УДК 519.85

Н.В. СЕМЕНОВА, Л.Н. КОЛЕЧКИНА, А.Н. НАГОРНАЯ

ВЕКТОРНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ЛИНЕЙНЫМИ КРИТЕРИЯМИ НА НЕЧЕТКО ЗАДАННОМ КОМБИНАТОРНОМ МНОЖЕСТВЕ АЛЬТЕРНАТИВ

Ключевые слова: *многокритериальная оптимизация, дискретная оптимизация, нечеткое множество, функция принадлежности, комбинаторное множество перестановок, парето-оптимальные решения, нечеткое множество альтернатив, нечеткое мультимножество.*

ВВЕДЕНИЕ

В реальных ситуациях принятия решений цели, ограничения, критерии выбора в большинстве случаев субъективны и точно не определены. Поэтому при построении моделей принятия решений возникает необходимость использования нечеткой логики, нечетких множеств и отношений. Нечеткие понятия позволяют моделировать плавное, постепенное изменение свойств, а также неизвестные функциональные зависимости, выраженные в виде качественных связей.

Во многих прикладных задачах довольно часто исходные данные не могут быть точно заданы. Такие ситуации отображают недостаток информации для постановки задачи, поскольку при нечетких условиях и критериях принятие решений оказывается проблематичным. При моделировании реальных задач нечеткость выявляется в форме описания функций и параметров, от которых они зависят. Удобным математическим инструментарием, с помощью которого описывается и учитывается подобного рода информация, является теория нечетких множеств, предложенная Л. Заде в [1]. Нечеткие множества широко используются в различных применениях искусственного интеллекта, распознавании образов, теории принятия решений и др.

Во многих теоретических и практических задачах исследования операций, проектирования сложных систем возникает необходимость принятия решений с учетом нескольких критериев оптимальности. В то же время довольно распространенными являются задачи многокритериального выбора с множеством альтернатив, которые могут оцениваться как количественно, так и качественно. В условиях многокритериальности выбор наиболее целесообразного решения осуществляется из множества неулучшаемых альтернатив. Проблема отыскания такого множества имеет большое практическое и теоретическое значение. Кроме того, в реальных задачах мощность множества альтернатив может быть очень велика, что делает проблему принятия решения достаточно сложной. В работе [2] дана математическая формулировка и приведено аксиоматическое обоснование известного с XIX в. принципа Эджворта–Парето для случая четкого отношения предпочтения лица, принимающего решение. Этот принцип является основополагающим при выборе наилучших решений в экономике и технике в тех случаях, когда приходится учитывать сразу несколько целевых функций (критериев). Однако он не универсален, а справедлив только при решении определенного, хотя и достаточно широкого, класса задач многокритериального выбора. За границами этого класса его применение рискованно или недопустимо.

В настоящей работе принцип Эджворта–Парето распространяется на более широкий класс многокритериальных задач, в которых множество возможных решений задано нечетко.

Значительный вклад в разработку методов многокритериальной оптимизации, применение этих методов в задачах управления сложными системами и их проектирования внесли В.Л. Волкович, И.В. Сергиенко, В.А. Перепелица, Ю.Ю. Червак, Р. Кини, Х. Райфа, Е.С. Вентцель, Ю.Б. Гермейер и др. Различным аспектам теории векторной оптимизации посвящены работы [2–9]. Важная роль в разработке новых методов решения комбинаторных задач дискретной оптимизации принадлежит И.В. Сергиенко, В.С. Михалевичу, Н.З. Шору и др. Созданные ими методы нашли широкое применение при решении многих задач теории расписаний, размещения производств, проектирования сетей, магистральных газопроводов.

На практике нередко точная теория оптимизации применяется к неточным моделям, в которых нет никаких оснований задавать коэффициенты в виде точно определенных чисел. Такое искусственное сужение априорной информации может привести к искажению конечных результатов. В настоящее время достаточно актуальны задачи, учитывающие нечеткие границы как в целевых функциях, так и в ограничениях, заданных на комбинаторных множествах. Задача нечеткого выбора — прямое обобщение задачи обычного (четкого) выбора, ее исследование представляет несомненный теоретический и практический интерес, а ее решения (нечеткое множество выбираемых решений) могут служить основой для последующего окончательного выбора. Изучение данной задачи полезно и с точки зрения ее приложений в самых различных областях.

В работах [10–12] рассмотрены многокритериальные задачи при условиях нечетко заданной информации о целевых функциях и допустимой области задачи, в [13–16] — задачи на комбинаторных множествах. Целесообразно рассмотреть задачу, которая объединяет указанные задачи.

