УДК 519.8

В.А. ЕМЕЛИЧЕВ, В.В. КОРОТКОВ, К.Г. КУЗЬМИН

ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ ВЕКТОРНОЙ МИНИМАКСНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ

Ключевые слова: *векторная минимаксная комбинаторная задача, диапазонные критерии, устойчивость по векторному критерию, возмущения исходных данных.*

Важное место среди оптимизационных задач занимают минимаксные (или максиминные) задачи [1–3]. К ним относится и задача, поставленная П.Л. Чебышевым, о наилучшем равномерном приближении функций полиномами. Особую актуальность в последнее время приобретает не только проблема построения эффективных методов решения таких экстремальных задач, но и проведение постоптимального анализа, важнейшей составляющей которого является исследование устойчивости задач относительно изменений их исходных данных. Для многокритериальных (векторных) задач дискретной оптимизации изучение проблемы устойчивости осуществляется преимущественно в двух направлениях: качественном и количественном.

Качественное направление, представленное в монографиях [4, 5] (см. также обзор [6]), ориентировано на получение условий, при выполнении которых множеству эффективных решений векторной задачи присуще некоторое наперед заданное свойство, характеризующее устойчивость задачи к «малым» возмущениям исходных данных.

Количественное направление носит конструктивный характер и связано с получением количественных характеристик допустимых возмущений параметров как скалярных, так и векторных дискретных задач, таких как радиус устойчивости и функция устойчивости [7–10].

Настоящая статья относится к качественному направлению исследований. В ней продолжено начатое в [11–14] изучение различных типов устойчивости по векторному критерию минимаксных («узкого места») комбинаторных задач. Формулируются и доказываются необходимые и одновременно достаточные условия основных типов устойчивости задач с диапазонными критериями, т.е. критериями, обеспечивающими наибольшую равномерность параметров эффективных решений. Эти результаты получены на основе общего подхода, предложенного в [15] для исследования устойчивости векторных задач целочисленной оптимизации к изменениям исходных данных. Такой подход сводит проблему устойчивости к изучению двух множеств: множества допустимых решений, устойчиво принадлежащих множеству Парето, и множества допустимых решений, устойчиво не принадлежащих множеству Парето.

Частично результаты данной статьи анонсированы в [16].

1. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $A=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{n\times m}$, $n\ge 1$, $m\ge 2$, T — система непустых подмножеств (траекторий) множества $N_m=\{1,2,\dots,m\}$, т.е. $T\subseteq 2^{N_m}\setminus\{\varnothing\}$, причем $|T|\ge 2$. Пусть компонентами вектор-функции

$$f(t,A)=(f_1(t,A),f_2(t,A),\dots,f_n(t,A)),\quad n\ge 1,$$

© В.А. Емеличев, В.В. Коротков, К.Г. Кузьмин, 2011

заданной на T, являются минимаксные критерии

$$f_i(t, A) = \max_{(j,k)\in t\times t} (a_{ij} - a_{ik}) \to \min_{t\in T}, \quad i \in N_n. \qquad (1)$$

Под векторной комбинаторной (траекторной) задачей $Z^n(A,T)$ будем понимать задачу поиска множества Парето $P^n(A)$, состоящего из всех эффективных траекторий:

$$P^n(A) = \{t \in T : \ \forall\, t' \in T \ \ (t \,\bar{\succ}_A\, t')\}.$$

Здесь $\bar{\succ}_A$ — отрицание бинарного отношения $\succ_A$, отношения доминирования по Парето:

$$t \succ_A t' \Leftrightarrow f(t, A) \geq f(t', A) \,\&\, f(t, A) \neq f(t', A).$$

Очевидно, что в скалярном случае, когда $n = 1$, множество $P^1(A)$, где $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^m$, является множеством всех оптимальных решений траекторной задачи $Z^1(A,T)$, в схему которой (при разнообразных критериях), как известно, вкладываются практически все комбинаторные экстремальные задачи, а также задачи булева программирования. Числа a_j, $j \in t$, назовем параметрами траектории в задаче $Z^1(A,T)$. Тогда рассматриваемую задачу можно интерпретировать как задачу выбора таких траекторий, для которых расхождение между максимальным и минимальным параметрами наименьшее, т.е. траекторий с минимальным диапазоном параметров. В связи с этим критерии вида (1) называются диапазонными. При решении задачи $Z^1(A,T)$ ищется траектория с наиболее равномерными параметрами. Очевидно, что такие дискретные экстремальные задачи имеют место, когда возникает необходимость выбирать решение по возможности с одинаковыми параметрами, среди которых могут быть объемы работ, количества отправляемой или перевозимой продукции, сроки завершения работ и т.п. Необходимость оптимизировать процесс по нескольким видам подобных критериев приводит к векторной задаче поиска множества Парето.

Будем исследовать поведение множества Парето $P^n(A)$ при возмущениях всех элементов матрицы A. Следуя [5, 14, 15, 17–19], задачу $Z^n(A,T)$ назовем:

- T_1-устойчивой, если $\exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon) \ \ (P^n(A) \cap P^n(A + A') \neq \varnothing)$;
- T_2-устойчивой, если $\exists\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, t^0 \in P^n(A) \ \ \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon) \ \ (t^0 \in P^n(A + A'))$;
- T_3-устойчивой, если $\exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon) \ \ (P^n(A + A') \subseteq P^n(A))$;
- T_4-устойчивой, если $\exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon) \ \ (P^n(A) \subseteq P^n(A + A'))$;
- T_5-устойчивой, если $\exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon) \ \ (P^n(A) = P^n(A + A'))$.

Здесь $\Omega(\varepsilon) = \{A' \in \mathbf{R}^{n\times m} : ||A'|| < \varepsilon\}$ — множество возмущающих матриц, $||A'|| = \max\{|a'_{ij}| : \ (i, j) \in N_n \times N_m\}$.

