УДК 517.988

С.И. ЛЯШКО, В.В. СЕМЕНОВ, Т.А. ВОЙТОВА

ЭКОНОМИЧНАЯ МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА КОРПЕЛЕВИЧ ДЛЯ МОНОТОННЫХ ЗАДАЧ О РАВНОВЕСИИ[1]

Ключевые слова: *задача о равновесии, вариационное неравенство, метод Корпелевич, проекция, слабая сходимость.*

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи исследования операций, математической экономики и другие могут быть записаны в форме задач о равновесии (задач равновесного программирования) [1–9], для решения которых к настоящему времени предложено большое количество методов [5–25], в частности методов градиентного типа. В основном изучался частный, но наиболее важный случай вариационных неравенств. Известно, что при неоптимизационных постановках для сходимости простейших градиентных методов необходимо выполнение усиленных условий монотонности [10]. Для преодоления этой трудности существует несколько подходов. Один из них состоит в регуляризации исходной задачи с целью придать ей требуемое свойство [11–16]. Сходимость без модификации задачи обеспечивается в методах экстраградиентного типа. В работе [17] Г.М. Корпелевич предложила схему экстраградиентного метода для ряда частных случаев задачи о равновесии, сходящегося лишь при выполнении условий монотонности и липшицевости. Обобщению и исследованию этого метода посвящено большое количество публикаций [7, 10, 18–25 и др.]. Способ формирования последовательности приближений в методе Корпелевич основан на повторном проектировании на допустимое множество двух трансляций текущего приближения. Естественно, что в случае допустимого множества сложной структуры уменьшение числа проектирований существенно снижает вычислительные затраты на выполнение одной итерации.

Цель работы — разработка экономичной в смысле сложности вычислений на итерационном шаге модификации метода Корпелевич для решения монотонных задач о равновесии и обоснование сходимости предложенного метода. Рассматривается случай, когда вычисление проекции на допустимое множество значительно превышает трудоемкость вычисления производных функционала.

Структура статьи следующая. В первом разделе сформулирована задача о равновесии и приведены необходимые математические факты, во втором рассмотрен известный вариант экстраградиентного метода Корпелевич для задач о равновесии, в третьем описана предлагаемая экономичная модификация метода Корпелевич с одним метрическим проектированием на допустимое множество, слабая сходимость которой доказана в четвертом разделе.

1. ОБЩАЯ ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Пусть H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $||\cdot||$, $C \subseteq H$ — непустое выпуклое и замкнутое множество. Обозначим P_C оператор метрического проектирования на множество C: $P_C x$ — единственный элемент множества C со свойством

$$||P_C x - x|| = \min_{z \in C} || z - x|| .$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ГФФИ Украины.

Полезны следующие характеризации элемента $P_C x$ [26, 27]:

$$y = P_C x \iff y \in C,\ (y - x, z - y) \ge 0 \ \ \forall\, z \in C, \tag{1}$$

$$y = P_C x \iff y \in C,\ \|y - z\|^2 \le \|x - z\|^2 - \|y - x\|^2 \ \ \forall\, z \in C. \tag{2}$$

При доказательстве сходимости последовательностей элементов гильбертова пространства используем известную лемму З. Опяла.

Лемма 1 [28]. Пусть последовательность (x_n) элементов гильбертова пространства H слабо сходится к $x \in H$. Тогда

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \varliminf_{n\to\infty} \|x_n - y\| \ \ \forall\, y \in H \setminus \{x\}.$$

Для функционала $f : H \times H \to \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о равновесии в следующей постановке: найти

$$x \in C:\ f(x, y) \ge 0 \ \ \forall\, y \in C. \tag{3}$$

Постановка (3) содержит задачи поиска седловых точек, равновесия Нэша в некооперативных играх, вариационные неравенства, задачи минимизации и монотонные операторные включения [1–4]. Например, если $f(x, y) = (Ax, y - x)$, где $A : H \to H$, то задача (3) является классическим вариационным неравенством, введенным Гвидо Стампаккия в [29]: найти

$$x \in C:\ (Ax, y - x) \ge 0 \ \ \forall\, y \in C. \tag{4}$$

Предположим, что функционал $f : H \times H \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x, x) = 0 \ \ \forall\, y \in H$;
2) $f(x, y) + f(y, x) \le 0 \ \ \forall\, x, y \in H$ (монотонность);
3) $\forall\, x \in H$ функционал $f(x, \cdot)$ выпуклый и дифференцируемый по Гато;
4) $\varlimsup_{t\to+0} f(x + t(z - x), y) \le f(x, y) \ \ \forall\, x, y, z \in H$.