В данной статье задача векторной оптимизации определена на комбинаторном множестве перестановок, при этом учитывается тот факт, что выпуклой оболочкой такого множества является общий перестановочный многогранник, множество вершин которого составляет рассматриваемое комбинаторное множество [14, 15]. Изученные свойства этого множества дают возможность сводить решение задачи, определенной на дискретном комбинаторном множестве, к задаче с непрерывной допустимой областью. В настоящей работе исследована многокритериальная задача с учетом комбинаторных свойств нечетко заданной области допустимых альтернатив и предложены подходы к ее решению.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Нечеткое подмножество образуется путем введения обобщенного понятия принадлежности, т.е. расширения двухэлементного множества значений характеристической функции $\{0,1\}$ до континуума $[0,1]$. Это означает, что переход от полной принадлежности объекта к полной его непринадлежности происходит плавно, принадлежность может выражаться любым числом из единичного интервала $[0,1]$, а не только одним из двух значений элементов множества $\{0,1\}$, как в случае индикаторов обычных подмножеств. Данное свойство нечетких подмножеств обеспечивает возможность теоретико-множественного представления реальных неточных понятий. Возможность формализации таких понятий оказалась очень полезной, в частности, при разработке принципов искусственного интеллекта ЭВМ, которые моделируют процессы мышления человека.

Независимо от того, используются нечеткие или четкие подмножества, определение степеней принадлежности опирается на некоторые субъективные критерии лица, принимающего решения (ЛПР). Однако если при определении четких подмножеств осуществляется выбор одного из двух чисел — нуля или единицы, то для определения нечетких подмножеств возможности выбора степеней принадлежности намного разнообразнее. В ряде случаев определение подходящих значений степеней принадлежности элементов нечетких множеств приводит к значительным трудностям в работе с нечеткими понятиями.

Формально общая задача нечеткого математического программирования описывается следующим образом [11]. Пусть X — универсальное множество альтернатив и $\mu_A : X \to [0,1]$ — заданное нечеткое подмножество допустимых альтернатив; Y — универсальное множество оценок результатов выбора альтернатив из множества X и $\mu_R : Y \times Y \to [0,1]$ — заданное на множестве Y нечеткое отношение предпочтения. Выборы альтернатив оцениваются нечеткими значениями заданной нечеткой функции цели $\varphi : X \times Y \to [0,1]$. Задача заключается в рациональном выборе альтернатив на основе информации, заданной в описанной форме.

Следующим шагом на пути уточнения рассмотренной модели является описание параметров задачи в форме нечетких подмножеств. При этом, кроме задания множества возможных значений параметров, в модель вводится дополнительная информация в виде функций принадлежности данным множествам. Эти функции рассматриваются как способ приближенного отображения экспертом в агрегированном виде имеющегося у него неформализованного представления о реальной величине данного параметра. Значение функции принадлежности можно понимать как весовые коэффициенты, которые эксперт приписывает разным возможным значениям параметра.

Учет подобной дополнительной информации усложняет исходную математическую модель, тем не менее она может оказаться проще модели, учитывающей многообразие дополнительных факторов.

Определим для дальнейшего изложения обобщения понятий мультимножества, n-выборки и комбинаторного множества перестановок на случай нечетко заданной информации.

Определение 1. Нечетким мультимножеством $\widetilde{X}$, заданным на универсальном множестве X, называется совокупность пар $(x, \mu_{\widetilde{X}}(x))$, где $x \in X$, а $\mu_{\widetilde{X}}(x)$ — функция $x \to [0,1]$, называемая функцией принадлежности мультимножества $\widetilde{X}$. Значение $\mu_{\widetilde{X}}(x)$ для конкретного x называется степенью принадлежности этого элемента нечеткому мультимножеству $\widetilde{X}$.

Напомним, что мультимножества согласно определению образуют подкласс нечетких мультимножеств. Над нечеткими множествами, так же как над обычными множествами, выполняется ряд операций, таких как объединение, пересечение, декартово произведение, разность и др. Эти же операции имеют место для нечетких мультимножеств [16].

Пусть задано нечеткое мультимножество

$$\widetilde{A} = \{a_1, \mu_{\widetilde{A}}(a_1), a_2, \mu_{\widetilde{A}}(a_2), \ldots, a_q, \mu_{\widetilde{A}}(a_q)\},$$

его основание

$$S(\widetilde{A}) = \{e_1, \mu_{\widetilde{A}}(e_1), e_2, \mu_{\widetilde{A}}(e_2), \ldots, e_k, \mu_{\widetilde{A}}(e_k)\},$$

где

$$\mu_{\widetilde{A}}(e_i) = \min\{\mu_{\widetilde{A}}(a_{i_j}) \mid a_{i_j} = a_{i_t},\ j \ne t,\ \forall i, j, t \in N_q\},\ e_j \in R\ \ \forall j \in N_k = \{1, \ldots, k\}$$

и кратность элементов $k(e_j) = r_j$, $j \in N_k$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = q$.

Упорядоченной нечеткой n-выборкой из нечеткого мультимножества $\widetilde{A}$ называется набор

$$a = (a_{i_1}, \mu_{\widetilde{A}}(a_{i_1}), a_{i_2}, \mu_{\widetilde{A}}(a_{i_2}), \ldots, a_{i_n}, \mu_{\widetilde{A}}(a_{i_n})), \tag{1}$$

где $(a_{i_j}, \mu_{\widetilde{A}}(a_{i_j})) \in \widetilde{A}$ $\forall i_j \in N_k$, $\forall j \in N_k$, $i_s \ne i_t$, если $s \ne t$ $\forall s \in N_k$, $\forall t \in N_k$.