Таким образом, каждый из этих типов устойчивости характеризуется некоторым свойством инвариантности элементов множества Парето $P^n(A)$ относительно возмущений параметров векторной функции $f(t, A)$, т.е. является устойчивостью по векторному критерию в терминологии [5, 15, 17–19].

Поскольку функции $f_i(t, A)$, $i \in N_n$, непрерывны в пространстве $\mathbf{R}^m$, рассуждая аналогично доказательству теоремы 1 из [14], легко убедиться, что задача $Z^n(A,T)$ является T_1-устойчивой при любой матрице $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$. Более того, несложно установить, что свойством T_1-устойчивости обладает векторная комбинаторная задача с любыми критериями, непрерывными в пространстве параметров.

Задачу $Z^n(A,T)$, для которой множество неэффективных траекторий $\overline{P}^n(A) := T \setminus P^n(A)$ пусто, назовем тривиальной, а задачу $Z^n(A,T)$ с непустым множеством $\overline{P}^n(A)$ — нетривиальной.

Для исследования понятий T_2-, T_3-, T_4- и T_5-устойчивости рассматриваемой задачи используем общий подход, разработанный в [15] и основанный на введении ядра устойчивости множества эффективных траекторий $P^n(A)$, которое задается формулой

$$\mathrm{Ker}(A,P) = \{t \in P^n(A) \colon \exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon) \;\; (t \in P^n(A + A'))\},$$

и ядра устойчивости множества неэффективных траекторий $\overline{P}^n(A)$, определяемого формулой

$$\mathrm{Ker}\,(A,\overline{P}) = \{t \in \overline{P}^n(A) \colon \exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon) \;\; (t \in \overline{P}^n(A + A'))\}.$$

Следуя [15], сформулируем необходимые утверждения.

1. Задача $Z^n(A,T)$ T_2-устойчива тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\,(A,P) \neq \varnothing$.

2. Нетривиальная задача $Z^n(A,T)$ T_3-устойчива тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\,(A,\overline{P}) = \overline{P}^n(A)$.

3. Задача $Z^n(A,T)$ T_4-устойчива тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\,(A,P) = P^n(A)$.

4. Тривиальная задача $Z^n(A,T)$ T_5-устойчива тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}(A,P) = P^n(A)$.

5. Нетривиальная задача $Z^n(A,T)$ T_5-устойчива тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}(A,P) = P^n(A)$ и $\mathrm{Ker}\,(A,\overline{P}) = \overline{P}^n(A)$.

Отметим, что в [15] данные утверждения получены для векторной целочисленной задачи $Q(F,X)$ с произвольным векторным критерием F и конечным допустимым множеством $X \subset \mathbf{Z}^n$. При этом для выявления наиболее общих результатов задавалось лишь некоторое прямое произведение $U = U_1 \times U_2$ пространства U_1 исходных данных для описания векторного критерия F и пространства U_2 исходных данных для описания допустимого множества решений X.

2. ЗАДАЧИ, СОДЕРЖАЩИЕ ОДНОЭЛЕМЕНТНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Рассмотрим простейший случай, когда задача $Z^n(A,T)$, а точнее, множество траекторий T, содержит хотя бы одну одноэлементную траекторию ($|t| = 1$). Множество всех таких траекторий обозначим T^*. Понятно, что $f_i(t, A) = 0$ при любых $t \in T^*$, $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$ и $i \in N_n$.

Следующие свойства очевидны.

Свойство 1. Включение $T^* \subseteq P^n(A)$ справедливо при любой матрице $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$.

Свойство 2. Если $t \in T^*$, то $t \in \mathrm{Ker}(A, P)$ при любой матрице $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$.

Свойство 3. Если $T^* \neq \varnothing$, то $\forall\, A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ $\forall\, t \in P^n(A)$ $\forall\, i \in N_n$ $(f_i(t, A) = 0)$.

Свойство 4. Если $T^* \neq \varnothing$, то $\forall\, t \in \overline{P}^n(A)$ $\exists\, s \in N_n$ $(f_s(t, A) > 0)$.

Свойство 5. Если $f_i(t, A) = 0$, то для всякой матрицы $A' \in \mathbf{R}^{n \times m}$ верно равенство $f_i(t, A + A') = f_i(t, A')$.

В силу непрерывности функции $f_i(t, A)$ в пространстве $\mathbf{R}^m$ очевидно следующее свойство.

Свойство 6. Если $f_i(t, A) > f_i(t', A)$ $(f_i(t, A) > 0)$, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что для всякой возмущающей матрицы $A' \in \Omega(\varepsilon)$ справедливо неравенство $f_i(t, A + A') > f_i(t', A + A')$ $(f_i(t, A + A') > 0)$.

Заметим, что свойства 5 и 6 справедливы для любых траекторий, а не только для одноэлементных.

Теорема 1. Если $T^* \neq \varnothing$, то векторная задача $Z^n(A, T)$, $n \geq 1$, является одновременно T_2- и T_3-устойчивой при любой матрице $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$.

Доказательство. T_2-устойчивость задачи $Z^n(A, T)$ следует из утверждения 1 (разд. 1) и свойства 2.

Если задача $Z^n(A, T)$ тривиальна, то очевидно, что она T_3-устойчива. В противном случае докажем, что любая траектория $t \in \overline{P}^n(A)$ принадлежит ядру $\mathrm{Ker}(A, P)$. Пусть $t^* \in T^*$. Тогда в силу свойства 1 $t^* \in P^n(A)$ и согласно свойствам 3, 4 найдется такой индекс $s \in N_n$, что справедливо неравенство $f_s(t, A) > 0 = f_s(t^*, A)$.