Замечание 1. Для вариационного неравенства (4) условия 1 и 3 выполнены, а условия 2 и 4 равносильны требованию монотонности и хеминепрерывности оператора A.

Имеет место следующее полезное утверждение типа известной леммы Минти [30, с. 137].

Лемма 2. Пусть C — выпуклое и замкнутое подмножество гильбертова пространства H, функционал $f : H \times H \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям 1–4. Для того чтобы точка $x \in C$ была решением задачи (3), необходимо и достаточно выполнения условия

$$(\nabla_2 f(y, y), y - x) \ge 0 \ \ \forall\, y \in C, \tag{5}$$

где $\nabla_2 f(a, b)$ — производная Гато функционала $f(a, \cdot)$ в точке b.

Доказательство. Пусть $x \in C$ — решение задачи (3). Тогда для $t \in (0, 1)$ и $y \in C$ имеем

$$0 \le f(x, x + t(y - x)) - f(x, x) = t(\nabla_2 f(x, x), y - x) + o_{x-y}(t),$$

где $\|o_{x-y}(t)\| = o(t)$ при $t \to 0$. Перейдя к пределу, получим

$$(\nabla_2 f(x, x), y - x) \ge 0 \ \ \forall\, y \in C. \tag{6}$$

Из условий 1 и 3 следует $\forall\, x', x'' \in C$

$$f(x', x'') = f(x', x'') - f(x', x') \ge (\nabla_2 f(x', x'), x'' - x'),$$

$$f(x'', x') = f(x'', x') - f(x'', x'') \ge (\nabla_2 f(x'', x''), x' - x'').$$

Сложив неравенства и учтя условие монотонности 2, получим

$$(\nabla_2 f(x'', x'') - \nabla_2 f(x', x'), x'' - x') \geq 0,$$

т.е. оператор $Ax = \nabla_2 f(x, y)\big|_{x=y}$ монотонный. Тогда из (6) следует

$$(\nabla_2 f(y, y), y - x) \geq (\nabla_2 f(x, x), y - x) \geq 0 \quad \forall\, y \in C.$$

Пусть точка $x \in C$ удовлетворяет (5). Тогда для произвольного $y \in C$ имеем

$$-f(y, x) = f(y, y) - f(y, x) \geq (\nabla_2 f(y, y), y - x) \geq 0\,.$$

Для $t \in (0, 1)$ положим $y_t = t\,y + (1-t)x \in C$. Учитывая 1 и 3, получаем

$$0 = f(y_t, y_t) \leq tf(y_t, y) + f(1-t) f(y_t, x) \leq tf(y_t, y).$$

Следовательно, $0 \leq f(y_t, y)$. Устремив t к нулю и приняв во внимание условие 4, получим

$$f(x, y) \geq 0 \quad \forall\, y \in C,$$

т.е. $x \in C$ — решение задачи (3).

Замечание 2. Для справедливости леммы 2 достаточно выполнения условий 1–4 на множестве C.

Обозначим S множество решений задачи (3). Из леммы 2 следует, что S — выпуклое и замкнутое множество. Далее будем предполагать, что множество S непусто.

2. ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД КОРПЕЛЕВИЧ

Напомним основные положения, связанные с экстраградиентным методом Корпелевич.

Предположим, что в дополнение к условиям 1–4 функционал $f: H \times H \to \mathbb{R}$ обладает следующим свойством:

5) $\exists\, L \geq 0: \ ||\nabla_2 f(x, x) - \nabla_2 f(y, y)|| \leq L||x - y|| \ \ \forall\, x, y \in H.$

Замечание 3. Для вариационного неравенства (4) условие 5 равносильно липшицевости с константой L оператора A.

