УДК 519.21

П.С. КНОПОВ, А.С. САМОСЁНОК

О НЕКОТОРЫХ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Ключевые слова: *марковские случайные поля, стохастические процессы, модель Изинга, гиббсовские поля.*

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЩИЕ СВОЙСТВА МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ГРАФАХ

Для систем с локально взаимодействующими координатами структура взаимодействия определяется графом $\Gamma=(V,B)$ со множеством вершин V и множеством ребер B. Пусть $\{k,j\}$ — ребро графа, соединяющее вершины k и j. Окрестность вершины k — это множество вершин $N(k)=\{j:\{k,j\}\in B\}$, полная окрестность ее — $\widetilde{N}(k)=N(k)\cup\{k\}$, т.е. окрестность вершины k и сама вершина k. Для произвольной $K\subset V$ определим окрестность $N(K)=$ $=\bigcup\limits_{k\in K} N(k)-K$ и полную окрестность $\widetilde{N}(K)=N(K)\cup K$. Для каждой вершины $i\in V$ пусть $(X_i,\mathbf{X}_i)$, $X_i\neq\varnothing$, — некоторое компактное метрическое пространство с борелевской σ-алгеброй $\mathbf{X}_i$. X_i (соответственно $(X_i,\mathbf{X}_i)$) называется локальным пространством в вершине i. Далее поставим в соответствие $X:=\underset{i\in V}{\times}X_i$ σ-алгебру-произведение $\mathbf{X}=\sigma\{\underset{i\in V}{\times}\mathbf{X}_i\}_i$, сгенерированную $\underset{i\in V}{\times}\mathbf{X}_i$. X (соответственно $(X,\mathbf{X})$) назовем глобальным пространством состояний системы. Для произвольного подмножества вершин $K\subseteq V$ маргинальный вектор состояния x обозначим $x_K=(x_k,k\in K)\in X_K=\underset{i\in K}{\times}X_i$.

Определим для $K\subset V$ σ-поле $\mathbf{X}_{\mathrm{K}}=\sigma\{\underset{i\in K}{\times}\mathbf{X}_i\}=\underset{i\in K}{\otimes}\mathbf{X}_i$, сгенерированное $\underset{i\in K}{\times}\mathbf{X}_i$; таким образом, $X_V=X$.

В дальнейшем везде будем рассматривать фиксированное вероятностное пространство $(\Omega,\mathfrak{F},P)$, на котором определены все случайные величины. Введем некоторые определения и понятия, используемые в дальнейшем [1–4].

Определение 1 (случайные поля). 1. Случайная величина $\xi:(\Omega,\mathfrak{F},P)\to$ $\to(X,\mathbf{X})=(\underset{i\in V}{\times}X_i,\underset{i\in K}{\otimes}\mathbf{X}_i)$ называется случайным полем над $\Gamma=(V,B)$ (или просто случайным полем над V). Маргинальные случайные величины со значениями в пространстве X_K обозначим ξ_K. Для $K=\{k\}$ будем писать ξ_k.

2. Случайное поле ξ над (V,B) является марковским, если для произвольного $k\in V$ имеет место

$$P(\xi_k\in C_k|\xi_{V-\{k\}}=x_{V-\{k\}})=P(\xi_k\in C_k|\xi_{N(k)}=x_{N(k)})\ \ \forall x\in X,\ C_k\in X_k, \quad (1)$$

где $P(\xi_k\in C_k|\xi_{N(k)}=x_{N(k)})$ (соответственно $P(\xi_k\in C_k|\xi_{V-\{k\}}=x_{V-\{k\}})$) — условная вероятность на $(X_k,\mathbf{X}_k)$ при условии $\xi_{N(k)}=x_{N(k)}$ (соответственно $\xi_{V-\{k\}}=x_{V-\{k\}}$).

Во многих задачах, связанных с биологическими, экономическими и инженерными реализациями, случайные поля описывают мгновенное состояние системы для некоторого фиксированного времени. Эволюция такой системы во времени описывается стохастическим процессом η с одномерным временем. В этом случае пишем $\xi=(\xi^t)$, чтобы подчеркнуть зависимость от времени.

Пусть t принимает дискретные значения $t = 0, 1, \ldots$ Нижний индекс k в ξ_k^t обозначает вершину k, таким образом, ξ_k^t обозначает случайное значение для времени t в вершине k некоторого векторнозначного процесса $\xi = (\xi^t : t = 0, 1, \ldots)$ с пространством состояний $(X, \mathbf{X})$. В этом разделе рассматриваются только марковские процессы с дискретным временем.

Определение 2 (локальные переходные вероятности). Пусть $\xi = \{\xi^t, t = 0, 1, \ldots\}$, $\xi^t : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \to (X, \mathbf{X})$ — марковский процесс с дискретным временем и пространством состояний $(X, \mathbf{X})$. Переходные вероятности ξ называются локальными, если

$$P\{\xi_k^{t+1} \in C_k \,|\, \xi^t = x^t, \ldots, \xi^0 = x^0\} = P\{\xi_k^{t+1} \in C_k \,|\, \xi_{\widetilde{N}(k)}^t = x_{\widetilde{N}(k)}^t\}$$

$$\text{для } k \in V, \quad x^0, \ldots, x^{t+1} \in X, \quad C_k \in X_k, \tag{2}$$

справедливо $P^{(\xi^t, \ldots, \xi^0)}$-почти наверное, т.е. переходная вероятность в вершине k зависит только от состояния процесса в ее полной окрестности в предыдущий момент времени. Марковский случайный процесс $\xi = (\xi^t : t = 0, 1, \ldots)$ с локальными переходными вероятностями, удовлетворяющими условию (2), также будем называть марковским случайным полем.

В определении 1 понятие марковости предполагает, что поведение случайного поля на некотором подграфе K графа Γ при фиксированном значении поля в окрестности вершин $N(k) = \{j : \{k, j\} \in B\}$ не зависит от поведения поля вне подграфа K. В определении 2 понятие марковости связано с тем, что один из аргументов поля интерпретируется как время, а остальные являются вершинами графа. При этом такое поле можно, конечно, рассматривать как обычный марковский процесс, состояние которого в каждый момент времени — случайное поле. Однако такая интерпретация не всегда адекватна реальным явлениям. Более плодотворным является понятие марковского поля как марковского процесса с локальным взаимодействием в смысле определения 2. Типичная ситуация для таких процессов следующая: пусть система состоит из конечного или бесконечного числа частиц, развитие которых при отсутствии взаимодействия описывается независимыми цепями Маркова. На эволюцию этой системы налагается некоторая связь. Поэтому эволюция каждой частицы не будет марковской, хотя эволюция всей системы и имеет свойство марковости, но это будет достаточно сложный марковский процесс. В [5] показано, что понятия марковости в смысле определений (1) и (2) тесно связаны между собой и определение марковости в смысле (2) путем так называемого симметричного удвоения, описанного в [5], можно свести к определению марковости в смысле определения (1).

Определение 3 (локальные и синхронные переходные вероятности). Далее будем рассматривать марковские случайные поля, у которых переходные вероятности ξ синхронные, т.е. обладают следующими свойствами:

$$P\{\xi_K^{t+1} \in C_K \,|\, \xi^t = x^t\} = \prod_{k \in K} P\{\xi_k^{t+1} \in C_k \,|\, \xi^t = x^t\} \;\; P^{\xi^t}\text{-почти наверное,}$$

$$\forall K \subset V, \quad x^t \in X, \quad C_K = \mathop{\times}_{k \in K} C_k \in \mathbf{X}_K. \tag{3}$$

Если переходные вероятности случайного процесса ξ удовлетворяют условиям (2), (3), то он называется марковским процессом с локально взаимодействующими и синхронными компонентами.

Определение 4 (пространства управления, локальные ограничения) [4]. Последовательность моментов принятия решения (моментов контроля) — это временная шкала N.