Определение 2. Нечеткое множество $P(\widetilde{A})$, элементами которого являются нечеткие n-выборки вида (1) из нечеткого мультимножества $\widetilde{A}$, называется нечетким евклидовым комбинаторным множеством, если для произвольной пары его элементов

$$a' = (a'_1, \mu_{\widetilde{A}}(a'_1), a'_2, \mu_{\widetilde{A}}(a'_2), \ldots, a'_n, \mu_{\widetilde{A}}(a'_n)),$$

$$a'' = (a''_1, \mu_{\widetilde{A}}(a''_1), a''_2, \mu_{\widetilde{A}}(a''_2), \ldots, a''_n, \mu_{\widetilde{A}}(a''_n))$$

выполняются условия $(a' \neq a'') \Leftrightarrow (\exists\, j \in N_n : (a'_j, \mu_{\widetilde{A}}(a'_j)) \neq (a''_j, \mu_{\widetilde{A}}(a''_j))$, т.е. множество $P(\widetilde{A})$ имеет следующее свойство: два элемента множества $P(\widetilde{A})$ различны, если они независимо от других отличий различаются порядком размещения символов, образующих их, и степенью принадлежности нечеткому множеству $P(\widetilde{A})$.

Нечеткое множество перестановок с повторениями из n действительных чисел, среди которых k разных, называется общим нечетким множеством перестановок и обозначается $P_{nk}(\widetilde{A})$.

Определение 3. Выпуклой комбинацией нечетких множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в R^n называется нечеткое множество A с функцией принадлежности вида

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i(x),$$

где $\lambda_i \geq 0$, $i \in N_n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Будем рассматривать элементы нечеткого множества перестановок с повторениями как точки арифметического евклидова пространства R^n.

Не теряя общности, упорядочим элементы мультимножества $\widetilde{A}$ таким образом:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n. \tag{2}$$

Наряду с классическим многогранником перестановок, введенным Радо [14], опишем общий перестановочный многогранник $\Pi_{nk}(\widetilde{A})$, являющийся выпуклой оболочкой общего множества перестановок $P_{nk}(\widetilde{A})$ и описывающийся системой линейных неравенств [15]:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j, \quad \sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^{i} a_j, \tag{3}$$

$$\alpha_j \in N_n,\ \alpha_j \neq \alpha_t, \forall j \neq t,\ \forall j, t \in N_i, \forall i \in N_n,\ P_{nk}(A) = \operatorname{vert} \Pi_{nk}(A),$$

где $\operatorname{vert} \Pi_{nk}(A)$ — множество вершин многогранника $\Pi_{nk}(A)$.

Нечеткий выпуклый многогранник $\Pi_{nk}(\widetilde{A})$ также можно представить как выпуклую оболочку нечеткого комбинаторного множества перестановок: $\Pi_{nk}(\widetilde{A}) = \operatorname{conv} P_{nk}(\widetilde{A})$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как правило, под задачей многокритериальной оптимизации подразумевают задачу нахождения минимума или максимума векторного критерия на допустимом множестве альтернатив. С помощью векторной целевой функции формально представляются основные свойства альтернатив: ценность, полезность, стоимость и др. Нечеткость в постановке задачи многокритериальной оптимизации может содержаться как в описании множества альтернатив, так и в описании функций критериев. Разные формы описания исходной информации приводят к различным формулировкам нечетких задач оптимизации: задача достижения нечетко поставленной цели при нечетких ограничениях; задача нечеткой оптимизации при нечетком множестве допустимых альтернатив; нечеткий вариант стандартной задачи оптимизации со «смягчением» критериев и/или ограничений, т.е. вместо задачи оптимизации решается задача удовлетворения цели и неравенства для целевой функции и ограничения могут нарушаться; задача оптимизации с нечеткими коэффициентами и др.

В данной статье задача состоит в максимизации векторной функции F на нечетком евклидовом комбинаторном множестве $\widetilde{X}$.

Рассматривается многокритериальная задача комбинаторной оптимизации вида

$$Z(F, X)\colon \max \{F(x) \mid x \in X \subset R^n\},\ F(x) = (f_1(x), \ldots, f_l(x)),\ f_i : R^n \to R,\ i \in N_l,$$

где $X = \operatorname{vert} \Pi_{nk}(A) \cap D \neq \varnothing$, $\Pi_{nk}(A) = \operatorname{conv} P_{nk}(A)$, $P_{nk}(A)$ — комбинаторное множество перестановок, $D \subset R^n$— выпуклый многогранник.

На множестве X задано нечеткое подмножество $\widetilde{X} = \{x, \mu_{\widetilde{X}}(x)\}$, где $x \in X$, $\mu_{\widetilde{X}}(x) \colon X \to [0,1]$ — функция принадлежности множеству $\widetilde{X}$, которое называется нечетким множеством альтернатив. Под максимизацией будем понимать выбор нечеткого подмножества R из нечеткого множества $\widetilde{X}$, которому соответствует наибольшее значение как векторной функции F, так и функции принадлежности $\mu_{\widetilde{X}}(x)$ нечеткого множества альтернатив. Эти альтернативы в задачах многокритериальной оптимизации в зависимости от способа их сравнения называются эффективными (оптимальными по Парето), слабо эффективными (по Слейтеру), строго эффективными (по Смейлу) и соответственно обозначаются: $P(F, \widetilde{X})$, $Sl(F, \widetilde{X})$, $Sm(F, \widetilde{X})$.