Используя свойство 6, получаем

$$\exists\, \varepsilon = \varepsilon(t) > 0 \;\; \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon) \;\; (f_s(t, A + A') > f_s(t^*, A + A') = 0).$$

Ввиду неравенств $f_i(t, A) \geq 0$, $i \in N_n$, справедливых для любой матрицы $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$, имеет место отношение $t \underset{A+A'}{\succ} t^*$. Поэтому $t \in \mathrm{Ker}(A, \overline{P})$.

Итак, $\mathrm{Ker}(A, \overline{P}) = \overline{P}^n(A)$, что в силу утверждения 2 эквивалентно T_3-устойчивости задачи $Z^n(A, T)$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если $T^* \neq \varnothing$, то для векторной задачи $Z^n(A, T)$, $n \geq 1$, следующие утверждения эквивалентны:

(i) задача $Z^n(A, T)$ T_4-устойчива;

(ii) задача $Z^n(A, T)$ T_5-устойчива;

(iii) $P^n(A) = T^*$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Поскольку задача $Z^n(A, T)$ содержит одноэлементные траектории, то в силу теоремы 1 она T_3-устойчива, что вместе с T_4-устойчивостью делает ее и T_5-устойчивой.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть задача $Z^n(A, T)$ T_5-устойчива, но условие (iii) не выполняется. Тогда согласно свойству 1 существует траектория $t^0 \in P^n(A) \setminus T^*$, для которой в силу свойства 3 справедливы равенства $f_i(t^0, A) = 0$, $i \in N_n$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Зафиксировав произвольное число $j^0 \in t^0$, построим элементы возмущающей матрицы $A^0 = [a_{ij}^0] \in \Omega(\varepsilon)$ по правилу

$$a_{ij}^0 = \begin{cases} \alpha, & \text{если } i \in N_n,\ j = j^0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 < \alpha < \varepsilon$. Тогда, учитывая свойство 5, запишем

$$f_i(t^0, A + A^0) = f_i(t^0, A^0) = \alpha > 0, \quad i \in N_n.$$

Отсюда следует, что для любой траектории $t \in T^*$ справедливо отношение $t^0 \underset{A+A^0}{\succ} t$, поскольку ввиду свойства 3 имеет место равенство

$$f_i(t, A + A^0) = 0, \quad i \in N_n.$$

В результате получаем, что $t^0 \in \overline{P}^n(A + A^0)$, и в соответствии с $t^0 \in P^n(A)$ имеем $\operatorname{Ker}(A, P) \neq P^n(A)$.

Пользуясь утверждениями 4 и 5, заключаем, что задача $Z^n(A, T)$ не является T_5-устойчивой. Получили противоречие.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Эта импликация с очевидностью вытекает из утверждения 3 и свойства 2.

Теорема 2 доказана.

3. ЗАДАЧИ, НЕ СОДЕРЖАЩИЕ ОДНОЭЛЕМЕНТНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Рассмотрим случай, когда множество траекторий задачи $Z^n(A, T)$ не содержит одноэлементных траекторий, т.е. $T^* = \varnothing$.

Для каждой матрицы $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ на множестве траекторий T зададим следующие бинарные отношения:

$$t \underset{A}{\sim} t' \iff \forall\, i \in N_n \ \ (f_i(t, A) = f_i(t', A)),$$

$$t \underset{A}{\approx} t' \iff \forall\, i \in N_n \ \ (N_i(t, A) = N_i(t', A)),$$

$$t \underset{A}{\geq} t' \iff \forall\, i \in N_n \ \ (f_i(t, A) \geq f_i(t', A)),$$

$$t \underset{A}{>} t' \iff \forall\, i \in N_n \ \ (f_i(t, A) > f_i(t', A)),$$

$$t \underset{A}{\vdash} t' \iff \forall\, i \in N_n \ \ (f_i(t, A) = f_i(t', A) \Rightarrow (N_i(t, A) \supseteq N_i(t', A))),$$

где $N_i(t, A) = \{(j^0, k^0) \in t \times t \colon f_i(t, A) = a_{ij^0} - a_{ik^0}\}$.

В этих обозначениях справедливы следующие свойства.

Свойство 7. Если $t \underset{A}{\vdash} t'$, то $\exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon) \ \ (t' \underset{A+A'}{\not\succ} t)$.

Свойство 8. Если $t \underset{A}{>} t'$, то $\exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon) \ \ (t \underset{A+A'}{\succ} t')$.

Свойство 9. Если $t \underset{A}{\approx} t'$, то $\exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon) \ \ (t \underset{A+A'}{\approx} t')$.

Свойство 10. Если $t \underset{A}{\approx} t'$, то $t \underset{A}{\sim} t'$ и $t \cap t' \neq \varnothing$.

Положим
$$N_i^s(t,A)=\begin{cases}\operatorname{Arg\,max}\{a_{ij}: j\in t\} & \text{при } s=1,\\ \operatorname{Arg\,min}\{a_{ij}: j\in t\} & \text{при } s=2;\end{cases}$$
$$g_i^s(t,A)=\begin{cases}\max\{a_{ij}: j\in t\} & \text{при } s=1,\\ \min\{a_{ij}: j\in t\} & \text{при } s=2.\end{cases}$$
Таким образом, имеем
$$N_i^s(t,A)=\{p\in t:\ g_i^s(t,A)=a_{ip}\},\ s\in N_2.$$

Поскольку для любой траектории t и всякого индекса $i\in N_n$ справедливо равенство
$$f_i(t,A)=g_i^1(t,A)-g_i^2(t,A),$$
имеем
$$N_i(t,A)=N_i^1(t,A)\times N_i^2(t,A).$$

Лемма 1. Если $t\in P^n(A)$ и $t \overline{\underset{A}{\vdash}} t' \underset{A}{\sim} t$, то $t'\notin \operatorname{Ker}(A,P)$.