1. Пространство управлений (множество управлений), которое используется в моменты управления, определяется как $\mathbf{A} = \underset{i \in V}{\times} A_i$ над Г, где A_i — множество возможных управлений (решений) для вершины *i*. Мы считаем, что A_i — польское пространство с борелевской σ-алгеброй A_i, $\mathbf{A}$ — борелевское произведение σ-алгебр над A.

2. Если для игрока, который принимает решение, в вершине *i* в момент времени *t* с историей $h^t \in H^t$ множество управлений $A_i^t(h^t) \subseteq A_i$ ограничено, называем $A_i^t(h^t)$ множеством локально допустимых управлений (решений) в момент времени T с историей $h^t \in H^t$.

3. Будем считать, что определенные таким образом отображения в множества

$$A_i^t : H^t \to 2^{A_i} - \{\varnothing\}, \quad h \to A_i^t(h), \quad i \in V,$$

зависят только от локальной истории и измеримы по Борелю.

Здесь для заданной истории $h^t = (x^0, a^0, x^1, a^1, x^2, \ldots, x^{t-1}, a^{t-1}, x^t) \in H^t$ локальная история $h_i^t \in H_i^t$ в вершине i определяется следующим образом:

$$h_i^t = \left(x^0_{\widetilde{N}(i)}, a_i^0, x^1_{\widetilde{N}(i)}, a_i^1, x^2_{\widetilde{N}(i)}, \ldots, x^{t-1}_{\widetilde{N}(i)}, a_i^{t-1}, x^t_{\widetilde{N}(i)} \right) \in H_i^t.$$

К H_i^t добавляется проекция $\mathbf{H}_i^t$ произведения σ-алгебры на пространство $(X_{\widetilde{N}(i)} \times A_i)^t \times X_{\widetilde{N}(i)}$. Считаем также, что множества $K_i^t = \{(h_i^t, a_i) : h_i^t \in H_i^t,$ $a_i \in A_i^t(h^t)\}$ содержат граф измеримого отображения и измеримы по Борелю в проекции произведения σ-алгебры $K_i^t := K_i^t \cap (H_i^t \times \mathrm{A}_i)$.

Далее множества

$$\kappa_i^t = \{(x_{\widetilde{N}(i)}, a_i) : x_{\widetilde{N}(i)} \in X_{\widetilde{N}(i)}, \ a_i \in A_i^t(x_{\widetilde{N}(i)})\}$$

считаются измеримыми по Борелю множествами пространства $X_{\widetilde{N}(i)} \times A_i$, а $\kappa^t = \underset{i \in V}{\times} \kappa_i^t$ — измеримыми по Борелю в пространстве $\widetilde{X} \times A$, $\widetilde{X} = \underset{i \in V}{\times} X_{\widetilde{N}(i)}$ и $\widetilde{\mathbf{X}} = \sigma\{\underset{i \in V}{\times} X_{\widetilde{N}(i)}\}$.

Если отображение A_i^t не зависит от t, будем писать $\kappa_i := \kappa_i^t$, $t \in \mathrm{N}$, и $\kappa = \kappa^t$, $t \in \mathrm{N}$.

Определение 5 (синхронные стратегии в произведении пространств). Пусть α_i^t — решение, которое принял игрок в вершине i в момент времени t, $\alpha^t := (\alpha_i^t : i \in V)$ — общий вектор решений в момент времени t.

1. Рандомизированная стратегия (политика) $\pi = (\pi^t : t \in \mathrm{N})$ для управляемой системы с взаимодействующими компонентами и пространством управлений определяется как вектор координатных управлений $\pi = (\pi_i, i \in V)$, где для вершины i $\pi_i = \{\pi_i^0, \ldots, \pi_i^t, \ldots\}$ — последовательность вероятностей перехода $\pi_i^t = \pi_i^t(\cdot \mid x^0, a^0, \ldots, x^{t-1}, a^{t-1}, x^t)$. Таким образом, π_i^t является вероятностной мерой на $(A_i, \mathbf{A}_i)$ для произвольных $(x^0, a^0, \ldots, x^{t-1}, a^{t-1}, x^t)$, которые измеримо зависят от истории $h^t = (x^0, a^0, \ldots, x^{t-1}, a^{t-1}, x^t)$ системы до *t*-го перехода. Таким образом, для всех $B_i \in A_i$ имеем

$$P(\alpha_i^t \in B_i \mid \xi^0 = x^0, \ \alpha^0 = a^1, \ldots, \xi^{t-1} = x^{t-1}, \alpha^{t-1} = a^{t-1}, \ \xi^t = x^t) =$$
$$= \pi_i^t(B_i \mid x^0, \ a^0, \ldots, x^{t-1}, \ a^{t-1}, \ x^t). \tag{4}$$

2. Одновременно с синхронностью переходов и локальностью ядер перехода мы всегда считаем, что игроки, принимающие решения, расположены в вершинах, действуют условно независимо от истории системы. Отсюда следует, что

$$P(\alpha^t \in \times B_i | \xi^0 = x^0, \ \alpha^0 = a^0, \ldots, \xi^{t-1} = x^{t-1}, \alpha^{t-1} = a^{t-1}, \xi^t = x^t) =$$

$$= \prod_{i \in V} P(\alpha^t \in B_i | \xi^0 = x^0, \ \alpha^0 = a^0, \ldots, \xi^{t-1} = x^{t-1}, \ \alpha^{t-1} = a^{t-1}, \ \xi^t = x^t) =$$

$$= \prod_{i \in V} \pi_i^t (B_i | x^0, \ a^0, \ldots, x^{t-1}, \ a^{t-1}, x^t), \quad B_i \in A_i, \quad a^s \in A, \quad x^s \in X. \qquad (5)$$

Определение 6 (локальные стратегии). 1. Пусть в моменты перехода $t = 0, 1, \ldots$ множества допустимых решений зависят от локальной истории только в соответствии с определением 3 и решения α_i^t в вершине i принимаются в соответствии с вероятностью π_i^t, основываясь только на локальной истории $h_i^t = (x^0_{\widetilde{N}(i)}, a_i^0, \ldots, x^{t-1}_{\widetilde{N}(i)}, a_i^{t-1}, x^t_{\widetilde{N}(i)})$ состояний окрестности $\widetilde{N}(i)$ вершины i и на предыдущем решении в вершине i. Если $\pi_i^t (A_i^t (h_i^t) | h_i^t) = 1$, то π_i^t называется локально допустимой, и последовательность вероятностей перехода (решений) $\pi_i = \{\pi_i^t, t \in \mathrm{N}\}$ называется допустимой локальной стратегией для вершины i.

Будем называть $\pi = (\pi_i, \ i \in V)$ допустимой локальной стратегией для модели принятия решения.

2. Допустимая локальная стратегия $\pi = (\pi_i, i \in V)$ называется допустимой локальной марковской стратегией, если

$$\pi_i^t \left(| x^0_{\widetilde{N}(i)}, a_i^0, \ldots, x^{t-1}_{\widetilde{N}(i)}, a_i^{t-1}, x^t_{\widetilde{N}(i)} \right) = \pi_i^t \left(| x^t_{\widetilde{N}(i)} \right), \quad i \in V.$$

Отметим, что пока мы оперируем марковскими стратегиями, можем допускать, что $A_i^t (h_i^t)$ зависит от h_i^t только через $x^t_{\widetilde{N}(i)}$; эта ограниченная зависимость выражается формулой $A_i^t (h_i^t) =: A_i^t (x^t_{\widetilde{N}(i)})$.

3. Допустимая локальная марковская стратегия $\pi = (\pi_i, i \in V)$ называется допустимой локальной стационарной (марковской) стратегией, если $\pi_i^{t'} (\cdot | x_{\widetilde{N}(i)}) = \pi_i^{t''} (\cdot | x_{\widetilde{N}(i)})$, $i \in V$ для любых t', t'' и всех x.

4. Допустимая локальная стационарная стратегия $\pi = (\pi_i, \ i \in V)$ называется допустимой локальной стационарной детерминированной (нерандомизированной) стратегией, если $\pi_i (\cdot | x_{\widetilde{N}(i)})$, $i \in V$, является одноточечной мерой на $A_i^t (x_{\widetilde{N}(i)})$, $i \in V$, для любых x.