Определение 4. Альтернатива $x^* \in \widetilde{X}$ называется эффективной, если не существует иной альтернативы $x \in \widetilde{X}$ такой, что $F(x) \geq F(x^*)$, $\mu_D(x) \geq \mu_D(x^*)$ и хотя бы одно неравенство строгое; слабо эффективной, если $\overline{\exists}\, x \in \widetilde{X} \colon F(x) > F(x^*)$, $\mu_D(x) > \mu_D(x^*)$; строго эффективной, если $\overline{\exists}\, x \in \widetilde{X} \colon x \neq x^*$, $F(x) \geq F(x^*)$, $\mu_D(x) \geq \mu_D(x^*)$.

Из определений следует, что $Sm(F, \widetilde{X}) \subset P(F, \widetilde{X}) \subset Sl(F, \widetilde{X})$.

Исходную задачу $Z(F, X)$ представим в виде $(l+1)$-критериальной задачи

$$F(x) \to \max,\ \mu_{\widetilde{X}}(x) \to \max,\ x \in \widetilde{X}.$$

Под решением задачи с нечетким множеством альтернатив будем понимать нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu(x) = \{\mu_{\widetilde{X}}(x) \mid x \in P(F, \widetilde{X}) \vee 0 \mid x \notin P(F, \widetilde{X})\}.$$

Таким образом, нечеткое множество решений включает в себя те и только те альтернативы универсального множества X, которые дают значения векторной функции $F(x)$ и функции принадлежности $\mu_{\widetilde{X}}(x), x \in \widetilde{X}$, не улучшаемые одновременно.

Пусть $\widetilde{Y} = \{y \in R^l \mid y = F(x), x \in \widetilde{X}\}$ — множество достижимых векторных оценок, которые задаются нечеткими значениями векторных оценок $y = (y_1, y_2, \ldots, y_l)$, и $P(\alpha)$ — множество всех эффективных альтернатив $(l+1)$-критериальной задачи

$$y_i \to \max,\ i \in N_l,\ \mu_D(x) \to \max,\ F(x, y) \geq \alpha,\ x \in X,\ y = (y_1, \ldots, y_l) \in Y.$$

Тогда решением векторной задачи нечеткой оптимизации с нечетким множесвом альтернатив и со степенью недоминируемости альтернатив не меньше α называется нечеткое множество с функцией принадлежности вида

$$\mu_{\alpha}(x)=\begin{cases}\mu_{\widetilde{X}}(x), & x\in P_{\alpha}(F,\widetilde{X}),\\ 0, & x\notin P_{\alpha}(F,\widetilde{X}).\end{cases}$$

Таким образом, нечеткое множество решений исходной задачи содержит те и только те альтернативы со степенью недоминируемости не меньше α, которые эффективны как по оценкам альтернатив y_i, $i\in N_l$, так и по функции принадлежности $\mu_{\widetilde{X}}(x)$ нечеткому множеству альтернатив $\widetilde{X}$. Выбор из них некоторой конкретной альтернативы осуществляется с помощью методов многокритериальной оптимизации. Более того, вместо задачи максимизации векторной целевой функции можно поставить задачу достижения некоторого наперед заданного значения векторного критерия, соответствующего удовлетворению исходной цели.

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ

Существует достаточно много методов решения многокритериальных задач, но большинство из них предназначены для решения задач выбора альтернатив в четкой среде. Некоторая модификация делает их применимыми и в условиях нечеткости.

Разработка методов решения задачи $Z(F, X)$ в условиях нечеткой определенности требует знания и использования результатов операций нахождения суммы, произведения, минимума и максимума нечетких величин.

Под нечетким числом будем понимать нечеткое множество с областью определения в виде интервала действительной оси R.

Множество всех нечетких чисел, определенных на R^1, обозначим $\widetilde{R}^1$. Пусть x и y — два нечетких числа с носителями $S_x=(a_1,a_2)$ и $S_y=(b_1,b_2)$ соответственно; $a_2>a_1$, $b_2>b_1$; $g: R^1\times R^1\to R^1$ — некоторая функция. Тогда согласно принципу обобщения [12] нечеткое число $D=g(x,y)$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_D(z)=\sup_{\substack{g(a,b)=z\\ a\in S_x,\ b\in S_y}}\min\{\mu_x(a),\mu_y(b)\}. \tag{4}$$

Пусть $\otimes$ — одна из четырех арифметических операций: $+$, $-$, $\cdot$, $/$; $g(a,b)=a\otimes b$. Тогда формула (4) определяет результат арифметической операции $\otimes$ над нечеткими числами x и y. Если $g(\cdot)$ — функция не двух, а n аргументов, то принцип обобщения формулируется аналогично формуле (4).

При сравнении двух нечетких величин необходимо дать определения равенства этих величин.

Определение 5. Две нечеткие величины (два числа) $(x_1,\mu_1(x_1))$ и $(x_2,\mu_2(x_2))$ будем считать равными, если $x_1=x_2$ и $\mu_1(x_1)=\mu_2(x_2)$.