Доказательство. Так как $t \overline{\underset{A}{\vdash}} t' \underset{A}{\sim} t$, имеем $t'\in P^n(A)$ и существует такая тройка (p,q,r), что $q\in N_p^r(t',A)\setminus N_p^r(t,A)$. Тогда, полагая $\varepsilon>0$, построим элементы возмущающей матрицы $A^0=[a_{ij}^0]\in\Omega(\varepsilon)$ по правилу
$$a_{ij}^0=\begin{cases}(-1)^{r-1}\alpha, & \text{если } (i,j)=(p,q),\\ 0 & \text{для остальных пар } (i,j)\in N_n\times N_m,\end{cases}$$
где $0<\alpha<\varepsilon$. Отсюда, учитывая $t'\notin T^*$ и $t\underset{A}{\sim} t'$, при $r=1$ имеем
$$f_p(t',A+A^0)=a_{pq}+\alpha-g_p^2(t',A)>$$
$$>a_{pq}-g_p^2(t',A)=f_p(t',A)=f_p(t,A)=f_p(t,A+A^0),$$
$$f_i(t',A+A^0)=f_i(t,A+A^0),\ i\neq p,$$
при $r=2$ получаем
$$f_p(t',A+A^0)=g_p^1(t',A)-(a_{pq}-\alpha)=$$
$$=f_p(t',A)+\alpha>f_p(t',A)=f_p(t,A)=f_p(t,A+A^0),$$
$$f_i(t',A+A^0)=f_i(t,A+A^0),\ i\neq p.$$

Резюмируя, выводим $t' \underset{A+A^0}{\succ} t$, т.е. для любого числа $\varepsilon>0$ существует такая возмущающая матрица $A^0\in\Omega(\varepsilon)$, что $t'\in\overline{P}^n(A+A^0)$. Следовательно, $t'\notin\operatorname{Ker}(A,P)$.

Лемма 1 доказана.

В дальнейшем используем обозначение $P^n(t,A)=\{t'\in T:\ t\underset{A}{\succ} t'\}$.

Лемма 2. Если траектория $t^0\in\overline{P}^n(A)$ такова, что $\forall\, t\in P^n(t^0,A)$ $(t^0 \overline{\underset{A}{\vdash}} t)$, то справедлива формула
$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, A^0\in\Omega(\varepsilon)\ \forall\, t\in P^n(A)\ \ (t^0 \underset{A+A^0}{\overline{\succ}} t). \tag{2}$$

Доказательство. Полагая $0 < \alpha < \varepsilon$, построим элементы возмущающей матрицы $A^0 = [a_{ij}^0] \in \mathbf{R}^{n \times m}$ по правилу

$$a_{ij}^0 = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\omega}(a_{ij} - \xi_i), & \text{если } i \in U,\ j \in N_m \setminus t^0, \\ \dfrac{\alpha}{m} j, & \text{если } i \in V,\ j \in N_m \setminus t^0, \\ 0, & \text{если } i \in N_n,\ j \in t^0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$U = \{i \in N_n : f_i(t^0, A) > 0\}, \quad V = \{i \in N_n : f_i(t^0, A) = 0\},$$

$$\xi_i = \frac{1}{2}(g_i^1(t^0, A) + g_i^2(t^0, A)),\ i \in N_n\ ,\ \omega = 2 \| A \| .$$

Поскольку $t^0 \underset{A}{\overline{\vdash}} t$, имеем $t^0 \neq N_m$. Поэтому $N_m \setminus t^0 \neq \varnothing$. Кроме того, очевидны неравенства

$$0 < \left| \frac{\alpha}{\omega}(a_{ij} - \xi_i) \right| \le \alpha,\ i \in U,\ \ j \in N_m \setminus t^0,$$

$$0 < \left| \frac{\alpha}{m} j \right| \le \alpha,\ j \in N_m .$$

Отсюда $0 < \| A^0 \| \le \alpha$ и $A^0 \in \Omega(\varepsilon)$. Учитывая структуру матрицы A^0, имеем

$$f_i(t^0, A + A^0) = f_i(t^0, A),\ i \in N_n . \tag{4}$$

Из условий леммы 2 вытекает формула $\forall t \in P^n(A)\ (t^0 \underset{A}{\overline{\vdash}} t \vee t^0 \underset{A}{\overline{\ge}} t)$.

В соответствии с этим рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $t^0 \underset{A}{\overline{\vdash}} t$. Тогда $N_m \setminus t^0 \neq \varnothing$ и найдутся индексы $s \in N_n$, $r \in N_2$ с условием

$$\gamma := f_s(t^0,\ A) = f_s(t, A), \tag{5}$$

$$N_s^r(t^0,\ A) \not\supseteq\ N_s^r(t, A). \tag{6}$$

Пусть сначала $\gamma = 0$. Тогда $s \in V$. Из (4) и свойства 5 следуют равенства

$$f_s(t^0,\ A + A^0) = \gamma = 0, \tag{7}$$

$$f_s(t, A + A^0) = f_s(t, A^0) = g_s^1(t, A^0) - g_s^2(t, A^0). \tag{8}$$

Поскольку на основе (6) $t \setminus t^0 \neq \varnothing$, учитывая строение s-й строки $(a_{s1}^0, a_{s2}^0, \ldots, a_{sm}^0)$ матрицы A^0, получаем

$$g_s^1(t, A^0) = \frac{\alpha}{m} \max \{j : j \in t \setminus t^0\},$$

$$g_s^2(t, A^0) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{m} \min \{j : j \in t\}, & \text{если } t \cap t^0 = \varnothing, \\ 0, & \text{если } t \cap t^0 \neq \varnothing. \end{cases}$$

