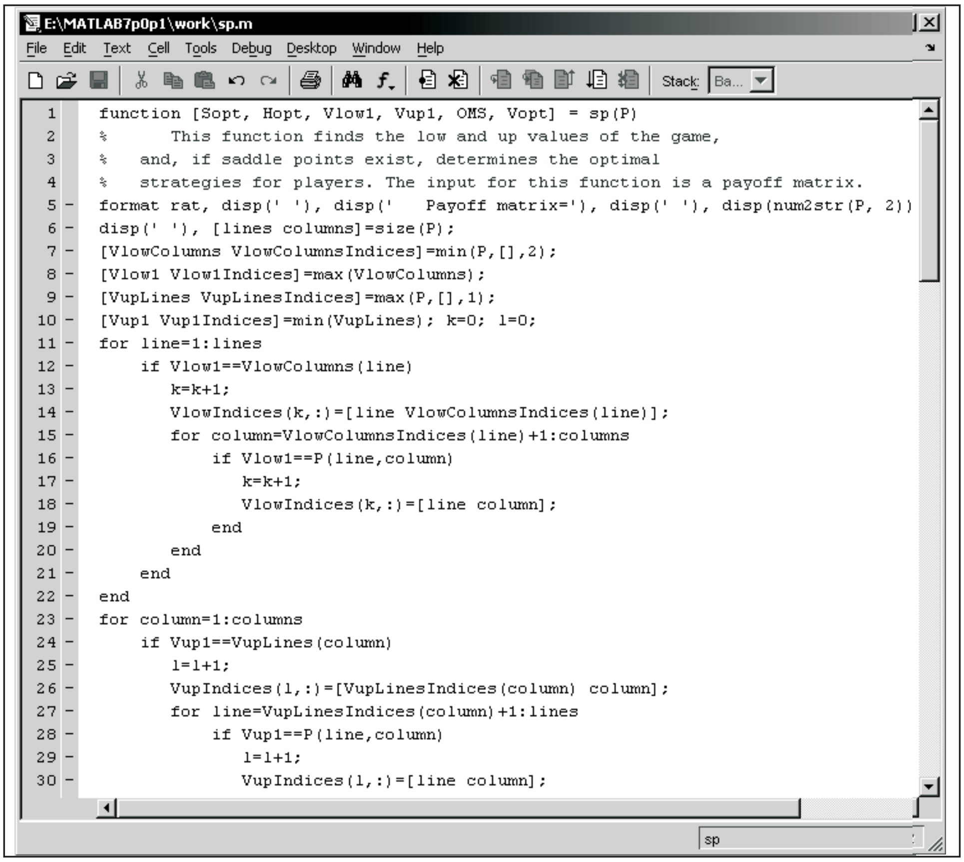
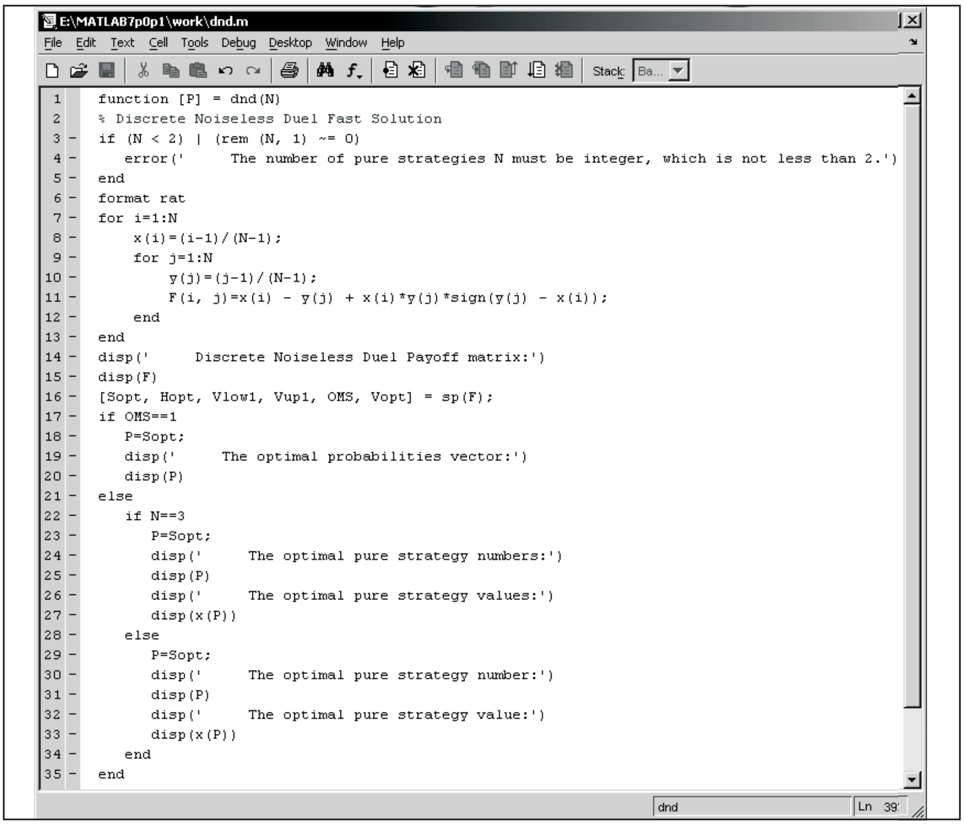