Для задачи (3) схема экстраградиентного метода Корпелевич имеет следующий вид.

Алгоритм 1

1. Начальное приближение $x_1 \in C$, $n := 1$, $\lambda > 0$.
2. Вычисляем $y_n = P_C(x_n - \lambda \nabla_2 f(x_n, x_n))$.
3. Вычисляем $x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda \nabla_2 f(y_n, y_n))$.
4. Полагаем $n := n+1$, переходим на шаг 2.

Если в алгоритме 1 $\lambda \in \left(0, \dfrac{1}{L}\right)$, то порожденные им последовательности (x_n) и (y_n) слабо сходятся к некоторому решению задачи (3) [10, 17].

Замечание 4. Если $y_n = x_n$, то $x_n \in S$ и алгоритм 1 закончит работу. Действительно, равенство $x_n = P_C(x_n - \lambda \nabla_2 f(x_n, x_n))$ равносильно вариационному неравенству

$$0 \leq (x_n - x_n + \lambda \nabla_2 f(x_n, x_n), y - x_n) = \lambda(\nabla_2 f(x_n, x_n), y - x_n) \quad \forall\, y \in C,$$

откуда

$$f(x_n, y) = f(x_n, y) - f(x_n, x_n) \geq (\nabla_2 f(x_n, x_n), y - x_n) \geq 0 \quad \forall\, y \in C.$$

Замечание 5. Для вариационного неравенства (4) алгоритм имеет вид

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n). \end{cases}$$

Основной недостаток алгоритма 1 — необходимость вычисления двух метрических проекций на допустимое множество C для перехода к следующей итерации. Только при достаточно «простом» множестве C такое проектирование конструктивно осуществимо. В общем случае возникает вопрос об эффективности метода Корпелевич.

3. ЭКОНОМИЧНАЯ МОДИФИКАЦИЯ ЭКСТРАГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА КОРПЕЛЕВИЧ

Откажемся от условия принадлежности множеству C порождаемых точек x_n. Тогда для получения x_{n+1} вместо проектирования $x_n - \lambda\nabla_2 f(y_n, y_n)$ на множество C естественно предложить проектировать точку $x_n - \lambda\nabla_2 f(y_n, y_n)$ на касательное для C в y_n полупространство, определяемое нормалью $x_n - \lambda\nabla_2 f(x_n, x_n) - y_n$. В результате приходим к следующему алгоритму.

Алгоритм 2

1. Начальное приближение $x_1 \in H$, $n := 1$.
2. Вычисляем $y_n = P_C(x_n - \lambda_n \nabla_2 f(x_n, x_n))$.
3. Вычисляем $x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))$, где

$$T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda_n \nabla_2 f(x_n, x_n) - y_n, z - y_n) \le 0\}.$$

4. Полагаем $n := n+1$, переходим на шаг 2.

Здесь λ_n — положительные числа.

Замечание 6. Вычисления на шаге 3 имеют явный характер, а именно:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n) + \frac{x_n - \lambda_n \nabla_2 f(x_n, x_n) - y_n}{\|x_n - \lambda_n \nabla_2 f(x_n, x_n) - y_n\|^2} \times$$

$$\times \begin{cases} 0, & x_n - \lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n) \in T_n, \\ (x_n - \lambda_n \nabla_2 f(x_n, x_n) - y_n, y_n - x_n + \lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n)), & x_n - \lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n) \notin T_n. \end{cases}$$

Замечание 7. В ситуации, когда проектирование на допустимое множество C несложно реализовать по сравнению с вычислением значения $\nabla_2 f(\cdot,\cdot)$, на первый план выходит проблема вычисления производных в двух разных точках. В работе [19] для вариационного неравенства (4) предложена сходящаяся к нормальному решению модификация экстраградиентного метода Корпелевич с вычислением значения оператора A в одной точке

$$\begin{cases} x_1, y_1 \in C, \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda(A y_n + \alpha_n x_n)), \\ y_{n+1} = P_C(x_n - \lambda(A y_n + \alpha_{n+1} x_{n+1})), \end{cases}$$

где $0 < \lambda < \dfrac{1}{L(1+\sqrt{2})}$, $\alpha_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\alpha_n^2} = 0$.

