КИБЕРНЕТИКА

М.И. ШЛЕЗИНГЕР, К.В. АНТОНЮК

УДК 004.93'1:519.157

АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ДИФФУЗИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ СТРУКТУРНОГО РАСПОЗНАВАНИЯ

Ключевые слова: *структурное распознавание, разметки, дискретная оптимизация, перестановочная супермодулярность*.

ВВЕДЕНИЕ

Ряд прикладных задач распознавания изображений сводится к дискретной оптимизации особого вида [1–6], известной как задача разметки. Множество всех возможных задач этого вида образует *NP*-полный класс и поэтому не известен общий алгоритм их решения. Алгоритмы, достаточно полно описанные в обзоре [7], решают тот или иной подкласс этих задач или решают задачи приближенно. Алгоритм диффузии, которому посвящена настоящая работа, занимает в этом ряду особое место. Его принято считать «фольклорным» и не определено, кому принадлежит его авторство. Алгоритм мало исследован теоретически и только гипотетически решает некоторые (пока неясно какие) задачи разметок или решает их приблизительно (неизвестно, с какой точностью). Эта недостаточная изученность алгоритма диффузии в явном виде отражена в [7], где он представлен как общеизвестный алгоритм, не имеющий конкретного авторства.

Пробел в знаниях об алгоритмах диффузии не устраняется и в работе [2], посвященной формальным свойствам широкого класса алгоритмов, включающего и диффузию. О соотношении результатов данной статьи и работы [2] будет сказано далее, после определения основных понятий (разд. 1), когда станет возможным более конкретно указать вопросы, которые до настоящего времени оставались без ответа и на которые дан ответ в настоящей статье.

По своему характеру алгоритмы диффузии близки к эвристическим алгоритмам, известным в англоязычной терминологии как belief propagation, message passing и др. Подобно им алгоритм диффузии привлекателен своей простой и наглядной формулировкой, а также возможностью его распараллеливания. Однако его достоинства нивелируются, пока не будет установлена прямая связь этого алгоритма с задачами разметки. Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы хотя бы частично восполнить этот пробел.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Пусть T и K — два конечных множества, элементы которых называются соответственно объектами и метками, $\bar{k}: T \to K$ — функция, называемая разметкой, $k(t)$, $t \in T$, — метка объекта t, K^T — множество всех возможных разметок.

Пусть для каждого $t \in T$ дано подмножество $N(t) \subset T$ такое, что $t \notin N(t)$ и

$t \in N(t') \Leftrightarrow t' \in N(t)$. Элементы множества $N(t)$ назовем соседями объекта t. Пусть $\{t, t'\} \subset T$ — подмножество, состоящее из двух объектов, такое, что $t' \in N(t)$. Назовем его парой соседних объектов. Множество всех возможных таких пар обозначим $\Im$. Следовательно, запись $\{t, t'\} \in \Im$ эквивалентна записи $t \in N(t')$ и $t' \in N(t)$. В дальнейшем обозначение $\{t, t'\} \in \Im$ будем записывать более кратко: $tt' \in \Im$.

Упорядоченную пару (k, t), $k \in K$, $t \in T$, назовем вершиной, а неупорядоченную пару $((k, t), (k', t'))$ вершин такую, что $tt' \in \Im$, назовем дужкой. Будем считать, что вершина (k^*, t^*) входит в разметку $\bar{k}$, если $k(t^*) = k^*$, а дужка $((k, t), (k', t'))$ входит в разметку $\bar{k}$, если в эту разметку входят вершина (k, t) и вершина (k', t').

Обозначим D^* множество всех возможных дужек,

$$D^* = \{((k, t), (k', t')) \mid tt' \in \Im, k \in K, k' \in K\},$$

и введем в рассмотрение функцию $g: D^* \to R$, значение которой $g((k, t), (k', t'))$ назовем весом дужки $((k, t), (k', t'))$. Функцию g будем называть весовой функцией. Поскольку дужка определена как неупорядоченная пара вершин, то

$$g((k, t), (k', t')) = g((k', t'), (k, t)).$$

Качество $G(\bar{k})$ разметки $\bar{k} \in K^T$ определяется суммой весов входящих в нее дужек,

$$G(\bar{k}) = \sum_{tt' \in \Im} g((k(t), t), (k(t'), t')).$$

Задача разметки состоит в отыскании разметки $\bar{k}^*$ с максимальным качеством:

$$\bar{k}^* = \arg \max_{\bar{k} \in K^T} \sum_{tt' \in \Im} g((k(t), t), (k(t'), t')). \tag{1}$$