Класс всех допустимых локальных стратегий обозначается LS; подкласс допустимых локальных марковских стратегий — LS_M. Класс допустимых локальных стационарных стратегий $\pi^t = \pi^{t'}$ для любых $t, t' \in \mathrm{N}$ обозначим LS_S. Класс допустимых локальных детерминированных («чистых») стратегий будем обозначать LS_P, класс допустимых локальных стационарных детерминированных стратегий — LS_D.

Замечание 1. Имеют место такие соотношения:

$$LS_D \subseteq LS_S \subseteq LS_M \subseteq LS \text{ и } LS_D \subseteq LS_P \subseteq LS.$$

В данном случае логично считать, что контроль над зависимым от времени случайным полем ξ влияет на эволюцию системы, которая управляется переходными вероятностями

$$P\{\xi^{t+1} \in C^{t+1} | \xi^t = y, (\alpha_i^t : i \in V) = a\} = Q(C^{t+1} | y, a),$$

где $Q(\cdot|\cdot,\cdot)$ — ядро перехода от $X \times A$ до X.

Определение 7. Пара (ξ, π) называется управляемым процессом с локально взаимодействующими синхронными компонентами по отношению к конечному графу взаимодействия $\Gamma = (V, B)$, если $\xi = (\xi^t,\ t \in \mathrm{N})$ — стохастический процесс с пространством состояний $X = \underset{i \in V}{\times} X_i$, $\pi = (\pi_i : i \in V)$ — допустимая локальная стратегия, а переходы ξ определяются следующим образом: для любого t $P(\xi^0, \alpha^0, \ldots, \xi^{t-1}, \alpha^{t-1}, \xi^t, \alpha^t)$-почти наверное для любых $K \subseteq V$, $C_j \in X_j$, $j \in K$, $y \in X$, $a_j \in A_j(y_{\widetilde{N}(j)})$:

$$P\{\xi_K^{t+1} \in C_K | \xi^0 = x^0, \alpha^0 = a^0, \ldots, \xi^{t-1} = x^{t-1}, \alpha^{t-1} = a^{t-1}, \xi^t = y, \alpha^t = a\} =$$

$$= \prod_{j \in K} P\{\xi_j^{t+1} \in C_j | \xi_{\widetilde{N}(j)}^t = y_{\widetilde{N}(j)}, \alpha_j^t = a_j\} =$$

$$= \prod_{j \in K} Q_j \{C_j | y_{\widetilde{N}(j)}, a_j\} = Q_K \{C_K | y, a\}. \tag{6}$$

Если $K = V$, будем писать $Q_V(C_V | y, a) = Q(C | y, a)$.

Марковское ядро $Q = \prod_{j \in V} Q_j$ называется локальным и синхронным.

2. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ НА ГРАФАХ С КОНЕЧНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ СОСТОЯНИЙ И УПРАВЛЕНИЙ

Для конечного множества состояний соотношения (1)–(3) перейдут в следующие:

$$P(\xi_k = y_k | \xi_{V-\{k\}} = x_{V-\{k\}}) = P(\xi_k = y_k | \xi_{N(k)} = x_{N(k)}) \ \ \forall x \in X,\ \ y_k \in X_k, \tag{7}$$

$$P\{\xi_k^{t+1} = y_k | \xi^t = x^t, \ldots, \xi^0 = x^0\} = P\{\xi_k^{t+1} = y_k | \xi_{\widetilde{N}(k)}^t = x_{\widetilde{N}(k)}^t\}$$

$$\text{для } k \in V,\ \ x^0, \ldots, x^{t+1} \in X,\ \ y_k \in X_k, \tag{8}$$

$$P\{\xi_K^{t+1} = y_K | \xi^t = x^t\} = \prod_{k \in K} P\{\xi_k^{t+1} = y_k | \xi^t = x^t\},$$

$$\forall K \subset V,\ \ x^t \in X,\ \ y_K = \underset{k \in K}{\times} X_k \in \mathbf{X}_K \tag{9}$$

выполняется P^{ξ^t}-почти наверное.

Как и ранее, если выполняются соотношения (8)–(9), то будем говорить, что задан марковский процесс с локально взаимодействующими локальными компонентами, т.е. зависящее от времени марковское случайное поле с дискретным фазовым пространством.

Обозначим Q переходную функцию изучаемого марковского поля, а $\bar{q}$ его компоненты

$$q_{N(k)}(x_k) = P\{\xi_k^{t+1} = x_k | \xi_{N(k)}^t = x_{N(k)}\},$$

причем предполагаем, что $q_{N(k)}(x_k)$ не зависит от t.

Естественно обозначить Q и линейный оператор, действующий на множестве вероятностных мер $M = \{\xi\}$, порожденных марковскими случайными полями ξ^t. Тогда если η — некоторая начальная мера, то $\xi^t = \eta Q^t$.

Далее остановимся на исследовании предельного поведения ξ^t. Прежде всего заметим, что в случае конечного V и невырожденности Q существует единственная инвариантная мера и для произвольного η $\xi^t \to \xi$ при $t \to \infty$, выражающая свойство эргодичности ξ^t. В случае бесконечного V это не всегда так. Требуются дополнительные условия существования эргодического распределения. Однако и в случае существования эргодического распределения или единственной инвариантной меры ее поиск часто сопряжен значительными трудностями. Существенно упрощается эта задача при наличии свойства обратимости. Остановимся на этом подробнее, предварительно введя ряд используемых в дальнейшем понятий.

Обозначим $P\{\xi^{t+1} = x \mid \xi^t = y\} = p(x, y)$.

Определение 8. Будем говорить, что для переходных вероятностей $p(x, y)$ существует инвариантная мера π_X, если она неотрицательна, не обращается тождественно в нуль и удовлетворяет условию

$$\sum_{x \in X} p(x, y)\pi_x = \pi_y, \quad y \in X. \tag{10}$$

Приведем определение обратимости марковского процесса.

Определение 9 [6]. Случайное поле ξ^t называется обратимым, если для всех t и $A, B \in X$

$$P\{\xi^t \in A, \xi^{t+1} \in B\} = P\{\xi^t \in B, \xi^{t+1} \in A\}.$$

Это определение эквивалентно следующему.

Определение 10 [6]. Марковское случайное поле с дискретным временем или марковская цепь со множеством состояний X называются обратимыми, если для всех x и $y \in X$

$$\pi_x p(x, y) = \pi_y p(y, x). \tag{11}$$

Очевидно, что обратимость цепи можно интерпретировать как самосопряженность линейного оператора, порождающего данную сложную цепь Маркова. Известно, что симметричность или самосопряженность этого оператора во многих случаях помогает решить ряд проблем, в частности найти финальные или эргодические вероятности π_x. Также в случае, когда мера π обратима, тогда она и инвариантна, что легко видеть, просуммировав равенство (11) по всем $x \in X$. Очевидно также, что система (11) значительно проще, чем система (10), что намного облегчает нахождение величины π_x.

Известно, что во многих случаях марковские цепи имеют свойство обратимости. Однако условие (11) налагает достаточно сильные условия на переходные вероятности $p(x, y)$. Например, в случае неразложимости цепи и нетождественно равной нулю меры π функции $p(x, y)$ должны быть строго положительными. Рассмотрим одно достаточно общее условие обратимости неразложимой цепи Маркова и укажем конструкцию нахождения меры π_x.

Теорема 1 [6]. Пусть цепь Маркова неразложима. Тогда обратимая мера существует в том и только в том случае, когда при всех $n \geq 1$ и любом выборе состояний $x_1, \ldots, x_n \in X$ и $x_{n+1} = x_1$ выполнено соотношение

$$\prod_{i=1}^{n} P(x_i, x_{i+1}) = \prod_{i=1}^{n} P(x_{i+1}, x_i).$$

При этом с точностью до умножения на константу обратимая мера единственна и задается следующим образом: зафиксируем $x_0 \in X$ и пусть $X^0 = \{x_0\}$,

$$X^{n+1} = \left\{ x \in X \setminus \bigcup_{k=0}^{n} X^k : p(x, y) > 0 \text{ для всех } y \in \bigcup_{k=0}^{i} X^k \right\}.$$

Тогда полагаем $\pi_{X_0} = 1$ и $\pi_x = \dfrac{p(y, x)}{p(x, y)} \pi_y$ при $x \in X^{n+1}$, $y \in \bigcup\limits_{k=0}^{n} X^k$ и $p(x, y) > 0.$

Сформулируем утверждения, касающиеся описания всех обратимых марковских случайных полей со значениями в X, заданных на графе $\Gamma = (V, B)$.