Перейдем к обоснованию сходимости алгоритма 2. Заметим, что в случае $y_n = x_n$, как и для алгоритма 1, имеем $x_n \in S$.

4. ТЕОРЕМА СХОДИМОСТИ

Доказательство сходимости алгоритма 2 начнем с установления для последовательности (x_n) фейеровского свойства относительно множества S [31–33].

Лемма 3. Пусть последовательности (x_n) и (y_n) порождены алгоритмом 2, $p \in S$. Тогда справедливо неравенство

$$||x_{n+1}-p||^2 \le ||x_n-p||^2-(1-\lambda_n^2 L^2)||x_n-y_n||^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Доказательство. Имеем

$$||x_{n+1}-p||^2 = ||P_{T_n}(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))-p||^2 =$$

$$= ||P_{T_n}(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))-(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))+$$

$$+(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))-p||^2 = ||(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))-p||^2+$$

$$+||P_{T_n}(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))-(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))||^2+$$

$$+2(P_{T_n}(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))-(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n)), (x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))-p).$$

Поскольку

$$2||P_{T_n}(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))-(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))||^2+$$

$$+2(P_{T_n}(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))-(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n)), (x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))-p) =$$

$$=2((x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))-$$

$$-P_{T_n}(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n)), p-P_{T_n}(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))) \le 0,$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$||x_{n+1}-p||^2 \le ||(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))-p||^2-$$

$$-||P_{T_n}(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))-(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))||^2 =$$

$$= ||(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))-p||^2-||x_{n+1}-(x_n-\lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n))||^2 =$$

$$= ||x_n-p||^2-||x_n-x_{n+1}||^2+2\lambda_n(p-x_{n+1}, \nabla_2 f(y_n, y_n)). \tag{8}$$

Из монотонности оператора $Ax=\nabla_2 f(x, y)\big|_{x=y}$, включения $p \in S$ и леммы 2 следует

$$0 \le (\nabla_2 f(y_n, y_n)-\nabla_2 f(p, p), y_n-p) =$$

$$= (\nabla_2 f(y_n, y_n), y_n-p)-\underbrace{(\nabla_2 f(p, p), y_n-p)}_{\ge 0} \le$$

$$\le (\nabla_2 f(y_n, y_n), y_n-p) = (\nabla_2 f(y_n, y_n), y_n-x_{n+1})+(\nabla_2 f(y_n, y_n), x_{n+1}-p),$$

или

$$(\nabla_2 f(y_n, y_n), p-x_{n+1}) \le (\nabla_2 f(y_n, y_n), y_n-x_{n+1}). \tag{9}$$

Оценив с помощью (9) правую часть (8), получим

$$||x_{n+1}-p||^2 \le ||x_n-p||^2-||x_n-x_{n+1}||^2+2\lambda_n(\nabla_2 f(y_n, y_n), y_n-x_{n+1}).$$

Далее, имеем

$$||x_{n+1}-p||^2 \le ||x_n-p||^2 - ||(x_n-y_n)+(y_n-x_{n+1})||^2 +$$
$$+2\lambda_n(\nabla_2 f(y_n,y_n),\, y_n-x_{n+1}) =$$
$$=||x_n-p||^2-||x_n-y_n||^2-||y_n-x_{n+1}||^2+2(x_n-\lambda_n\nabla_2 f(y_n,y_n)-y_n,x_{n+1}-y_n).$$

Поскольку $x_{n+1}\in T_n$, получим

$$(x_n-\lambda_n\nabla_2 f(y_n,y_n)-y_n,x_{n+1}-y_n)=\underbrace{(x_n-\lambda_n\nabla_2 f(x_n,x_n)-y_n,x_{n+1}-y_n)}_{\le 0}+$$
$$+\lambda_n(\nabla_2 f(x_n,x_n)-\nabla_2 f(y_n,y_n),x_{n+1}-y_n)\le$$
$$\le \lambda_n(\nabla_2 f(x_n,x_n)-\nabla_2 f(y_n,y_n),x_{n+1}-y_n).$$