Определение 6. Если выполняются условия $x_1\geq x_2$, $\mu_1(x_1)\geq\mu_2(x_2)$ и одно из этих неравенств строгое, то нечеткая величина $(x_1,\mu_1(x_1))$ больше нечеткой величины $(x_2,\mu_2(x_2))$.

Разработан подход, основанный на методе последовательных уступок. При решении многокритериальной задачи методом последовательных уступок сначала осуществляется качественный анализ относительной важности частичных критериев. Критерии задачи предварительно пронумеровывают по уменьшению их важности, таким образом, главным является критерий $f_1(x)$, менее важный — $f_2(x)$, потом следуют другие частичные критерии — $f_3(x)$, $f_4(x),\ldots, f_l(x)$.

Максимизируется первый по важности критерий $f_1(x)$ и определяется его наибольшее значение f_1^*. Далее задается величина допустимого снижения (уступки) $\Delta_1 \geq 0$ критерия $f_1(x)$ и ищется наибольшее значение f_2^* второго критерия $f_2(x)$ при условии, что значение первого критерия должно быть не меньше $f_1^* - \Delta_1$. Затем задается величина уступки $\Delta_2 \geq 0$ по второму критерию, который вместе с первой уступкой используется при нахождении условного максимума третьего критерия, и т.д. В итоге максимизируется последний по важности критерий $f_l(x)$ при условии, что значение каждого критерия $f_r(x)$ из $l-1$ предыдущих должно быть не меньше соответствующей величины $f_r^* - \Delta_r$, тогда полученные альтернативы считаются оптимальными.

Таким образом, метод решения задачи осуществляется путем выполнения многошаговой процедуры и состоит в последовательном включении ограничений задачи $Z(F, X)$ и учете структурных особенностей ее допустимой области. Оптимальным считается решение, являющееся решением последней задачи из последовательности задач:

$$f_1^* = \max \{ f_1(x) \mid x \in X \}, \; f_2^* = \max \{ f_2(x) \mid x \in X, f_1(x) \geq f_1^* - \Delta_1 \}, \ldots$$
$$\ldots, f_l^* = \max \{ f_l(x) \mid x \in X, f_{r-1}(x) \geq f_{r-1}^* - \Delta_{r-1}, r \in N_l \setminus \{1\} \}.$$

Отметим, что в случае, когда все Δ_r — нули, метод последовательных уступок выделяет только лексикографически оптимальные решения, которые обеспечивают наибольшее значение на множестве допустимых решений первому по важности критерию $f_1(x)$. Поэтому величины уступок, предназначенные для решения многокритериальной задачи, можно рассматривать как своеобразную меру отклонения приоритета (степени относительной важности) частичных критериев от жесткого, лексикографического.

Понятия структур доминирования и недоминируемых решений в многокритериальных задачах позволяет рассматривать общие случаи, в которых имеется информация о предпочтениях ЛПР. В [17] введены понятия нечетких выпуклых и нечетких полярных конусов, обобщающих структуры, использующиеся для определения понятий оптимальности по Парето, Слейтеру, Смейлу и др.

Если отсутствует информация как о предпочтениях на множестве альтернатив, так и о предпочтениях на множестве критериев, то, как правило, используются простейшие методы: минимаксный, максимаксный и др. При наличии информации только о сравнительной важности оценок по каждому критерию пользуются методами последовательного рассмотрения альтернатив по отдельным критериям (лексикографический метод, метод перестановок, метод последовательного сокращения невязок и др.). Если предпочтения ЛПР на множестве критериальных оценок выражены в порядковых шкалах и заданы относительно веса критериев, то используются методы голосования, наиболее известным из которых в принятии решений является метод Б. Руа.

Если можно получить относительные веса критериев и относительные ценности критериальных оценок по отдельным критериям, то применяется много различных методов, в частности прямые методы оценивания альтернатив с использованием заранее заданных оценивающих функций (например, аддитивной взвешенной свертки оценок по всем критериям) и методы теории полезности, требующие продолжительного диалога с ЛПР.

Если наряду с информацией о важности критериев известны идеальные критериальные оценки, возможно применение методов оценки достижимости целей. Достаточно подробно перечисленные методы изложены в [10, 18].

Рассмотрим некоторые простые методы выбора альтернатив отсутствия информации о предпочтениях на множестве критериев [12] и покажем, каким образом может быть расширена область их применения.

Пусть заданы или вычислены нечеткие оценки $f_{ij} = f_i(x_j)$ альтернатив $x_j, j \in N_n$, по критериям $f_i, i \in N_l$. Для вычисления нечетких оценок можно воспользоваться утверждением 2 из работы [6].

МЕТОД ПОИСКА ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НА НЕЧЕТКО ЗАДАННОМ ДОПУСТИМОМ КОМБИНАТОРНОМ МНОЖЕСТВЕ ПЕРЕСТАНОВОК

Применение метода для задач с нечеткой исходной информацией сводится к следующим действиям.

1. Упорядочить критерии по важности: $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x)$.

2. По согласию с ЛПР задать уровень $\alpha \in [0, 1]$, для которого определяется множество лучших альтернатив согласно шагам 3–5.