В дальнейшем каждому стационарному процессу (полю) ξ на (Γ, X) с переходной функцией Q и инвариантной мерой ξ сопоставлена мера ξ, для которой при любых $K \subset V_1$, $\overline{N}(\overline{K}) \subset J \subset V_0$

$$P\{\xi_K^{t+1} = y_K \,|\, \xi_J^t = x_J\} = \xi(y_K \,|\, x_J), \quad P\{\xi_J^t = x_J\} = \eta(x_J) = \xi(x_J),$$

где $\xi(y_K) = P\{\eta_k = y_k,\ k \in K\}$.

Далее будет установлена связь между марковостью случайного поля, понятием гиббсовского поля и условиями обратимости для них.

Сформулируем некоторые определения [5].

Определение 11. Переходную функцию Q на (Γ, X) будем называть гиббсовской с парным потенциалом u, если

$$q_{N(k)}(y_k) = q_k(y_k / x_{N(k)}) = = \frac{\exp\left[-u_k(y_k) - \sum\limits_{j \in N(k)} U_{kj}(y_k, x_j)\right]}{\sum\limits_{y \in X} \exp\left[-u_k(y_k) - \sum\limits_{j \in N(k)} U_{kj}(y_k, x_j)\right]}. \tag{12}$$

Определение 12. Потенциалом Гиббса на (Γ, X) называется совокупность функций $U_C : X^C \to R$, определенных для всевозможных полных подграфов С графа Г.

Определение 13. Для данного потенциала Гиббса u определим энергию

$$U(x_K) = \sum_{k \in K} U_k(x_k), \quad K \subset V.$$

Пусть $U(x_K / x_{J-K}) = U(x_J) - U(x_K)$.

Определение 14. Случайное поле ξ на (Γ, X) называется полем Гиббса с потенциалом U, если для любых $K, J \subset \widetilde{V}$, где $\widetilde{V}$ — множество всех подмножеств конечного графа V, $N(K) \subset J$, $x_J \subset X^J$, выполняется соотношение

$$\xi(X_K / X_{J-K}) = \frac{\exp\{-U(X_K / X_{J-K}\}}{\sum\limits_{y_K \subset X^K} \exp\{-U(y_K / X_{J-K}\}}.$$

По теореме Аверинцева [1] любое невырожденное марковское случайное поле на (Γ, X) является гиббсовским.

В [5] показано, что каждому стационарному марковскому полю на (Γ, X) или стационарному марковскому процессу с локальным взаимодействием соответствует некоторое марковское (в смысле определения 1) случайное поле ξ, построенное с помощью симметричного удвоения графа $\Gamma = (V, B)$. Этому случайному полю ξ в силу изложенного выше соответствует некоторое гиббсовское случайное поле. Поэтому, возвращаясь к проблеме обратимости марковского процесса с локальным взаимодействием, достаточно исследовать условия обратимости гиббсовского поля. С помощью этих фактов в [5] доказаны следующие утверждения.

Теорема 2. Для того чтобы среди стационарных марковских процессов с локальным взаимодействием с данной невырожденной переходной функцией Q существовал хотя бы один обратимый, необходимо и достаточно, чтобы Q была гиббсовской с некоторым парным потенциалом u.

Теорема 3. Если случайное поле на (Γ, X) обратимо и его переходная функция Q гиббсовская с потенциалом $\widetilde{u}$, то его инвариантная мера ξ гиббсовская с потенциалом $\breve{u}$ и определяется равенством

$$\breve{U}_k(X_k) = U_k(x_k),$$

$$\breve{u}_{N(k)}(x_{N(k)}) = \ln \sum_{y_k \in X_k} \exp(-U(y_k / x_{N(k)})).$$

Рассмотрим такие предположения о структуре управления [4].

Предположение 1. 1. Множества допустимых управлений независимы от времени, т.е. множество A^t из определений 1–4 не зависит от t и мы имеем $A^t(x) = A(x) \subseteq A$ для произвольных $t \in \mathrm{N}$.

2. Допустимым множеством управлений для вершин $i \in V$ и конфигурации (состояния) системы $x \in X$ являются множества $A_i(x)$ и $A(x) = \prod_{i \in V} A_i(x)$.

Введем функцию затрат. Если во время $t \in \mathrm{N}$ система находится в состоянии $\xi^t = x^t$ и принято решение об управлении $\alpha^t = a^t$, то система несет потери $r(x^t, a^t) \geq 0$. Тогда средние ожидаемые расходы за время T при начальных значениях $\xi^0 \to x^0$ и стратегии π равны:

$$Q_T^\pi(x^0) = E_{x^0}^\pi \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} r(\xi^t, \alpha^t) := E_{x^0}^\pi \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} r(\xi^t, \alpha^t), \tag{13}$$

где $E_{x^0}^\pi$ — математическое ожидание, которое соответствует управляемому процессу (ξ, π) при $\xi^0 = x^0$.

Проблема заключается в том, чтобы найти стратегию π, которая будет минимизировать средние ожидаемые расходы при $T \to \infty$:

$$R_{x^0}^\pi = \limsup_{T \to \infty} Q_T^\pi(x^0). \tag{14}$$

Пусть $\rho(x^0) = \inf_{\pi \in LS_P} R_{x^0}^\pi$ — значение, которое достигаются при оптимальной стратегии.

Определение 15. Стратегия $\pi \in LS_P$ (класса допустимых локальных детерминированных («чистых») стратегий) называется оптимальной, если $\rho(x^0) = R_{x^0}^\pi$ для любого $x^0 \in X$.

Теорема 4. Рассмотрим управляемый процесс (ξ, α) с локально взаимодействующими синхронными компонентами относительно графа взаимодействия $\Gamma = (V, B)$ с конечным пространством состояний $\mathbf{X}$ для ξ и конечным пространством управлений А. Пусть множества допустимых управлений $A^t(\cdot)$ не зависят от t. Тогда в классе LS_P допустимых детерминированных локальных стратегий существует единственная оптимальная стратегия.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть A — компактное метрическое пространство, функция $F: X \to 2^A$ непрерывна и существует такая неотрицательная мера μ на $(X, \mathbf{X})$ с $\mu(X) > 0$, что $\mu(C) \leq Q(C | x, a)$, $C \in X$, $(x, a) \in \Pi$.

Далее предположим следующее:

1) функция $r(x, a)$, $(x, a) \in \kappa$, непрерывна;

2) вероятность перехода $Q(\cdot | x, a)$, $(x, a) \in \kappa$, слабо непрерывна.

Тогда на LS_D существует оптимальная стратегия π. Функцию $\pi: X \to A$ можно выбрать из класса Бера 1.

3. НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ, МОДЕЛИРУЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ГРАФАХ

3.1. Марковские модели поведения систем с конкурирующими технологиями [4, 7]. Пусть $\Gamma = (V, B)$ — локально конечный граф со множеством вершин V и множеством ребер B. Множество вершин означает множество организаций (или фирм), а множество ребер — множество взаимодействий между организациями. Пусть $X_i = \{x_i^1, \ldots, x_i^n\}$ — множество состояний элементов x_i, т.е. каждой организации i соответствует некоторое конечное множество значений. В частности, каждый элемент множества X_i может соответствовать принятию i-й фирмой того или иного стандарта или технологии. Пусть $X = \prod_{i=V} X_i$. На (Γ, X) задано случайное поле ξ или вероятностная мера, соответствующая полю ξ. Пусть $N(k)$ — окрестность точки k или множество соседей точки k, т.е. множество организаций, связанных ребрами с k-й организацией. Естественно предполагать, что решение x, принимаемое k-й организацией в каждый момент времени, зависит от решений, принимаемых другими организациями в предыдущие моменты времени. Марковость в определении 2 означает, что это решение зависит лишь от решений в предыдущий момент времени, принадлежащих окрестности $N(k)$ организации k. Это естественное предположение, которое, как правило, выполняется в реальных системах. Конечно, можно привести различные модификации этой задачи, например, считая время между двумя последовательными моментами принятия решений непрерывным, распределенным по показательному закону. Эта модель рассматривалась в [7], но в данной работе будем рассматривать лишь случай дискретного времени.