Пусть $D \subset D^*$ — некоторое непустое подмножество дужек. Назовем его согласованным, если для любой тройки t, t', t'' объектов таких, что

$$t' \in N(t), \quad t'' \in N(t),$$

и любой пары меток k, k' таких, что

$$((k, t), (k', t')) \in D, \tag{2}$$

существует метка k'' такая, что $((k, t), (k'', t'')) \in D$. Для каждой весовой функции $g: D^* \to R$ и неотрицательного числа $\varepsilon \geq 0$ определим подмножество $D_\varepsilon(g)$ дужек $((k, t), (k', t'))$ таких, что

$$g((k, t), (k', t')) \geq \max_{l \in K, l' \in K} g((l, t), (l', t')) - \varepsilon.$$

Для каждой весовой функции g определим ее характеристику $\varepsilon(g)$, как минимальное значение ε, при котором множество $D_\varepsilon(g)$ содержит согласованное подмножество дужек. Величину $\varepsilon(g)$ будем называть степенью несогласованности весовой функции g. Если $\varepsilon(g) = 0$, то функцию g назовем согласованной. Несогласованность $\varepsilon(g)$ является конструктивно вычисляемой характеристикой функции g.

Пусть g — весовая функция, а (k^*, t^*) — некоторая вершина. Определим преобразование функции g в функцию g', которое назовем (k^*, t^*)-диффузией. Это преобразование состоит из трех этапов.

1. Новым весам дужек $((k, t), (k', t'))$, не содержащим вершину (k^*, t^*), присваиваются прежние значения:

$$g'((k, t), (k', t')) = g((k, t), (k', t')).$$

2. Для каждого объекта $t' \in N(t^*)$ вычисляется вес максимальной дужки, содержащей вершину $(k^*,\ t^*)$,

$$s(t') = \max_{k'} g((k^*,\ t^*),(k',t')) .$$

3. Вес каждой дужки, содержащей вершину $(k^*,\ t^*)$, вычисляется по формуле

$$g'((k^*,\ t^*),(k',\ t')) = g((k^*,\ t^*),(k',t')) - \left[s(t') - \frac{1}{|N(t)|} \sum_{t' \in N(t)} s(t') \right],$$
$$k' \in K\ ,\ \ t' \in N(t)\ .$$

Для объекта $t^* \in T$ определим операцию t^*-диффузии как выполнение (k, t^*)-диффузии для всех $k \in K$. Определим операцию диффузии, как преобразование весовой функции g в весовую функцию $g' = F(g)$. Эта операция состоит в следующем:

— выбрать произвольный порядок $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $t_i \in T$, $n = |T|$, просмотра объектов из T ;

— для $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнить t_i-диффузию.

Преобразование весовой функции g в функцию g' с помощью диффузии является эквивалентным преобразованием. Это значит, что равенство

$$\sum_{tt' \in \Im} g((k(t), t),(k(t'), t')) = \sum_{tt' \in \Im} g'((k(t), t),(k(t'), t'))$$

выполняется для любой разметки $\bar{k} \in K^T$. Доказательство этого факта приведено в приложении.

Важное значение имеет весовая функция g^*, которая является решением уравнения $g = F(g)$ и которую назовем неподвижной точкой диффузии. Эквивалентное представление исходной весовой функции g^0 в виде неподвижной точки g^* позволяет решать определенные подклассы задач разметки. Однако из определения алгоритма F диффузии не следуют непосредственно алгоритмы решения уравнения $g = F(g)$, а следует лишь возможность построения бесконечной последовательности

$$g^0,\ g^1 = F(g^0),\ \ldots,\ g^i = F(g^{i-1}), \ldots \tag{3}$$

для любой исходной функции g^0 . Предположение, что некоторый элемент этой последовательности окажется неподвижной точкой, скорее всего, неверно. Более того, насколько известно, в настоящее время не доказано и не опровергнуто даже более слабое утверждение, сформулированное в обзоре [7].

Гипотеза. Для любой весовой функции g^0 последовательность

$$g^1 = F(g^0)\ ,\ g^2 = F(g^1)\ ,\ \ldots\ ,\ g^i = F(g^{i-1}), \ldots$$

имеет предел g^* такой, что $g^* = F(g^*)$.