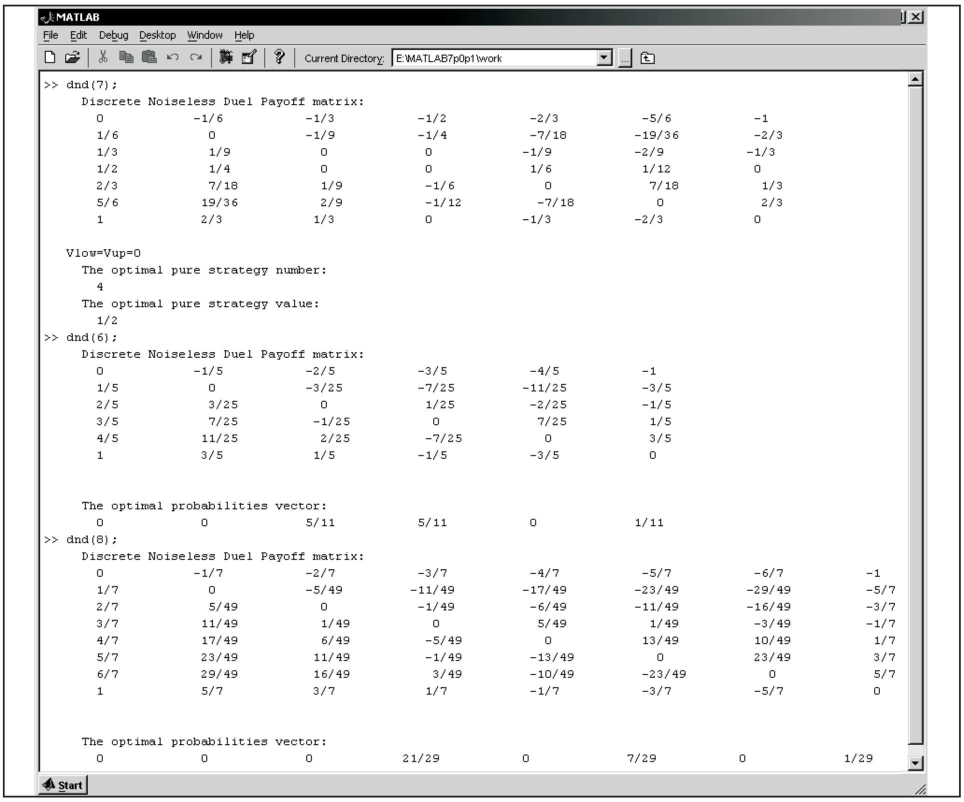