Далее покажем, что если в каждый момент времени фирма может использовать лишь два стандарта или две технологии, данную модель удобно описать с помощью стохастической модели Изинга, широко используемой и достаточно изученной в статистической физике [8, 9]. Поэтому предварительно сформулируем определение модели Изинга, а также некоторые известные факты.

Определение 16. Рассмотрим граф $\Gamma = (V, B)$. Всякую функцию $\sigma_V = \{\sigma_k, k \subset V\}$, определенную на Γ и принимающую значения ± 1, будем называть конфигурацией на Γ. Определим функцию

$$U_V(\sigma_V) = \left(h \sum_{k \in V} \sigma_k + \beta \sum_{k \in V} \sum_{k' \in N(k)} \sigma_\kappa \sigma_{k'} \right), \tag{15}$$

являющуюся энергией конфигурации σ_V. Физическую систему, определяемую соотношением (15), с фазовым пространством Ω_V, состоящим из всех модификаций σ_V, и энергией конфигураций, будем называть моделью Изинга.

Положим вероятность конфигурации σ_V равной

$$P_V(\sigma_k) = A_V^{-1} \exp\{-U_V(\sigma_V)\}, \tag{16}$$

где A_V — нормирующий множитель, удовлетворяющий условию

$$\sum_{\sigma_V \in \Omega_V} P_V(\sigma_V) = 1,$$

т.е. $A_V = \sum_{\sigma_V \in \Omega_V} \exp\{-U_V(\sigma_V)\}$.

Распределение (16) будет гиббсовким распределением соответствующей модели Изинга.

Теперь можно рассматривать σ_V как случайные величины, имеющие совместное распределение (16). Если обозначить $\sigma_{\widetilde{V}} = \prod \sigma_k$, $k \in \widetilde{V}$, $\widetilde{V} \le V$, то $E_{\sigma_{\widetilde{V}}}$ называют моментами распределения (16). Для любого $\widetilde{V} \subset V$ определим совместное распределение величин $\{\sigma_k, k \subset \widetilde{V}\}$:

$$P\{\overline{\sigma}_{k_1}, \ldots, \overline{\sigma}_{k_n}\} = P\{\sigma_{k_1} = \overline{\sigma}_{k_1}, \ldots, \sigma_{k_n} = \overline{\sigma}_{k_n}\},$$

для $\widetilde{V} = \{k_1, \ldots, k_n\}$, а $\{\overline{\sigma}_{k_1}, \ldots, \overline{\sigma}_{k_n}\}$ — произвольный набор значений $\overline{\sigma}_{k_i} = \pm 1$.

Из [6] имеем

$$P\{\overline{\sigma}_{k_1}, \ldots, \overline{\sigma}_{k_n}\} = \frac{(-1)^k}{2^n} \sum_{\overline{V} \subseteq V} C_{\overline{V}} E \prod_{k=1}^{n} \sigma_{k_i},$$

где k — число значений $\sigma_{k_i} = -1$, а $C_{\overline{V}} = \prod_{k = V - \overline{V}} \overline{\sigma}_{k_i}$.

Если $E \prod_{k=1}^{n} \sigma_k$ неизвестно, то следует предварительно найти статистическую оценку $E_{\sigma_{\widetilde{V}}}$, а затем оценить совместное распределение величин σ_k, $k = 1, \ldots, n$.

Достаточно простой вид имеют потенциальные функции u_k и u_{kj}, соответствующие модели Изинга и входящие в выражение (12):

$$u_k = 0,\; u_{kj} = (y_k, x_j) = \beta_{y_k x_j},\; k \in V_1,\; \overline{\overline{N}}(k) \subset I \subset V_1,$$

т.е. переходные вероятности имеют вид

$$q_u(y_k / X_{\overline{\overline{N}}(k)}) = \frac{\exp[-\beta \sum_{j \in \overline{\overline{N}}(k)} y_k x_j]}{\sum_{y \in X} \exp[-\beta \sum_{j \in \overline{\overline{N}}(k)} y x_j]},$$

где y_k, x_j принимают значения ± 1, а $\beta > 0$.

При этом имеется значение β^* такое, что при $\beta \le \beta^*$ существует единственная инвариантная мера или эргодическое распределение [3].

Остановимся подробнее на проблеме нахождения эргодического распределения. Как отмечалось выше, обратимость цепи Маркова, а в рассматриваемом случае марковского поля описанного выше вида значительно упрощает процедуру нахождения эргодического распределения. В частности, в [6] приводятся явные формулы для эргодических вероятностей в случае, когда условные вероятности $q_k(y_k / x_{\overline{\overline{N}}(k)})$ одинаковы для всех k и состояния отдельных элементов в любой момент времени меняются независимо один от другого. Важным для приложений является исследование вопроса о возвратности исследуемой цепи Маркова. Например, в случае обратимости цепи Маркова вопрос о возвратности часто решается путем сравнения с цепью Маркова более простой структуры, для которой вопрос о возвратности уже решен. Так, исследуя случайное блуждание на двумерной решетке, можно получить ответ на вопрос о возвратности интересующей нас цепи Маркова. А цепи Маркова на графе, как указывалось выше, наглядно описывают задачи, связанные с выбором решений конкурирующими фирмами, имеющими несколько технологий выпуска продукции (подробное обсуждение см. в [3, 6]).

Остановимся детально на некоторых вопросах, связанных с задачей выбора оптимального управления при наличии нескольких фирм с конкурирующими технологиями, используя при этом финальные вероятности, которые будем считать найденными [4, 10].

Предположим, что i-я фирма имеет продукцию двух видов, и пусть r_{ij} — потери от продажи j-й продукции i-й фирмой за один период времени. Пусть f_{ij} — финальные вероятности, означающие вероятности того, что i-я фирма примет решение выпустить на рынок продукцию j-го типа, $j=1, 2$. Тогда средние потери i-й фирмы за один период определяются

$$E_{ri} = f_{i1} r_{i1} + f_{i2} r_{i2}. \qquad (17)$$

Можно показать, как и в случае обычных цепей Маркова, что величина (17) равна средним потерям в единицу времени системы, функционирующей в стационарном режиме. Очевидно, финальные вероятности f_{ij} зависят от переходных вероятностей рассматриваемого процесса, а они, в свою очередь, от стратегии, применяемой той или иной фирмой. В частности, экономическая модель, описывающая конкуренцию нескольких фирм, довольно адекватно может быть описана стохастической моделью Изинга, в которой переходные вероятности зависят от параметра β. Следовательно, E_{ri} также будет зависеть от β. Как отмечалось выше, эргодическое распределение существует, если $\beta \le \beta^*$, где β^* — некоторое заданное число, определяемое однозначно для модели Изинга. Таким образом, для того чтобы выбрать оптимальную политику для i-й фирмы, необходимо решить следующую оптимизационную задачу с ограничениями: найти $\min E_{ri}$ при ограничении $0 \le \beta \le \beta^*$.