Следовательно,

$$||x_{n+1}-p||^2 \le ||x_n-p||^2-||x_n-y_n||^2-||y_n-x_{n+1}||^2+$$
$$+2\lambda_n(\nabla_2 f(x_n,x_n)-\nabla_2 f(y_n,y_n),x_{n+1}-y_n).$$

Принимая во внимание липшицевость $Ax=\nabla_2 f(x,y)\big|_{x=y}$, получаем

$$||x_{n+1}-p||^2\le||x_n-p||^2-||x_n-y_n||^2-||y_n-x_{n+1}||^2+2\lambda_n L||x_n-y_n||\,||x_{n+1}-y_n||.$$

Отсюда следует

$$||x_{n+1}-p||^2\le||x_n-p||^2-(1-\lambda_n^2L^2)||x_n-y_n||^2-(||y_n-x_{n+1}||-\lambda_n L||x_n-y_n||)^2\le$$
$$\le||x_n-p||^2-(1-\lambda_n^2L^2)||x_n-y_n||^2,$$

что и требовалось доказать. □

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Пусть C — выпуклое и замкнутое подмножество гильбертова пространства H, функционал $f: H\times H\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям 1–5, $S\ne\varnothing$ и $\lambda_n\in(\delta_0,\frac{1}{L+\delta_1})$, где $\delta_0>0$, $\delta_1>0$. Тогда последовательности (x_n) и (y_n), порожденные алгоритмом 2, слабо сходятся к некоторой точке $z\in S$.

Доказательство. Фиксируем точку $p\in S$ и положим $d_n=1-\lambda_n^2L^2\in[d,1)$, где $d\in(0,1)$. Из неравенства (7) следует $d_n||x_n-y_n||^2\le||x_n-p||^2$.

Поскольку

$$||x_n-p||^2\le||x_{n-1}-p||^2-d_{n-1}||x_{n-1}-y_{n-1}||^2,$$

получаем

$$d_n||x_n-y_n||^2+d_{n-1}||x_{n-1}-y_{n-1}||^2\le||x_{n-1}-p||^2.$$

Следовательно, для всех $n\in\mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} d_k||x_k-y_k||^2\le||x_1-p||^2.$$

Таким образом,
$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n - y_n||^2 \le \frac{||x_1 - p||^2}{d},$$
$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - y_n|| = 0. \tag{10}$$

Из леммы 2 и (10) следует ограниченность последовательностей (x_n) и (y_n). Рассмотрим подпоследовательность (x_{n_k}), слабо сходящуюся к некоторой точке $z \in C$. Тогда
$$y_{n_k} \to z \text{ слабо.}$$

Покажем, что $z \in S$. Для всех $x \in C$ с учетом (1) имеем
$$0 \le (y_{n_k} - x_{n_k} + \lambda_{n_k} \nabla_2 f(x_{n_k}, x_{n_k}), x - y_{n_k}) = (y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k}) +$$
$$+ \lambda_{n_k} (\nabla_2 f(x_{n_k}, x_{n_k}), x_{n_k} - y_{n_k}) + \lambda_{n_k} (\nabla_2 f(x_{n_k}, x_{n_k}), x - x_{n_k}) \le$$
$$\le \underbrace{(y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k}) + \lambda_{n_k} (\nabla_2 f(x_{n_k}, x_{n_k}), x_{n_k} - y_{n_k})}_{\to 0,\ k \to \infty} + \lambda_{n_k} (\nabla_2 f(x, x), x - x_{n_k}).$$

Совершив предельный переход, получим
$$(\nabla_2 f(x, x), x - z) \ge 0 \quad \forall x \in C.$$

Следовательно, $z \in S$.