Справедливость этой гипотезы позволила бы рассматривать диффузию, как инструмент для отыскания «приблизительно» неподвижной точки. При этом возникли бы новые вопросы, требующие ответа, а именно: каким должно быть условие останова, которое позволило бы утверждать, что функция g^i, полученная на *i*-й итерации, уже «приблизительно» неподвижна; каким образом из получения приблизительно неподвижной весовой функции следует возможность приблизительного решения задачи; и, наконец, как следует конкретизировать само понятие «приблизительно». Отсутствие ответов на эти вопросы, равно как и недоказанность самой гипотезы, из которой эти вопросы следуют, свидетельствует о недостаточной теоретической исследованности алгоритмов диффузии, о чем кратко упоминалось во введении.

В работе [2] анализируется широкий класс алгоритмов, включающий в себя и диффузию, а также доказывается, что последовательность весовых функций содержит сходящуюся подпоследовательность, пределом которой является неподвижная точка. Это свойство еще более слабое, чем сформулированное в гипотезе [7]. Следовательно, приведенные выше вопросы остаются без ответа. В частности, условие останова алгоритма, описанного в [2], не гарантирует его останова за конечное время и, таким образом, не является условием останова, и алгоритм может работать бесконечно долго.

В настоящей статье алгоритмы диффузии исследуются, исходя не из их предположительной сходимости к неподвижной точке, а из уменьшения несогласованности весовой функции. Основной результат работы состоит в доказательстве следующего факта.

Теорема 1. Пусть для исходной весовой функции g^0 построена последовательность $g^1, \ldots, g^i, \ldots$ такая, что $g^i = F(g^{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots$ В таком случае

$$\lim_{i \to \infty} \varepsilon(g^i) = 0 .$$

Доказательство теоремы приводится в приложении.

Теорема утверждает, что диффузия есть инструмент, с помощью которого любая весовая функция g^* при любом $\varepsilon_0 > 0$ за конечное время преобразуется в эквивалентную ей функцию g^* такую, что $\varepsilon(g^*) \le \varepsilon_0$. Эквивалентное представление исходной функции в виде ε_0-согласованной функции позволяет находить приближенное с точностью, зависящей от ε_0, решение некоторых подклассов задач разметки, как это показано в следующих разделах.

2. АЦИКЛИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Пусть $\Im$ — множество пар соседних объектов, не образующее циклов. Пусть также g — весовая функция, g^* — найденная с помощью алгоритма диффузии весовая функция, эквивалентная g, и такая, что $\varepsilon(g^*) \le \varepsilon_0$. Это значит, что для любой разметки $\bar{k} \in K^T$ выполняется равенство

$$\sum_{tt' \in \Im} g^*((k(t), t), (k(t'), t')) = \sum_{tt' \in \Im} g((k(t), t) , (k(t'), t')) .$$

Из факта, что $\varepsilon(g^*) \le \varepsilon_0$, следует существование согласованного подмножества D^* дужек $((k, t), (k', t'))$, для которых справедливо неравенство

$$g^*((k, t), (k', t')) = \max_{l \in K} \max_{l' \in K} g^*((l, t), (l', t')) - \varepsilon_0.$$

Покажем, что существует разметка $\bar{k}^*\colon T \to K$, составленная из дужек, входящих в D^*. Эта разметка находится следующим образом.

1. Представим объекты из множества T в виде последовательности $t_1, t_2, \ldots, t_n$ так, что каждое из подмножеств $\{t_1, t_2, \ldots, t_i\}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, оказывается связным.

2. Выберем метки $k^*(t_1)$ и $k^*(t_2)$ так, что

$$((k^*(t_1), t_1), (k^*(t_2), t_2)) \in D^*. \tag{4}$$

В силу согласованности множества D^* условие (4) выполнимо.