3. Определить нижнюю (ℓ) и верхнюю (u) границы α-уровневых подмножеств для оценки альтернатив по рассматриваемому критерию:

$$\ell(f_{ij}) = \inf_{\mu_{f_{ij}}(x) \geq \alpha} x, \quad u(f_{ij}) = \sup_{\mu_{f_{ij}}(x) \geq \alpha} x.$$

4. Для каждой пары альтернатив $z, y \in X$ вычислить показатели взаимного превышения критериальных оценок $\Delta_{zy}(z < y)$ и $\Delta_{yz}(y < z)$:

а) если оценки такие, что выполняется включение $f_{iy}^{\alpha} \subset f_{iz}^{\alpha}$, то

$$\Delta_{zy} = \frac{u(f_{iz}) - u(f_{iy})}{u(f_{iz}) - l(f_{iz})}, \quad \Delta_{yz} = \frac{l(f_{iy}) - l(f_{iz})}{u(f_{iz}) - l(f_{iz})}, \tag{5}$$

где $z, y \in A$;

б) если оценки пересекаются и $\exists x_0 \in S_{f_{iz}} : \forall y \in S_{f_{iy}}$ выполняется $x_0 > y$, то

$$\Delta_{zy} = 1 - \frac{u(f_{iy}) - l(f_{iz})}{\max\{r(z), r(y)\}}, \quad \Delta_{yz} = 0, \tag{6}$$

где $r(z) = u(f_{iz}) - l(f_{iz}),\ r(y) = u(f_{iy}) - l(f_{iy})$;

в) если оценки не пересекаются и $\forall x \in S_{f_{iz}}, \forall y \in S_{f_{iy}}$ выполняется $x > y$, то

$$\Delta_{zy} = 1, \ \Delta_{yz} = 0. \tag{7}$$

5. Вычислить показатели $\mu_{D_{ij}}$ принадлежности j-й альтернативы множеству лучших (D-множеству) альтернатив по i-му критерию

$$\mu_{D_{ij}} = \max\{0, (\max_{\substack{j \in X \\ y \neq j}} \Delta_{jy} - \max_{\substack{y \in X \\ y \neq j}} \Delta_{yj})\},$$

где Δ_{jy}, Δ_{yj} вычислены по формулам (5), (6) для i-го критерия.

6. Если D-множество по рассмотренному критерию содержит одну альтернативу с $\mu_{D_{ij}} \geq \alpha$, то она считается лучшей. Если D-множество содержит больше, чем одну альтернативу с $\mu_{D_{ij}} \geq \alpha$, то выбирается следующий по важности критерий и повторяются шаги 3–5. Если все критерии пересмотрены, D-множество содержит более одной альтернативы и $\alpha < 1$, то можно увеличить α и перейти к шагу 3. Если $\alpha = 1$, то окончательный выбор лучшей альтернативы предоставляется ЛПР.

Рассмотрим метод выбора альтернатив по обобщенному критерию максимина, который является развитием метода Вальда при нечетко заданных альтернативах.

МЕТОД ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ ПО ОБОБЩЕННОМУ КРИТЕРИЮ МАКСИМИНА

Данный метод включает следующие шаги.

1. Для каждого критерия вычислить нечеткую максимальную критериальную оценку $f_{i\max} = \widetilde{\max}\,\{f_i(x_j) \mid x_j \in X, j \in N_n\}$, $i \in N_l$.

2. Вычислить приведенные нормализованные оценки альтернатив по критериям $f_{ij^*} = f_i(x_j) / f_{i\max}$, $x_j \in X, j \in N_n$.

3. Вычислить минимальную критериальную оценку для каждой альтернативы $f_{j\min}$, определенную как $f_{j\min} = \widetilde{\min}\,\{f_{ij^*} \mid i \in N_l\}$, $j \in N_n$.

4. Найти обобщенный максимум полученных минимальных оценок $f_{0\max} = \widetilde{\max}\,\{f_{j\min} \mid j \in N_n\}$.

5. Оценить степень сходства $f_{0\max}$ каждой из оценок $f_{j\min}$. Как показатель сходства нечетких чисел можно использовать величину $\xi_j = \sum\limits_{z \in [0,1]} |\mu_{f_{0\max}}(z) - \mu_{f_{j\min}}(z)|$.

6. Выбрать альтернативу с максимальным индексом ξ_j.

Если альтернатива выбирается по максимаксному принципу, то в п. 3 нужно вместо $f_{j\min}$ вычислить $f_{j\max} = \widetilde{\max}\,\{f_{ij^*} \mid i \in N_l\}$, $j \in N_n$, и в других пунктах вместо $f_{j\min}$ использовать значение $f_{j\max}$, $j \in N_n$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕКОТОРЫХ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Двухкритериальная задача коммивояжера. Задача коммивояжера является одной из классических задач дискретной оптимизации [3]. Она заключается в составлении маршрута посещения торговым агентом, который находится в некотором начальном пункте, $(n-1)$ города. Известны стоимости переезда из города в город, которые задаются матрицей $C = [c_{ij}]_{n \times n}$. Допустимым является только такой маршрут, который предусматривает одноразовое посещение всех n городов и возвращение в начальный пункт. Очевидно, что наилучший маршрут должен минимизировать суммарную стоимость переездов.