Рис. 1



```
function [P] = dnd(N)
% Discrete Noiseless Duel Fast Solution
if (N < 2) | (rem (N, 1) ~= 0)
   error('     The number of pure strategies N must be integer, which is not less than 2.')
end
format rat
for i=1:N
    x(i)=(i-1)/(N-1);
    for j=1:N
        y(j)=(j-1)/(N-1);
        F(i, j)=x(i) - y(j) + x(i)*y(j)*sign(y(j) - x(i));
    end
end
disp('     Discrete Noiseless Duel Payoff matrix:')
disp(F)
[Sopt, Hopt, Vlow1, Vup1, OMS, Vopt] = sp(F);
if OMS==1
   P=Sopt;
   disp('     The optimal probabilities vector:')
   disp(P)
else
   if N==3
      P=Sopt;
      disp('     The optimal pure strategy numbers:')
      disp(P)
      disp('     The optimal pure strategy values:')
      disp(x(P))
   else
      P=Sopt;
      disp('     The optimal pure strategy number:')
      disp(P)
      disp('     The optimal pure strategy value:')
      disp(x(P))
   end
end
```

Рис. 2



```
>> dnd(7);
     Discrete Noiseless Duel Payoff matrix:
       0          -1/6        -1/3        -1/2        -2/3        -5/6        -1
       1/6         0          -1/9        -1/4        -7/18       -19/36      -2/3
       1/3         1/9         0           0          -1/9        -2/9        -1/3
       1/2         1/4         0           0           1/6         1/12        0
       2/3         7/18        1/9        -1/6         0           7/18        1/3
       5/6        19/36        2/9        -1/12       -7/18        0           2/3
       1           2/3         1/3         0          -1/3        -2/3         0

   Vlow=Vup=0
     The optimal pure strategy number:
       4
     The optimal pure strategy value:
       1/2
>> dnd(6);
     Discrete Noiseless Duel Payoff matrix:
       0          -1/5        -2/5        -3/5        -4/5        -1
       1/5         0          -3/25       -7/25       -11/25      -3/5
       2/5         3/25        0           1/25       -2/25       -1/5
       3/5         7/25       -1/25        0           7/25        1/5
       4/5        11/25        2/25       -7/25        0           3/5
       1           3/5         1/5        -1/5        -3/5         0


     The optimal probabilities vector:
       0           0           5/11        5/11        0           1/11
>> dnd(8);
     Discrete Noiseless Duel Payoff matrix:
       0          -1/7        -2/7        -3/7        -4/7        -5/7        -6/7        -1
       1/7         0          -5/49       -11/49      -17/49      -23/49      -29/49      -5/7
       2/7         5/49        0          -1/49       -6/49       -11/49      -16/49      -3/7
       3/7        11/49        1/49        0           5/49        1/49       -3/49       -1/7
       4/7        17/49        6/49       -5/49        0          13/49       10/49        1/7
       5/7        23/49       11/49       -1/49       -13/49       0          23/49        3/7
       6/7        29/49       16/49        3/49       -10/49      -23/49        0           5/7
       1           5/7         3/7         1/7        -1/7        -3/7        -5/7         0


     The optimal probabilities vector:
       0           0           0          21/29        0           7/29        0           1/29
```

Рис. 3

Информация о векторе (44) выводится с помощью программной процедуры, выполненной в модуле DND, входным параметром которого является число чистых стратегий N. На рис. 2 показано окно с текстом кода программного модуля DND, возвращающего решение дискретной бесшумной дуэли в форме сообщения об оптимальной чистой стратегии или в форме вектора (44). На рис. 3 даны примеры получаемых в командном окне MATLAB решений, приведены результаты выполнения модуля DND при $N \in \{6, 7, 8\}$.

Таким образом, несмотря на всю простоту моделей, полученных на основе антагонистических игр, результаты доказанной теоремы действительно применимы при практическом разрешении конфликтных ситуаций. Сконструированная программная процедура для получения решения дискретной бесшумной дуэли выдает его в доступной форме. При этом, однако, не предлагается способ практической реализации смешанной стратегии в виде вектора вероятностей (44) с более чем одним ненулевым элементом. Этот вопрос подробно рассматривается в работах [9, 10]. В дальнейших публикациях будет предложено исследовать игру типа дискретной бесшумной дуэли с двумя и более выстрелами у игроков. Предполагается, что в этом случае решение будет намного сложнее, чем в задаче с одним выстрелом, но не исключена возможность, что отдельными теоремами будет доказана несущественность игры или определены другие пути реализации известного принципа оптимальности в антагонистических играх.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. — М.: Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998. — 304 с.
2. Васин А.А., Морозов В.В. Введение в теорию игр с приложениями к экономике: Учеб. пособие. — М., 2003. — 278 с.
3. Teraoka Y. A single bullet duel with uncertain information available to the duelists // Bull. Math. Statist. — 1979. — N 18. — P. 69–80.
4. Teraoka Y. A two-person game of timing with random arrival time of the object // Math. Japonica. — 1979. — N 24. — P. 427–438.
5. Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1985. — 272 с.
6. Оуэн Г. Теория игр: Пер. с англ. Изд. 2-е. — М.: Эдиториал УРСС, 2004. — 216 с.
7. Романюк В.В. Моделирование выхода на рынок двух конкурирующих предприятий с помощью игровой бесшумной дуэли в MATLAB 7.0.1 // Вісн. Хмельницкого нац. ун-ту. Економ. науки. — 2009. — **2**, № 3. — С. 233–238.
8. Романюк В.В. Разрешение системы преследователь — добыча для экспоненциальной вероятности поражения добычи преследователем // Вестн. НТУ «ХПИ». Тематич. вып.: Информатика и моделирование. — 2009. — № 13. — С. 138–149.
9. Романюк В.В. Метод реалізації принципу оптимальності у матричних іграх без сідлової точки // Вісник НТУ «ХПІ». Тематич. вип. Інформатика та моделювання. — 2008. — № 49. — С. 146–154.
10. Романюк В.В. Метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з відомою кількістю партій гри // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2009. — № 2. — С. 45–52.

Поступила 16.10.2009