Итак, если $t \cap t' \neq \varnothing$, то на основании (8) имеем $f_s(t, A + A^0) = g_s^1(t, A^0) > 0$. Если $t \cap t' = \varnothing$, то согласно (8) и ввиду $|t| \geq 2$ получаем

$$f_s(t, A + A^0) = \frac{\alpha}{m}(\max\{j : j \in t\} - \min\{j : j \in t\}) > 0 .$$

Учитывая (7), при $\gamma = 0$ имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists A^0 \in \Omega(\varepsilon) \;\; (f_s(t^0, A + A^0) < f_s(t, A + A^0)) . \tag{9}$$

Далее покажем, что формула (9) выполняется и при $\gamma > 0$. В этом случае $s \in U$ и согласно (6) возможны только три варианта.

1. Пусть $N_s^1(t, A) \setminus N_s^1(t^0, A) \neq \varnothing$ и $N_s^2(t, A) \subseteq N_s^2(t^0, A)$. Тогда справедливо равенство

$$g_s^2(t^0, A) = g_s^2(t, A). \tag{10}$$

Кроме того, полагая $p \in N_s^1(t, A) \setminus N_s^1(t^0, A)$, согласно (4) и (5) получаем

$$f_s(t^0, A + A^0) = f_s(t, A) = g_s^1(t, A) - g_s^2(t, A) = a_{sp} - g_s^2(t, A),$$

$$f_s(t, A + A^0) = g_s^1(t, A + A^0) - g_s^2(t, A).$$

Для доказательства формулы (9) покажем, что $g_s^1(t, A + A^0) > a_{sp}$. Учитывая (3), (5), (10) и неравенство $g_s^1(t, A + A^0) \geq a_{sp} + a_{sp}^0$, докажем, что $a_{sp}^0 > 0$:

$$a_{sp}^0 = \frac{\alpha}{\omega}\left(a_{sp} - \frac{1}{2}(a_{sp} + g_s^2(t^0, A))\right) = \frac{\alpha}{2\omega}(g_s^1(t, A) - g_s^2(t, A)) = \frac{\alpha}{2\omega}\gamma > 0.$$

2. Пусть $N_s^1(t, A) \subseteq N_s^1(t^0, A)$ и $N_s^2(t, A) \setminus N_s^2(t^0, A) \neq \varnothing$. Тогда имеет место

$$g_s^1(t^0, A) = g_s^1(t, A). \tag{11}$$

Полагая $p \in N_s^2(t, A) \setminus N_s^2(t^0, A)$, с учетом (4) и (5) находим

$$f_s(t^0, A + A^0) = f_s(t, A) = g_s^1(t, A) - a_{sp},$$

$$f_s(t, A + A^0) = g_s^1(t, A) - g_s^2(t, A + A^0).$$

Для доказательства формулы (9) остается показать, что $g_s^2(t, A + A^0) < a_{sp}$. Используя (3), (5), (11) и неравенство $g_s^2(t, A + A^0) \leq a_{sp} + a_{sp}^0$, докажем, что $a_{sp}^0 < 0$:

$$a_{sp}^0 = \frac{\alpha}{\omega}\left(a_{sp} - \frac{1}{2}(g_s^1(t^0, A) + a_{sp})\right) = -\frac{\alpha}{2\omega}(g_s^1(t, A) - g_s^2(t, A)) = -\frac{\alpha}{2\omega}\gamma < 0.$$

3. Пусть $N_s^1(t, A) \setminus N_s^1(t^0, A) \neq \varnothing$ и $N_s^2(t, A) \setminus N_s^2(t^0, A) \neq \varnothing$. Тогда, полагая $p \in N_s^1(t, A) \setminus N_s^1(t^0, A)$, $q \in N_s^2(t, A) \setminus N_s^2(t^0, A)$ и учитывая (4) и (5), имеем

$$f_s(t^0, A + A^0) = f_s(t^0, A) = f_s(t, A) = a_{sp} - a_{sq},$$

$$f_s(t, A + A^0) = g_s^1(t, A + A^0) - g_s^2(t, A + A^0) \geq a_{sp} + a_{sp}^0 - (a_{sq} + a_{sq}^0).$$

Отсюда вытекает формула (9), поскольку $a_{sp}^0 - a_{sq}^0 = \dfrac{\alpha}{\omega}(a_{sp} - a_{sq}) = \dfrac{\alpha}{\omega}\gamma > 0$.

Таким образом, в случае 1 верна формула (9), а значит, и формула (2).

Случай 2. Пусть $t^0 \underset{A}{\bar{\geq}} t$. Тогда найдется такой индекс $s = s(t) \in N_n$, что $f_s(t^0, A) < f_s(t, A)$. Учитывая неравенства $0 < ||A^0|| \leq \alpha$ и непрерывность функции $f_s(t, A)$ в пространстве $\mathbf{R}^m$, убеждаемся в справедливости формулы (9). Следовательно, и в случае 2 формула (2) верна.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Если $t \in P^n(A)$ и $t \underset{A}{\approx} t' \underset{A}{\sim} t$, то найдется такая траектория $t^* \in P^n(A)$, что $t^* \notin \text{Ker}\,(A, P)$.

Действительно, в силу $t \underset{A}{\approx} t' \underset{A}{\sim} t$ выполняется по крайней мере одно из отношений — $t \underset{A}{\bar{\vdash}} t'$ или $t' \underset{A}{\bar{\vdash}} t$. Откуда на основании леммы 1 заключаем, что хотя бы одна из траекторий, t или t', является искомой траекторией t^*.