Покажем, что $x_n \to z$ слабо (тогда из $||x_n - y_n|| \to 0$ вытекает $y_n \to z$ слабо). Рассуждаем от противного. Предположим, что существует подпоследовательность (x_{m_k}) такая, что $x_{m_k} \to z'$ слабо и $z \ne z'$. Из монотонности числовой последовательности $(||x_n - p||)$ $(p \in S)$ и леммы 1 следует
$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - z|| = \underline{\lim}_{k\to\infty} ||x_{n_k} - z|| < \underline{\lim}_{k\to\infty} ||x_{n_k} - z'|| = \lim_{n\to\infty} ||x_n - z'|| =$$
$$= \underline{\lim}_{k\to\infty} ||x_{m_k} - z'|| < \underline{\lim}_{k\to\infty} ||x_{m_k} - z|| = \lim_{n\to\infty} ||x_n - z||,$$

что абсурдно. Таким образом, $z = z'$. □

Слабый предел $z \in S$ порожденной алгоритмом 2 последовательности (x_n) обладает следующим свойством:
$$P_S x_n \to z \text{ сильно.} \tag{11}$$

Действительно, имеем $(P_S x_n - x_n, z - P_S x_n) \ge 0$. Если доказать, что $P_S x_n \to \bar{z}$ сильно, то после предельного перехода получим $(\bar{z} - z, z - \bar{z}) \ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z = \bar{z}$, т.е. верно (11). Докажем сильную сходимость $(P_S x_n)$. Имеем
$$||x_{n+1} - P_S x_{n+1}|| \le ||x_{n+1} - P_S x_n|| \le ||x_n - P_S x_n||,$$

следовательно, существует $\lim_{n\to\infty} ||x_n - P_S x_n|| \in \mathbb{R}$. Применив неравенство (2) и лемму 3, получим
$$||P_S x_m - P_S x_n||^2 \le ||x_m - P_S x_n||^2 - ||P_S x_m - x_m||^2 \le$$
$$\le ||x_{m-1} - P_S x_n||^2 - ||P_S x_m - x_m||^2 \le \ldots \le ||x_n - P_S x_n||^2 - ||P_S x_m - x_m||^2, \ m > n.$$

Отсюда следует фундаментальность последовательности $(P_S x_n)$.

Замечание 8. Используя подходы работ [34, 35], алгоритм 2 можно регуляризовать для получения сильно сходящихся к решению задачи (3) последовательностей. Соответствующая процедура имеет вид

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n \nabla_2 f(x_n, x_n)), \\ y_{n+1} = \alpha_n x_1 + (1-\alpha_n) P_{T_n}(x_n - \lambda_n \nabla_2 f(y_n, y_n)), \end{cases} \tag{12}$$

где $0 < a \le \lambda_n L \le b < 1$, $\alpha_n \in (0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$. (В одной из ближайших работ планируется представить доказательство сильной сходимости процедуры (12) к точке $z = P_S x_1$.)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрена проблема приближенного решения общей задачи о равновесии в гильбертовом пространстве. Предложена экономичная модификация метода Корпелевич с одним метрическим проектированием на итерационном шаге. Доказана теорема о слабой сходимости порожденных модифицированным методом последовательностей.

Отметим, что очевидным недостатком предложенной процедуры является предположение о том, что константа L из условия 5 известна. Исключить явное использование этой информации можно, например, уменьшением шага по правилу Армихо [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nikaido H., Isoda K. Note on noncooperative convex games // Pacif. J. Math. — 1955. — **5**. — P. 807–815.
2. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. — М.: Наука, 1988. — 448 с.
3. Blum E., Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems // Math. Stud. — 1994. — **63**. — P. 123–145.
4. Gopfert A., Tammer Chr., Riahi H., Zalinescu C. Variational methods in partially ordered spaces. — New York; Berlin; Heidelberg: Springer, 2003. — 350 p.
5. Ненахов Э.И. Об одном способе нахождения состояния равновесия // Обчисл. та прикл. математика. — 1996. — Вип. 80. — С. 59–67.
6. Антипин А.С. Равновесное программирование: проксимальные методы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1997. — **37**, № 11. — С. 1327–1339.
7. Антипин А.С. Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании. — М.: ВЦ РАН, 2002. — 130 с.
8. Ermoliev Y.M., Flaam S.D. Repeated play of potential games // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 3. — С. 52–67.
9. Mastroeni G. On auxiliary principle for equilibrium problems // Publ. del Depart. di Math. Dell'Univ. di Pisa. — 2000. — **3**. — P. 1244–1258.
10. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — М.: Наука, 1989. — 400 с.
11. Combettes P.L., Hirstoaga S.A. Equilibrium programming in Hilbert spaces // J. Nonlinear Convex Anal. — 2005. — **6**. — P. 117–136.
12. Takahashi S., Takahashi W. Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — **331**. — P. 506–515.