Выше приведен пример, когда рассматриваемая экономическая модель описывается стохастической моделью Изинга и выбор оптимальной стратегии сводится к задаче минимизации с линейными ограничениями. Но можно поставить и более общую задачу. По-прежнему будем предполагать, что i-я фирма выпускает продукцию двух видов, т. е. $x_i = \{-1, 1\}$, и в каждый момент времени решение, принимаемое ею, зависит от состояния всей системы и принятого решения в предыдущий момент времени. В каждый момент времени для i-й фирмы задано множество управлений A_i, которое для простоты будем считать независимым от времени. Например, можем предположить, что наша модель описывается стохастической моделью Изинга, но не известен параметр β, характеризующий эту модель. Предположим, что множество управлений A_i состоит из двух точек $A_i = \{\beta_1, \beta_2\}$. В каждый момент времени решение принимается в соответствии с переходной вероятностью, отвечающей точке β_1 или β_2. Если задан некоторый функционал или функция потерь, зависящая от множества A_i, то задача состоит в выборе такого управления, при котором функционал достигает оптимального значения.

3.2. Гиббсовские поля в теории распознавания. В теории распознавания одним из наиболее известных является подход, основанный на моделировании неизвестных объектов с помощью случайных полей. Это связано с функцией распределения известного вида, зависящей от неизвестных параметров. При этом задача распознавания сводится к оценке этих параметров. Например, в работе [11] рассматривается марковская модель распознаваемого объекта, который характеризуется двумя параметрами: наблюдаемым параметром — признаком объекта и скрытым параметром — состоянием объекта. Тем или иным образом задана взаимосвязь между этими двумя параметрами, и на основании этого требуется построить стратегию распознавания, которая по известному наблюдению принимает разумное решение о скрытом состоянии, в котором пребывает объект.

Таким образом, задачи распознавания состоят в построении единой модели, объединяющей все параметры объекта — как наблюдаемые, так и скрытые, и именно в качестве таких моделей широко используются гиббсовские случайные поля. Критическим в этих моделях является оценивание параметров гиббсовского распределения. Обычно для этой цели используется принцип максимума энтропии, согласно которому в качестве искомого гиббсовского распределения выбирается распределение вероятностей, которое было бы настолько неинформативным, насколько это возможно при условии наличия частичной информации. Такой подход общепринятый в статистике, однако не единственный. Можно предложить альтернативный подход к выбору гиббсовского распределения. В основе его лежит факт, что в качестве «истинного» гиббсовского распределения может быть выбрано любое распределение, удовлетворяющее имеющейся априорной информации. В этой связи представляют особый интерес распределения, при которых достигается максимальное или минимальное значение вероятностей наблюдаемого случайного объекта. Для примера рассмотрим однопараметрическую форму распределения Гиббса, предложенную в работах [12, 13]:

$$p(\bar{k}) = \frac{e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{\chi\subset\Omega} V_\chi(\tilde{k}_\chi)}}{\sum\limits_{k\in K^T} e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{\chi\subset\Omega} V_\chi(\tilde{k}_\chi)}}, \tag{18}$$

где θ — параметр распределения Гиббса, который требуется оценить; χ обозначает клику, $\chi \in \Omega$; Ω — множество клик; $\tilde{k}_\chi$ — частичное описание, соответствующее клике χ; функции V_χ (гиббсовские потенциалы) удовлетворяют ограничению

$$|V_\chi \tilde{k}_\chi| < \infty\ . \tag{19}$$

Для того чтобы полностью определить распределение Гиббса, необходимо оценить параметр θ. Статистические методы, которые широко используются для оценки параметров распределений, базируются на двух основных подходах: методах классической выборочной теории и процедурах байесовского оценивания. Классический подход обеспечивает получение удовлетворительной оценки в тех случаях, когда имеется достаточное количество необходимой информации. Однако выборочные методы не пригодны для обработки малых выборок, с которыми приходится часто иметь дело в задачах образного мышления. Использование в таких случаях классических выборочных методов приводит к неточности оценивания и снижения степени доверия к полученным результатам. Один из способов преодоления проблемы малых выборок состоит в использовании не только информации, относящейся к конкретному объекту исследования, но и к анализу дополнительной информации из различных источников. К сожалению, классические методы не могут одновременно использовать текущую и дополнительную информацию при проведении статистических выводов.

В отличие от методов выборочной теории байесовский подход допускает естественное объединение данных из различных источников для получения оценок параметров распределения. В [14, 15] предложены новые подходы байесовского оценивания неизвестных параметров, основная особенность которых заключается в том, что мы не предполагаем известным априорное распределение неизвестного параметра, считаем, что априорное распределение принадлежит некоторому классу распределений. При этом возникает задача нахождения нижних и верхних границ для получаемых оценок, что весьма непростая, а часто и трудноразрешимая задача. Тем не менее во многих случаях для широких классов априорных распределений ее можно свести к задаче дробно-линейного программирования и получить решение поставленной задачи. Следует подчеркнуть, что известные в статистической физике стохастические модели, основанные на распределении Гиббса, остаются почти не исследованными в информационных приложениях. Достоинством гиббсовской модели является простота учета локальных связей отчетов сигнала при записи совместного распределения выборочного вектора, возможность локального задания свойств случайных процессов при соответствующем выборе клик и потенциальных функций. Однако традиционное описание случайных процессов предполагает задание одномерных распределений, спектрально-корреляционных характеристик, моментов и т.д., которые не входят в гиббсовское описание в явном виде. Представляет интерес установление связей между гиббсовским и традиционными марковскими описаниями сигналов, которые позволяют сочетать достоинства гиббсовского и традиционного описаний марковских процессов. В связи с этим значительный интерес представляет другой подход для оптимального оценивания гиббсовских моделей, состоящий в рассмотрении рекуррентных методов генерирования и обработки, хорошо развитых в традиционной теории марковских процессов. Решение этой задачи в значительной мере отсутствует в современной литературе, так как в общем случае трудно получить выражения для маргинальных (одномерных) гиббсовских распределений. Поэтому актуальным способом обработки гиббсовских полей являются стохастические итерационные методы, достаточно полно изученные в теории стохастической оптимизации, и важным остается вопрос установления связей между гиббсовскими и традиционными методами описания марковских случайных последовательностей, которые позволили бы сочетать простоту задания локальных свойств гиббсовских моделей с возможностью построения рекуррентных алгоритмов генерирования и обработки сигналов, характерных для традиционного описания марковских процессов.

3.3 Марковские поля в социологии. Рассмотрим математическую модель оценивания общественного мнения и сформулируем возможные проблемы в категориях рассматриваемой выше модели. Прежде всего возникает вопрос, каким образом математически можно описать прямые связи между предпочтениями разных групп и влияние параметров управления. Одним из возможных путей является вероятностный подход, основанный на моделировании возникающих социологических проблем с помощью описанных выше случайных полей на конечных графах. Как уже отмечалось, такие поля достаточно успешно применяются при решении разнообразных, сложных для формализации проблем. Примеры использования таких полей в социологии можно найти в работах [16, 17], некоторые из них приведены ниже. Предполагаем, что население страны можно описать некоторым вектором параметров $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, каждая компонента которого может быть как непрерывной (возраст, уровень доходов), так и дискретной (национальность, политические взгляды, специальность и т.п.). Будем считать, что область значений непрерывных величин делится на конечное количество интервалов таким образом, что граждане с характеристиками из одного интервала ведут себя одинаково. Например, с учетом возраста можно выделить такие группы населения: дети, молодежь, представители старшего возраста и т.п. Таким образом, подразделяем население на N групп, которые характеризуются некоторым фиксированным набором параметров y.

Естественно, что реакция на политику влияния разных представителей общества разная и может изменяться от откровенно враждебной до одобрительной. Будем считать, что реакцию общества можно разделить на конечное количество возможных вариантов M. Тогда предпочтения отдельного представителя некоторой социальной группы могут быть описаны случайной величиной ζ, которая принимает значение от 1 до M. В таком случае предпочтения всего населения характеризуются вектором $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$. Значения z этого вектора принимают фиксированные значения из множества возможных предпочтений Z. Взгляды могут меняться со временем, т.е $\zeta = \zeta^t$, и зависеть от значений параметра y. Предположим, что p_j^{it} — вероятность того, что представитель i-й группы в момент времени t занимает позицию j, т.е.

$$p_j^{it} = P(\zeta_i^t = j) \text{ и } \sum_{j=1}^{M} p_j^{it} = 1, \ p_j^{it} \geq 0.$$

Лицо, использующее некоторую политику, старается достичь успеха, применяя любой из возможных способов влияния на общественность. Можно вкладывать деньги в рекламу, акцентируя внимание на неотъемлемых характеристиках политики (например, выбросы вредных веществ в контексте охраны окружающей среды). В любом случае считается, что политика воздействия или политика управления характеризуется вектором параметров $x^t = (x_1^t, \ldots, x_n^t)$, который изменяется во времени. Стоимость таких мероприятий в момент времени t описывается функцией стоимости $f(x^t)$, где x^t — значение вектора x в данный момент времени.