Введем дополнительно обозначение

$$Q^n(t, A) = \{t' \in T : t \underset{A}{\sim} t'\}.$$

Теорема 3. Если $T^* = \varnothing$, то векторная задача $Z^n(A, T)$, $n \geq 1$, T_2-устойчива тогда и только тогда, когда справедлива формула

$$\exists\, t^0 \in P^n(A) \;\; \forall\, t \in Q^n(t^0, A) \;\; (t \underset{A}{\vdash} t^0). \tag{12}$$

Доказательство. **Необходимость**. Пусть задача $Z^n(A, T)$ T_2-устойчива. Предположим противное, т.е. для всякой траектории $t \in P^n(A)$ существует такая траектория $t^* \in P^n(A)$, что $t^* \underset{A}{\bar{\vdash}} t \underset{A}{\sim} t^*$. Тогда в силу леммы 1 имеем $t \notin \text{Ker}\,(A, P)$. Следовательно, $\text{Ker}\,(A, P) = \varnothing$, т.е. в силу утверждения 1 задача $Z^n(A, T)$ не является T_2-устойчивой. Имеем противоречие.

Достаточность. Пусть выполняется формула (12). Докажем, что $\text{Ker}\,(A, P) \neq \varnothing$. Для этого достаточно показать, что $t^0 \in \text{Ker}\,(A, P)$ (см. (12)). Возьмем произвольную траекторию t и рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $t^0 \underset{A}{\sim} t$. Тогда согласно (12) имеем $t \underset{A}{\vdash} t^0$. Поэтому на основании свойства 7 убеждаемся в справедливости формулы

$$\exists\, \varepsilon = \varepsilon(t) > 0 \;\; \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon) \;\; (t^0 \underset{A+A'}{\bar{\succ}} t). \tag{13}$$

Случай 2. Пусть $t^0 \underset{A}{\tilde{\succ}} t$. Тогда ввиду $t^0 \in P^n(A)$ существует такой индекс $p \in N_n$, что $f_p(t^0, A) < f_p(t, A)$. Поэтому в силу свойства 6 найдется такое число $\varepsilon = \varepsilon(t) > 0$, что для любой возмущающей матрицы $A' \in \Omega(\varepsilon)$ выполняется неравенство $f_p(t^0, A + A') < f_p(t, A + A')$. Следовательно, верна формула (13).

В результате получаем

$$\exists\, \varepsilon^* > 0 \ \ \forall\, t \in T \ \ \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon^*) \ \ (t^0 \underset{A+A'}{\overline{\succ}} t),$$

где $\varepsilon^* = \min\,\{\varepsilon(t) : t \in T\}$, что эквивалентно формуле

$$\exists\, \varepsilon^* > 0 \ \ \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon^*) \ \ (t^0 \in P^n(A + A')) \,.$$

Следовательно, $t^0 \in \mathrm{Ker}\,(A, P)$, т.е. $\mathrm{Ker}\,(A, P) \neq \varnothing$, и потому в силу утверждения 1 задача $Z^n(A, T)$ T_2-устойчива.

Теорема 3 доказана.

Очевидно, что всякая тривиальная задача $Z^n(A, T)$ T_3-устойчива.

Для формулировки критерия T_3-устойчивости нетривиальной задачи $Z^n(A, T)$ используем множество Слейтера, т.е. множество слабо эффективных траекторий, которое задается формулой

$$Sl^n(A) = \{t \in T : \forall\, t' \in T \ \ (t \underset{A}{\overline{>}} t')\}.$$

Кроме того, положим $S^n(A) = \{t \in Sl^n(A) \setminus P^n(A) : \exists\, t' \in P^n(t, A) \ \ (t \underset{A}{\vdash} t')\}$.

Теорема 4. Если $T^* = \varnothing$, то векторная нетривиальная задача $Z^n(A, T)$, $n \geq 1$, T_3-устойчива тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$Sl^n(A) = P^n(A) \cup S^n(A). \tag{14}$$

Доказательство. **Достаточность**. Пусть справедливо равенство (14). Если $P^n(A) = Sl^n(A)$, то T_3-устойчивость задачи $Z^n(A, T)$ очевидна. Действительно, для любой траектории $t \in \overline{P}^n(A)$ существует (ввиду $t \notin Sl^n(A)$) такая траектория t', что $t \underset{A}{>} t'$. Поэтому согласно свойству 6 найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для любой возмущающей матрицы $A' \in \Omega(\varepsilon)$ выполняется бинарное отношение $t \underset{A+A'}{>} t'$, т.е. $t \in \overline{P}^n(A + A')$. Следовательно, справедливо равенство $\mathrm{Ker}\,(A, \overline{P}) = = \overline{P}^n(A)$, которое в силу утверждения 2 эквивалентно T_3-устойчивости задачи $Z^n(A, T)$.

Пусть далее $P^n(A) \neq Sl^n(A)$. Выберем произвольную траекторию $t \in \overline{P}^n(A)$ и рассмотрим следующие два возможных случая.

Случай 1. Пусть $t \in Sl^n(A) \setminus P^n(A)$. Тогда в силу (14) $t \in S^n(A)$. Поэтому найдется траектория $t' \in P^n(t, A)$, удовлетворяющая отношениям

$$t \underset{A}{\succ} t', \tag{15}$$

$$t \underset{A}{\vdash} t'. \tag{16}$$

Из (15) следует существование такого индекса $k \in N_n$, что $f_k(t, A) > > f_k(t', A)$. Отсюда, используя свойство 6, получаем

$$\exists\, \varepsilon' > 0 \ \ \forall\, A' \in \Omega(\varepsilon') \ \ (f_k(t, A + A') > f_k(t', A + A')) \,. \tag{17}$$

На основании (16) имеем

$$\exists\, \varepsilon'' > 0 \ \ \forall A' \in \Omega(\varepsilon'') \ \ (t \underset{A+A'}{\geq} t'). \tag{18}$$

Объединяя (17) и (18), получаем

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall A' \in \Omega(\varepsilon) \ \ (t \underset{A+A'}{\succ} t'), \tag{19}$$

где $\varepsilon = \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$.