Допустимыми решениями в этой задаче служат связные маршруты, которые однозначно определяются упорядоченным набором городов, посещаемых торговцем. Каждый такой маршрут можно отождествить с перестановкой $p = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ n чисел (упорядоченной выборкой из множества n чисел по n).

Таким образом, математическая формулировка задачи коммивояжера имеет вид

$$\min \left\{ f(p) = \sum_{k=1}^{n} c_{i_k i_{k+1}} \mid p = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in P \right\},$$

где P — множество перестановок чисел от 1 до n.

Заметим, что задача коммивояжера при произвольной (даже симметричной) матрице C является NP-полной задачей. Она имеет большое количество содержательных аналогов.

В частности, к такой модели приводит задача разработки графика переналаживания оборудования, которое может использоваться для выпуска различных типов изделий, но требует определенных затрат (временных или материальных) при переходе от одного технологического режима к другому. Очевидно, что задачу коммивояжера можно обобщить на случай многих критериев и нечетко заданного множества альтернатив.

Пусть $x=(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, произвольная нечетко заданная перестановка элементов множества $N_n=\{1, 2, \ldots, n\}$ номеров городов, является маршрутом коммивояжера. Каждому маршруту x поставим в соответствие два критерия:

$$f_1(x)=\sum_{k=1}^{n} c_{i_k i_{k+1}}, \tag{8}$$

$$f_2(x)=\max_{(i_k,\, i_{k+1})} c_{i_k i_{k+1}},\ k=1, 2, \ldots, n; \tag{9}$$

здесь $i_{n+1}=i_1$. Критерий $f_1(x)$ — длина маршрута x, $f_2(x)$ — «узкое место» этого маршрута. Задача с одним критерием (8) называется линейной, задача с критерием (9) — задачей на «узкое место».

Пусть $F(x)=(f_1(x), f_2(x))$. Задача заключается в минимизации векторного критерия $F(x)$ на нечетко заданном множестве $\widetilde{X}: \min\{F(x) \mid x\in\widetilde{X}\}$.

Банковское кредитование. Как известно, с развитием рыночных отношений процесс кредитования банками предприятий сопряжен с многочисленными факторами риска, способными повлечь за собой непогашение ссуды в установленный срок. При анализе кредитоспособности заемщика определяются возможность своевременного и полного погашения задолженности по ссуде; степень риска, которую банк готов взять на себя; размер кредита, который может быть предоставлен в конкретной ситуации; условия предоставления кредита.

В современных условиях анализ кредитоспособности [19] связан не только с оценкой платежеспособности клиента на определенную дату, но и с выявлением наиболее предпочтительных заемщиков, прогнозированием их финансовой устойчивости в перспективе, учетом возможных рисков по кредитным операциям. Проведение такого всестороннего анализа позволяет банку более эффективно управлять кредитными ресурсами и получать прибыль.

Применяемые банками методы в области кредитования основаны на данных бухгалтерских отчетов, поэтому они позволяют лишь оценить кредитоспособность ссудозаемщика, при этом не обеспечивая выбора наиболее оптимальных заемщиков в целях минимизации факторов риска для банка и наиболее эффективного планирования своей деятельности.

Построим математическую модель, основанную на использовании теории нечетких множеств и многокритериальной оптимизации, позволяющую повысить обоснованность принимаемых решений в области кредитования и обеспечить выбор наиболее рациональных вариантов из множества допустимых. Задача распределения ресурсов между альтернативами является актуальной. В частности, интерес представляют задачи комбинаторной оптимизации, заключающиеся в определении сочетаний альтернатив (проектов), максимизирующих эффективность (или эффективность на единицу требуемого ресурса) и удовлетворяющих определенным ограничениям на ресурсы.

Предположим, что в некоторый банк обратились предприятия с просьбой о предоставлении кредита. Поскольку ресурсы банка ограничены, возникает задача выбора предприятий, лучших по комплексу критериев качества. В рассматриваемой задаче предприятия являются альтернативами $a_1, \ldots, a_n$, из которых предстоит сделать выбор лучших. Для оценки кредитоспособности предприятий-заемщиков используются данные их бухгалтерской отчетности: денежные средства (c_1), краткосрочные финансовые вложения (c_2), дебиторская задолженность (c_3), запасы и затраты (c_4), собственный капитал (c_5), краткосрочные обязательства (c_6), итог баланса (c_7), валовая выручка (c_8), прибыль (c_9), на основании которых рассчитываются коэффициенты, характеризующие кредитоспособность заемщиков: коэффициент абсолютной ликвидности (F_1), промежуточный коэффициент покрытия (F_2), общий коэффициент покрытия (F_3), коэффициент финансовой независимости (F_4), коэффициент рентабельности продукции (F_5). Перечисленные коэффициенты являются критериями качества кредитоспособности предприятий и рассчитываются по следующим формулам [19]:

$$F_1 = \frac{c_1 + c_2}{c_6}, \; F_2 = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{c_6}, \quad F_3 = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}{c_6}, \; F_4 = \frac{c_5}{c_7}, \; F_5 = \frac{c_9}{c_8}.$$