13. Van N.T.T., Strodiot J.J., Nguyen V.H. A bundle method for solving equilibrium problems // Math. Program. Ser. B. — 2009. — **116** (1–2). — P. 529–552.

14. Nguyen B., Dang T.T.H. Tikhonov regularization method for system of equilibrium problems in Banach spaces // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 8. — С. 1098–1105.

15. Малицкий Ю.В., Семенов В.В. О проксимальном алгоритме для задачи о равновесии // XVI Int. Conf. «PDMU-2010» (Yalta, Ukraine): Abstracts. — Kyiv: Taras Shevchenko Nat. Univ. of Kiev, 2010. — P. 96–97.

16. Маліцький Ю.В., Семенов В.В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Журн. обчисл. та прикл. математики. — 2010. — № 3 (102). — С. 79–88.

17. Корпелевич Г.М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и мат. методы. — 1976. — **12**, № 4. — С. 747–756.

18. Попов Л.Д. Модификация метода Эрроу–Гурвица поиска седловых точек // Мат. заметки. — 1980. — **28**, № 5. — С. 777–784.

19. Попов Л.Д. О схемах формирования ведущей последовательности в регуляризованном экстраградиентном методе решения вариационных неравенств // Изв. вузов. Математика. — 2004. — № 1. — С. 70–79.

20. Коннов И.В. Комбинированные субградиентные методы поиска седловых точек // Там же. — 1992. — № 10. — С. 30–33.

21. Коннов И.В. Комбинированные релаксационные методы для поиска точек равновесия и решения смежных задач // Там же. — 1993. — № 2. — С. 46–53.

22. Konnov I.V., Schaible S., Yao J.C. Combined relaxation method for mixed equilibrium problems // J. Optim. Theory Appl. — 2005. — **126**. — P. 309–322.

23. Iusem A.N ., Svaiter B.F. A variant of Korpelevich's method for variational in equalities with a new search strategy // Optimization. — 1997. — **42**. — P. 309–321.

24. Bello Cruz J.Y., Iusem A.N. A strongly convergent direct method for monotone variational inequalities in Hilbert spaces // Numer. Func. Anal. and Optim. — 2009. — **1**. — P. 23–36.

25. Tran D.Q., Muu L.D., Nguyen V.H. Extragradient algorithms extended to solving equilibrium problems // Optimization. — 2008. — **57**, N 6. — P. 749–776.

26. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979. — 399 с.

27. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988. — 510 с.

28. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. **— 73**. — P. 591–597.

29. Stampacchia G. Formes bilineaires coercitives sur lesensembles convexes // Comptes rendus de l'Acad. des Sci. Paris. — 1964. — **258**. — P. 4413–4416.

30. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977. — 232 с.

31. Еремин И.И., Мазуров В.Д. Нестационарные процессы математического программирования. — М.: Наука, 1979. — 228 с.

32. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения). — М.-Ижевск: Регуляр. и хаот. динамика, 2005. — 200 с.

33. Еремин И.И., Попов Л.Д. Фейеровские процессы в теории и практике: обзор последних результатов // Изв. вузов. Математика. — 2009. — № 1. — С. 44–65.

34. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 200 с.

35. Mainge P.-E. A hybrid extragradient-viscosity method for monotone operators and fixed point problems // SIAM J. Control Optim. — 2008. — **47**, N 3. — P. 1499–1515.

Поступила 01.03.2011