Случай 2. Пусть $t \in T \setminus Sl^n(A)$. Тогда существует такая траектория $t' \in T \setminus \{t\}$, что $t \underset{A}{>} t'$. Поэтому из свойства 8 следует (19).

Таким образом, справедлива формула

$$\forall\, t \in \overline{P}^{\,n}(A) \ \exists\, \varepsilon = \varepsilon(t) > 0 \ \exists\, t' \in T \ \ \forall A' \in \Omega(\varepsilon) \ \ (t \underset{A+A'}{\succ} t').$$

Отсюда, полагая $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon(t) : t \in \overline{P}^{\,n}(A)\}$, имеем

$$\forall\, t \in \overline{P}^{\,n}(A) \ \ \forall A' \in \Omega(\varepsilon^*) \ \ (t \in \overline{P}^{\,n}(A + A')),$$

что эквивалентно равенству $\operatorname{Ker}(A, \overline{P}) = \overline{P}^{\,n}(A)$. Следовательно, в силу утверждения 2 задача $Z^n(A, T)$ T_3-устойчива.

Необходимость. Доказательство проведем методом от противного. Пусть задача $Z^n(A, T)$ T_3-устойчива, но равенство (14) не выполняется. Тогда очевидна формула

$$\exists\, t^0 \in Sl^n(A) \setminus P^n(A) \ \ \forall\, t \in P^n(t^0, A) \ \ (t^0 \underset{A}{\overline{\vdash}} t),$$

из которой следует выполнение условия леммы 2. Поэтому справедлива формула (2). Пусть A^0 — возмущающая матрица, построенная по правилу (3).

Если $t^0 \in P^n(A + A^0)$, то ввиду $t^0 \in \overline{P}^{\,n}(A)$ получаем $t^0 \notin \operatorname{Ker}(A, \overline{P})$, т.е. $\operatorname{Ker}(A, \overline{P}) \neq \overline{P}^{\,n}(A)$.

Если $t^0 \in \overline{P}^{\,n}(A + A^0)$, то в силу внешней устойчивости множества $P^n(A + A^0)$ существует траектория $t^* \in P^n(A + A^0)$ с условием

$$t^0 \underset{A+A^0}{\succ} t^*. \tag{20}$$

Легко видеть, что $t^* \in \overline{P}^{\,n}(A)$. Действительно, если бы траектория t^* была эффективной в задаче $Z^n(A, T)$, то полученное отношение противоречило бы формуле (2). Итак, $t^* \notin \operatorname{Ker}(A, \overline{P})$. Следовательно, $\operatorname{Ker}(A, \overline{P}) \neq \overline{P}^{\,n}(A)$.

Таким образом, используя утверждение 2, приходим к выводу, что задача $Z^n(A, T)$ не является T_3-устойчивой, что противоречит предположению.

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Если $T^* = \varnothing$, то векторная задача $Z^n(A, T)$, $n \geq 1$, является T_4-устойчивой тогда и только тогда, когда справедлива формула

$$\forall\, t \in P^n(A) \ \ \forall\, t' \in Q^n(t, A) \ \ (t \underset{A}{\approx} t'). \tag{21}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть задача $Z^n(A,T)$ T_4-устойчива. Допустим противное: формула (21) не выполняется, т.е. найдутся такие траектории $t, t' \in P^n(A)$, что

$$t \underset{A}{\bar{\approx}} t' \sim t.$$

Тогда на основании леммы 3 существует такая траектория $t^* \in P^n(A)$, что $t^* \notin \operatorname{Ker}(A,P)$. Из утверждения 3 вытекает, что задача не является T_4-устойчивой. Имеем противоречие.

Достаточность. Пусть справедлива формула (21). Покажем, что любая траектория $t \in P^n(A)$ принадлежит ядру $\operatorname{Ker}(A,P)$.

Пусть $t' \in T$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $t \underset{A}{\sim} t'$. Тогда из (21) получаем $t \underset{A}{\approx} t'$. Применяя свойство 9, имеем $\exists\, \varepsilon(t') > 0 \;\; \forall A' \in \Omega(\varepsilon(t'))$ $(t \underset{A+A'}{\approx} t')$. Отсюда и из свойства 10 следует $t \underset{A+A'}{\sim} t'$. В результате получаем

$$\forall t' \in Q^n(t,A) \;\; \forall A' \in \Omega(\varepsilon^*) \;\; (t \underset{A+A'}{\bar{\succ}} t'), \tag{22}$$

где $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon(t') : t' \in Q^n(t,A)\}$.

Случай 2. Пусть $t \underset{A}{\bar{\sim}} t'$. Тогда ввиду $t \in P^n(A)$ существует такой индекс $p \in N_n$, что $f_p(t,A) < f_p(t',A)$. Поэтому в силу свойства 6 найдется такое число $\varepsilon = \varepsilon(t') > 0$, что для любой возмущающей матрицы $A' \in \Omega(\varepsilon)$ выполняется неравенство $f_p(t, A+A') < f_p(t', A+A')$. Следовательно, справедлива формула

$$\forall t' \in T \setminus Q^n(t,A) \;\; \forall A' \in \Omega(\varepsilon_*) \;\; (t \underset{A+A'}{\bar{\succ}} t'), \tag{23}$$

где $\varepsilon_* = \min\{\varepsilon(t') : t' \in T \setminus Q^n(t,A)\}$.