Предпочтения изменяются под влиянием общественных взглядов и ценностей конкретной социальной группы и некоторых соседних групп, а также предложенной политики влияния на общество. Будем считать, что $N(i)$ — множество тех групп, ценности которых критические для формирования взглядов группы i, и $z_{N(i)}$ — вектор соответствующих предпочтений.

Определим предпочтение представителя i-й группы через условные распределения $H^i(z_i | z_{N(i)}; x^t)$, которые могут быть определены на основе соответствующих социологических опросов: каким будет ваше предпочтение (от 1 до M), если известны мнения соседних групп $z_{N(i)}$ и внешние параметры $x = (x_1, \ldots, x_n)$? Такое распределение определяет динамику изменений предпочтений конкретного представителя некоторой группы согласно следующему соотношению:

$$p_j^{i,t} = \sum_{z_{N(i)} \in Z} H^i(\zeta_i^t = z_i | \zeta_{N(i)}^{t-1} = z_{N(i)_i}; x^t) P(\zeta_{N(i)}^{t-1} = z_{N(i)}). \qquad (20)$$

Взгляды групп из $N_i = \{\varnothing\}$ определяются лишь представителями этой группы и не подвержены влиянию других групп, хотя сами могут влиять на остальные. Для таких групп условное распределение $H^i(\cdot)$ преобразуем в безусловное.

Для того чтобы окончательно определить динамику изменения состояний системы, которая характеризуется уравнением (20), необходимо зафиксировать начальное распределение предпочтений $P(\zeta_i^t)$ для $t = 0$.

Уравнение (20) вместе с данными для начального момента времени позволяют рассчитать p_j^{it} для любого $t \geq 0$. Конечно, учитывая сложность предложенной системы, практически невозможно получить аналитический вид формулы для расчета p_j^{it} как функции от регулятора x. Существование аналитического вида для всех p_j^{it} обеспечило бы довольно простой инструментарий для анализа таких моделей.

Сформулируем теперь некоторые математические проблемы [17], возникающие при решении описанных выше социологических проблем. При этом будем считать, что действует ограничение по времени в l временных периодов.

Проблема 1. Оценка стратегий. Учитывая условное распределение $H^i(\zeta_i^t = z_i | \zeta_{N(i)}^{t-1} = z_{V_i}; x^t) = H^i(z_i | z_{N_i}; x)$ для $u = 1, \ldots, N$ и вектор воздействия x^t для периодов $t = 0, 1, \ldots, l-1$, найти распределения $P(\zeta_i^l)$ для $u = 1, \ldots, N$ для случайных величин ζ_i^l, т.е. оценить общественную мысль в конечный момент времени l.

Следуя [17], проблему интерпретации реакции населения сформулируем, учитывая, что взгляды неисследованных групп выражаются через предпочтения уже исследованных. Обозначим V_E множество исследуемых групп. Тогда следующая проблема примет такой вид.

Проблема 2. Интерпретация результатов. Учитывая условное распределение $H^i(z_i | z_{V_i}; x)$ для $i = 1, \ldots, N$, вектор влияния x^t и распределения $P(\zeta_i^t)$, $i \in V_E$, для всех $u = 1, \ldots, N$ нужно определить значение $P(\zeta_i^t)$ для $i \in V - V_E$.

В контексте предложенной модели подверженность общественного мнения факторам управления определяется как изменение распределения $P(\cdot)$ по параметрам управления x. Таким образом, возникает следующая проблема.

Проблема 3. Анализ чувствительности. Учитывая условное распределение $H^i(z_i | z_{V_i}; x)$ для $u = 1, \ldots, N$ и вектор влияния x^t для периодов $t = 0, 1, \ldots, l-1$, нужно оценить производные $P(\zeta_i^l)$ для всех $u = 1, \ldots, N$ как функции от $x^0, \ldots, x^l$.

Для второй и третьей проблем существенным моментом является анализ статистических данных, который опирается на следующие утверждения.

1. Причинно-следственные связи описываются структурой, которая базируется на векторе случайных параметров $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_i, \ldots, \zeta_N)$, и для каждого параметра ζ_i набор индексов $N(i)$ выбирается таким образом, чтобы элементы вектора $\{\zeta_i\}_{i \in V_i}$ были идентифицированы как «причинные источники» для ζ_i. Такой выбор возможен после применения нематематического анализа или через определение «причинными источниками» компонентов, наиболее статистически коррелированных с ζ_i.

2. Условные распределения $H^i(\zeta_i | \zeta_{N(i)})$ могут быть получены с помощью классических статистических инструментов. Учитывая более общие предположения, такие условные распределения вместе с причинно-следственными связями определяют совместное распределение $H(\zeta)$.

Преимущество такого подхода заключается в использовании совместного распределения для небольших подмножеств более общей совокупности случайных параметров ζ, что значительно увеличивает точность конечного распределения.

Сформулируем некоторые базовые определения, на которые будем опираться при построении модели.

Пусть $\Gamma = (V, B)$ — граф с множеством вершин V и совокупностью ребер B. Будем считать множество случайных величин $\zeta = \{\zeta_v, v \in V\}$ проиндексированным согласно вершинам V и определенным на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Обозначим W произвольное подмножество V и

$$\zeta_W = \{\zeta_v\}_{v \in W},$$

т.е. ζ_W — вектор, компоненты которого проиндексированы элементами W.

Таким образом, граф Γ согласовывается с ζ, а вершина v — с компонентом ζ_v вектора ζ. Будем предполагать, что ζ_v и ζ_W условно независимые в смысле определения

$$P(\zeta_v | \zeta_{W \cup c(v)}) = P(\zeta_v | \zeta_{c(v)}).$$

Если $H_V(\zeta)$ — общее распределение вектора ζ, то из предложенного определения следует, что

$$H_V(\zeta) = \prod_{v \in V} H_v(\zeta_v | \zeta_{N(v)}),$$

где $H_v(\zeta_v | \zeta_{N(v)})$ — функция условного распределения ζ_v при условии $\zeta_{N(v)}$.

Определим элемент управления, который отождествим с вектором x. Будем считать, что вектор параметров управления x определен на множестве $X \in \mathfrak{R}^n$.

Для предложенной реализации случайной величины ζ и вектора управления x определим функцию $f(x, \zeta)$, которая будет мерой производительности данной системы, построенной на основе байесовской сети. Предположим, что функции условного распределения $H_v(\cdot)$ также зависят от управления

$$H_v(\cdot) = H_v(x, \zeta_v | \zeta_{c(v)}). \tag{21}$$

Изменение значения $x \in X$ влияет на взаимосвязь между группами и является основанием для следующего утверждения. Очевидно, что в общем случае управление u зависит от случайных величин ζ и управлений в предыдущие моменты времени. Используя функцию $f(x, \zeta)$, нетрудно построить тот или иной критерий качества и свести поставленную задачу к нахождению оптимального управления для соответствующего управляемого случайного марковского процесса с локальным взаимодействием.

3.4. Проблемы моделирования катастроф. Оценка функции распределения требований $C_i(t, x_i, \overline{w}_i)$ в случае стандартных независимых рисков возможна на основе достаточно объемной статистики. Однако для катастрофических рисков такой богатой статистики нет, к тому же, как уже отмечалось, необходимо учитывать фактор времени и пространства. Удобной математической моделью для описания катастроф является модель марковского случайного поля, заданного на графе (V, U) с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, K\}$ и множеством дуг $U = \{(i, j)\}$. Для каждой вершины определяется окрестность $N(k) = \{j : (k, j) \in U\}$.