Для построения математической модели рассмотрим нечеткое множество $\widetilde{A} = \{a_1, \mu_{\widetilde{A}}(a_1), a_2, \mu_{\widetilde{A}}(a_2), \ldots, a_q, \mu_{\widetilde{A}}(a_q)\}$, состоящее из единиц и нулей. Рассмотрим множество сочетаний $C(\widetilde{A})$ элементов $a = (a_{i_1}, \mu_{\widetilde{A}}(a_{i_1}), a_{i_2}, \mu_{\widetilde{A}}(a_{i_2}), \ldots$ $\ldots, a_{i_n}, \mu_{\widetilde{A}}(a_{i_n}))$ из нечетко заданного множества $\widetilde{A}$, где $a_{i_j} \in \widetilde{A}$ $\forall i_j$, $j \in N_k$, $i_s \neq i_t$, если $s \neq t$ $\forall s \in N_k$, $\forall t \in N_k$. Введем переменную

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-е предприятие выбирается для кредитования,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Математическая модель задачи имеет вид

$$\max \{F(x) \mid x \in \widetilde{X}\},$$

где $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_5(x))$, $\widetilde{X}$ — нечетко заданное множество сочетаний альтернатив.

Решение задачи с применением математического аппарата теории нечетких множеств проводится в три этапа.

1. Строятся функции принадлежности, соответствующие понятиям введенных выше коэффициентов, характеризующих кредитоспособность заемщиков. Построение таких функций проводят эксперты, располагающие знаниями в области кредитования предприятий различного функционального назначения.

2. Определяются конкретные значения функций принадлежности по критериям качества $F_1, \ldots, F_5$, соответствующие рассматриваемым альтернативам.

3. Применяются предложенные методы с целью выявления лучшей по всем критериям альтернативы. Оптимальными считаются альтернативы, максимизирующие векторный критерий и имеющие максимальное значение функции принадлежности множеству X. Если критерии, по которым осуществляется выбор вариантов, имеют одинаковую важность, то используется метод выбора альтернатив по обобщенному критерию максимина.

В случае упорядоченных по важности критериев применяется метод поиска лексикографических решений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы векторные задачи на нечетко заданных комбинаторных множествах альтернатив, разработаны методы их решения, приведены математические модели некоторых прикладных задач на комбинаторных множествах перестановок и сочетаний при нечетко заданной исходной информации.

На основании использования информации о выпуклой оболочке допустимой области, изучения свойств многогранника, вершины которого определяют нечетко заданное комбинаторное множество перестановок, разработан и обоснован метод решения сложных многокритериальных задач на указанном комбинаторном множестве. Использование структурных свойств комбинаторных многогранников дает возможность создавать эффективные алгоритмы решения новых классов векторных задач комбинаторной оптимизации при условиях нечетко заданных данных. В зависимости от специфики задачи возможны применения и других модифицированных на случай нечетко заданной информации методов многокритериального выбора. Обобщение четкого метода, как правило, не представляет трудностей, если способы представления нечетких понятий, реализации нечетких вычислений, сравнения нечетких чисел, формирования нечеткого множества лучших альтернатив выбраны адекватно условиям решаемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Inform. and Control. — 1965. — **8.** — P. 338–353.
2. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
3. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. — К.: Наук. думка, 2003. — 264 с.
4. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання / За ред. акад. НАНУ І.В. Сергієнка. — К.: Наук. думка, 2009. — 266 с.
5. Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доп. НАН України. — 2003. — № 10. — С. 80–85.
6. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 158–172.
7. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Решение и исследование векторных задач комбинаторной оптимизации на множестве полиперестановок // Пробл. управления и информатики. — 2008. — № 6. — С. 26–41.
8. Семенова Н.В. Условия оптимальности в векторных задачах комбинаторной оптимизации // Теорія оптимальних рішень. — 2008. — № 7. — С. 153–160.
9. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М. Розв'язання багатокритеріальних задач оптимізації на множині поліперестановок // Доп. НАН України. — 2009. — № 2. — С. 41–48.
10. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А.Н. Аверкин, И.З. Батыршин, А.Ф. Блишун и др.; Под ред. Д.А. Поспелова. — М.: Наука, 1986. — 312 с.
11. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука, 1981. — 208 с.
12. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьева и др. — М.: Радио и связь, 1989. — 304 с.
13. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1981. — 287 с.
14. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981. — 344 с.
15. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев: Наук. думка, 1986. — 265 с.
16. Ємець О.О., Ємець О.О. Деякі операції та відношення над нечіткими числами // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2008. — № 5. — С. 39–46.
17. Takeda E., Nishida T. Multiple criteria decision problems with fuzzy domination structures // Fuzzy Sets and Syst. — 1980. — **3.** — P. 123–136.
18. Жаке-Лагрез Э. Применение размытых отношений при оценке предпочтительности распределенных величин // Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решений. — М.: Статистика, 1979. — С. 168–183.
19. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, планирование решений в экономике. — М.: Финансы и статистика, 2001. — 364 с.

Поступила 08.07.2009