Объединение формул (22) и (23) дает утверждение

$$\forall t \in P^n(A) \;\; \forall A' \in \Omega(\varepsilon) \;\; (t \in P^n(A+A')),$$

где $\varepsilon = \min\{\varepsilon^*, \varepsilon_*\}$. Таким образом, $\operatorname{Ker}(A,P) = P^n(A)$, и потому в силу утверждения 3 задача $Z^n(A,T)$ T_4-устойчива.

Теорема 5 доказана.

Из теорем 4 и 5 вытекает следующая теорема.

Теорема 6. При $T^* = \varnothing$ векторная нетривиальная задача $Z^n(A,T)$, $n \ge 1$, является T_5-устойчивой тогда и только тогда, когда выполняются формулы (14) и (21).

Поскольку всякая тривиальная задача $Z^n(A,T)$ T_3-устойчива, из теоремы 5 вытекает следующая теорема.

Теорема 7. При $T^* = \varnothing$ векторная тривиальная задача $Z^n(A,T)$, $n \ge 1$, является T_5-устойчивой тогда и только тогда, когда справедлива формула (21).

Введем обозначение для множества Смейла (множества строго эффективных траекторий) задачи $Z^n(A,T)$:

$$Sm^n(A) = \{t \in T : \; \forall t' \in T \;\; (t \underset{A}{\bar{\geq}} t')\}.$$

Из теорем 3–7 непосредственно получаем следующие достаточные признаки устойчивости задачи $Z^n(A,T)$ в случае, когда множество T не содержит одноэлементных траекторий ($T^* = \varnothing$).

Следствие 1. Векторная задача $Z^n(A,T)$ T_2-устойчива, если $Sm^n(A) \neq \varnothing$.

Следствие 2. Векторная задача $Z^n(A,T)$ T_3-устойчива, если $P^n(A) = Sl^n(A)$.

Следствие 3. Векторная задача $Z^n(A,T)$ T_4-устойчива, если $P^n(A) = Sm^n(A)$.

Следствие 4. Векторная задача $Z^n(A,T)$ T_5-устойчива, если $P^n(A) = Sm^n(A) = Sl^n(A)$.

Следствие 5. Векторная задача $Z^n(A,T)$ T_2- и T_4-устойчива, если $|P^n(A)| = 1$.

В скалярном случае ($n = 1$, $A \in \mathbf{R}^m$) теоремы 3–7 преобразуются в следующие утверждения (по-прежнему предполагается, что $T^* = \varnothing$).

Следствие 6. Скалярная задача $Z^1(A,T)$ T_2-устойчива тогда и только тогда, когда $\exists\, t^0 \in P^1(A)$ $\forall\, t \in P^1(A)$ $(N_1(t,A) \supseteq N_1(t^0, A))$.

Следствие 7. Скалярная задача $Z^1(A,T)$ T_3-устойчива при любом векторе $A \in \mathbf{R}^m$.

Следствие 8. Для скалярной задачи $Z^1(A,T)$ следующие утверждения эквивалентны:

- задача $Z^1(A,T)$ T_4-устойчива;
- задача $Z^1(A,T)$ T_5-устойчива;
- $\forall\, t, t' \in P^1(A)$ $(N_1(t,A) = N_1(t', A))$.

В заключение отметим, что полученные в разд. 3 результаты свидетельствуют о том, что известные (см., например, [4–6, 17–19]) необходимые и достаточные условия T_2- – T_5-устойчивости векторных дискретных задач с линейными и квадратичными критериями являются лишь достаточными условиями соответствующих типов устойчивости рассмотренной векторной минимаксной задачи с диапазонными критериями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — 368 с.
2. Федоров В.В. Численные методы максимина. — М.: Наука, 1979. — 280 с.
3. Minimax and applications / Eds. D.-Z. Du, P.M. Pardalos. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. — 308 p.
4. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — Киев: Наук. думка, 1995. — 170 с.
5. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. — Киев: Наук. думка, 2003. — 261 с.
6. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Исследование вопросов устойчивости задач дискретной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 1993. — № 3. — С. 78–93.

7. Sotskov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.N. Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. — 1995. — **58**, N 2. — P. 169–190.

8. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. — 2002. — **51**, N 4. — P. 645–676.

9. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А., Степанишина Ю.В. Вопросы устойчивости векторных дискретных задач с параметрическим принципом оптимальности // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 4. — С. 155–166.

10. Libura M., Nikulin Yu. Stability and accuracy functions in multicriteria combinatorial optimization problem with Σ-MINMAX and Σ-MINMIN partial criteria // Control and Cybernetics. — 2004. — **33**, N 3. — P. 511–524.

11. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. О квазиустойчивости траекторных задач векторной оптимизации // Мат. заметки. — 1998. — **63**, вып. 1. — С. 21–27.

12. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г., Леонович А.М. Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 2. — С. 79–92.

13. Емеличев В.А., Гуревский Е.Е. О ядре устойчивости многокритериальной комбинаторной минимаксной задачи // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — **15**, № 5. — С. 6–19.

14. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. Критерии устойчивости векторных комбинаторных задач «на узкие места» в терминах бинарных отношений // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 103–111.

15. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Там же. — 2008. — № 3. — С. 142–148.

16. Emelichev V.A., Kuzmin K.G., Korotkov V.V. On stability of vector minimax problem // Abstracts of the Intern. Conf. «Problems of decision making under uncertainties» (PDMU-2009), Skhidnytsia. — Kyiv: Taras Shevchenko Nat. Univ. of Kyiv, 2009. — P. 23–25.

17. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 1. — С. 63–70.

18. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Там же. — 2005. — № 4. — С. 90–100.

19. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования // Там же. — 2006. — № 5. — С. 63–72.

Поступила 06.10.2009