Очевидно, что разрушения в вершине k будут генерировать разрушения в окрестности $N(k)$. Если ввести понятие марковости таким образом, что распределение потерь в точке k зависит лишь от потерь в окрестности $N(k)$, то подобная модель при весьма общих условиях описывается гиббсовким случайным полем и поставленная задача моделирования сводится к известным методам моделирования гиббсовских случайных полей. Более детально это показано в [4, 18, 19]. В работах [4, 19] рассмотрены задачи управления такими полями, доказано существование оптимальных марковских стационарных стратегий для функций риска общего вида. Очевидно, что эти исследования могут непосредственно применяться к описанным выше задачам оценки риска для достаточно общих моделей финансовой и страховой математики.

3.5. Марковские случайные поля в биологии. Для таких сложных биологических систем, как, например, целый организм, характерна структура, допускающая в них существование отдельных относительно независимых подсистем. Для каждой такой подсистемы совокупность всех остальных подсистем образует своего рода «внешнюю среду», в которой эта подсистема существует. Функционирование такой составной системы может быть организовано по «централизованному» принципу — каждой подсистеме приписывается определенное поведение. Во многих случаях такое управление сложными системами неэффективно. Более целесообразна другая схема, которую можно назвать схемой неиндивидуализированного локального управления. Это означает, что для каждой подсистемы «сверху» устанавливаются лишь некоторые общие «правила взаимодействия», а в остальном она функционирует в соответствии со своей собственной структурой и правилами так, чтобы ее взаимодействие с внешней средой и другими подсистемами было в некотором смысле оптимальным. Эти соображения развили И.М. Гельфанд и М.Л. Цетлин [20, 21]. Они сформулировали так называемый принцип наименьшего взаимодействия, аналогичный известным в механике вариационным принципам. Согласно этому принципу каждая подсистема в живом организме функционирует так, чтобы ее взаимодействие со всей системой и с окружающей средой было возможно меньшим. Тем самым задается некоторое универсальное правило поведения локальных подсистем.

И.И. Пятецкий–Шапиро и его соавторы рассмотрели вопрос о том, как клеточный коллектив может принимать определенную форму под влиянием локального взаимодействия между соседними клетками [22]. Были рассмотрены две задачи такого типа: выстраивание клеток по прямой и окружение некоторой области на плоскости. Клетки соединялись ломаной линией, и каждой вершине этой ломаной задавалось определенное правило движения в зависимости от положения двух (или более) соседних вершин. Моделирование таких систем показало, что существуют различные правила их взаимодействия и много разных начальных положений, при которых клеточный ансамбль достигает через некоторое время желаемого расположения — выстраивается вдоль прямой или в заданную область.

Некоторые другие задачи, связанные с воспроизведением коллективом автоматов тех или иных геометрических форм, рассмотрены в книге М. Аптера [23].

Взаимодействие между автоматами было устроено так, что на каждый автомат влияли лишь ближайшие автоматы, а не все автоматы, входящие в данный коллектив. Это соответствует данным реальных биологических экспериментов, согласно которым в небольших изолированных участках тканей эмбриона наблюдаются те же движения клеток, что и в целом эмбрионе.

Заметим, что известная модель А.Г. Гурвича [24] о формообразовании биологического поля тоже по сути связана с идеей локального взаимодействия. Действительно, А. Гурвич считал, что поле каждой клетки достаточно быстро ослабевает по мере удаления от нее, а это значит, что в основном на каждую клетку действуют лишь ее ближайшие соседи (модель Гурвича фактически является моделью локального взаимодействия для ранних стадий развития, пока их число невелико; при больших клеточных коллективах в этой модели на данную клетку могут влиять и достаточно удаленные от нее клетки, так как поля суммируются). Этот пример иллюстрирует широкие возможности использования аппарата случайных марковских процессов с локальным взаимодействием, а исследование актуальных проблем в биологии послужило мощным толчком для создания и развития этой теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аверинцев М.Б. Описание марковских случайных полей при помощи гиббсовских условных вероятностей // Теория вероятностей и ее применение. — 1972. — **17**. — С. 21–35.
2. Аверинцев М.Б. Гиббсовское описание случайных полей, условные вероятности которых могут обращаться в нуль // Проблемы передачи информации. — 1975. — № 4. — С. 86–89.
3. Лиггетт Т. Марковские процессы с локальным взаимодействием. — М.: Мир, 1989. — 550 с.
4. Chornei R.K., Daduna H., Knopov P.S. Control of spatially structured random processes and random fields with applications. — New York: Springer, 2006. — 262 p.
5. Васильев Н.Б., Козлов О.К. Обратимые цепи Маркова с локальным взаимодействием // Многокомпонентные случайные системы. — М.: Наука, 1978. — С. 83–100.
6. Ставская О.Н. Гиббсовские инвариантные меры для цепей Маркова на конечных решетках с локальным взаимодействием // Мат. сб. — 1971. — **92**, № 3. — С. 402–419.
7. David P.A., Foray D. Percolation structures, Markov random fields. The economics and of edi sdandards diffusions. — Global telecommunications strategies and technological changes. — Amsterdam: North-Holland, 1993.

8. Синай Я.Г. Теория фазовых переходов. — М.: Наука, 1980. — 207 с.
9. Рюэль Д. Статистическая механика. — М.: Мир, 1971. — 367 с.
10. Knopov P.S. Markov fields and their applications in economics // J. of Math. Sci. — 1999. — **97**, N 2. — P. 3923–3931.
11. Schlesinger M.I., Hlavac V. Ten lectures on statistical and structural pattern recognition // Comput. Imaging and Vision. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academ. Publ., 2002. — 520 p.
12. Гимельфарб Г.Л., Залесный А.В. Байесовская сегментация изображений с использованием моделей марковских полей, задаваемых гиббсовскими распределениями // Атоматизированные системы обработки изображений. Тез. докл. 3 Всесоюзн. конф. — Ленинград , 1989. — С. 22–23.
13. Залесный А.В. Алгоритмы цифровой обработки изображений, описываемых марковскими случайными полями: Дис. ... канд. техн. наук. — Киев: Институт кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1991.
14. Golodnikov A., Knopov P., Pardalos P., Uryasev S. Optimization in the space of distribution functions and applications in the Bayes analysis // Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academ. Publ., 2000. — P. 102–131.
15. Голодников А.Н., Кнопов П.С., Пепляев В.А. Некоторые подходы к распознаванию образов // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 6. — С. 55–69.
16. Kinderman R.P., Snell J.L. On the relation between Markov random fields and social networks // J. of Math. Soc. — 1980. — **l7**. — P. 1–13.
17. Ermoliev Yu., Gaivoronski A, Makowski M. Robust design of networks under risks // Coping with Uncertainty: Robust Solutions. — Germany. Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. — P. 101–137.
18. Ермольев Ю.М., Ермольева Т.Ю., Макдональд Г., Норкин В.И. Проблемы страхования катастрофических рисков // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 2. — С. 90–110.
19. Chornei R.K., Daduna H., Knopov P.S. Controlled Markov fields with finite state space on graphs // Stochastic Models. — 2005. — **21**. — P. 847–874.
20. Гельфанд И.М., Цетлин М.Л. Математическое моделирование механизмов центральной нервной системы. Модели структурно-функциональной организации некоторых биологических систем. — М.: Наука, 1966. — С. 9–26.
21. Цетлин М.Л. Исследования по теории автоматов и моделированию. — М.: Наука, 1969. — 316 с.
22. Леонтович А.М, Пятецкий–Шапиро И.И., Ставская О.Н. Некоторые математические задачи, связанные с формообразованием // Автоматика и телемеханика. — 1970. — № 4. — С. 94–107.
23. Аптер М. Кибернетика и развитие. — М.: Мир, 1970. — 215 с.
24. Гурвич А.Г. Теория биологического поля. — М.: Сов. наука, 1944. — 156 с.

Поступила 04.08.2010