3. Для $i = 3, 4, \ldots, n$ найдем объект $t_i^* \in \{t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}\}$ такой, что $\{t_i^*, t_i\} \in \Im$, и выберем метку $k^*(t_i)$ такую, что

$$((k(t_i^*), t_i^*), (k^*(t_i), t_i)) \in D^* . \tag{5}$$

В силу согласованности D^* условие (5) выполнимо. Для построенной разметки $\bar{k}^*$ выполняются условия

$$((k^*(t), t), (k^*(t'), t')) \in D^*, \; tt' \in \Im ,$$

а следовательно, и неравенства

$$g((k^*(t), t), (k^*(t'), t')) \geq \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g((k, t), (k', t')) - \varepsilon_0, \; tt' \in \Im .$$

Для этой же разметки $\bar{k}^*$ справедлива цепочка

$$\max_{\bar{k} \in K^T} G(\bar{k}) = \max_{\bar{k} \in K^T} \sum_{tt' \in \Im} g((k(t), t), (k(t'), t')) \leq$$

$$\leq \sum_{tt' \in \Im} \max_{k, k'} g((k, t), (k', t')) \leq \sum_{tt' \in \Im} [g((k^*(t), t), (k^*(t'), t')) + \varepsilon_0] =$$

$$= G(\bar{k}^*) + |\Im| \cdot \varepsilon_0 = G(\bar{k}^*) \; + \; (|T| - 1) \cdot \varepsilon_0 .$$

Таким образом, для ациклических задач алгоритм диффузии позволяет находить разметку, качество которой отличается от качества наилучшей разметки не более чем на величину $(|T|-1) \cdot \varepsilon_0$. Если же исходные веса дужек — целые числа, то диффузия позволяет находить оптимальную разметку точно. Для этого надо ее реализовать со значением $\varepsilon_0 < \dfrac{1}{|T|-1}$.

3. СУПЕРМОДУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ

Пусть множество K меток упорядочено, так что для любых двух меток k и k' справедливо либо $k = k'$, либо $k < k'$, либо $k > k'$. Задача разметки называется супермодулярной, если для любых $tt' \in \Im$, $k_1 > k_2$, $k'_1 > k_2$ выполняется неравенство

$$g((k_1, t), (k'_2, t')) + g((k_2, t), (k'_1, t')) \leq$$

$$\leq g((k_1, t), (k'_1, t')) + g((k_2, t), (k'_2, t')) . \tag{6}$$

Пусть $S(k, t, t')$, $k \in K$, $t \in T$, $t' \in N(t)$, — любые числа, с помощью которых функция g преобразуется в функцию g' со значениями

$$g'((k, t), (k', t')) = g((k, t), (k'_1, t')) + S(k, t, t') + S(k', t', t) . \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что если неравенство (6) выполняется для весовой функции g, то оно выполняется и для весовой функции g', значения которой определяются выражением (7). Следовательно, неравенство (6) не нарушается в процессе диффузии, так как преобразование весов дужек при диффузии имеет именно вид (7).

Пусть g — супермодулярная весовая функция, а g^* — эквивалентная ей функция, полученная в процессе диффузии и такая, что $\varepsilon(g^*) = \varepsilon_0$. Находим разметку $\bar{k}^*$: $T \to K$ по следующим правилам.

1. Построим согласованное множество D^* дужек $((k,t),(k',t'))$ таких, что

$$g^*((k,t),(k',t')) \ge \max_{l \in K} \max_{l' \in K} g^*((l,t),(l',t')) - \varepsilon_0 .$$

Такое непустое множество существует, так как $\varepsilon(g^*) = \varepsilon_0$.

2. Для каждого объекта $t \in T$ определим множество $K(t)$ меток:

$$K(t) = \{k \in K \mid \forall t' \in N(t) \; \exists \, k' \in K((k,t),(k',t')) \in D^*\} . \tag{8}$$

В силу согласованности множества D^* множество $K(t)$ непустое для каждого объекта $t \in T$.

3. Определим разметку $\bar{k}^*: T \to K$ со значениями

$$k^*(t) = \max_{k \in K(t)} k . \tag{9}$$

Введем обозначение

$$c(t,t') = \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g((k,t),\ (k',t')),\ tt' \in \Im,$$

и докажем, что для любой пары t и t' соседних объектов для найденной разметки $\bar{k}^*$ выполняется неравенство

$$g^*((k^*(t),t),\ (k^*(t'),t')) \ge c(t,t') - 2\varepsilon_0.$$

По определению (8) и (9) существуют метка $k \in K$, $k \le k^*(t)$, такая, что

$$g^*((k,t),(k^*(t'),t')) \ge c(t,t') - \varepsilon_0, \tag{10}$$

и метка $k' \in K$, $k' \le k^*(t')$, такая, что

$$g^*((k^*(t),t),(k',t')) \ge c(t,t') - \varepsilon_0, \tag{11}$$

и, естественно, справедливо неравенство

$$g^*((k,t),(k',t')) \le c(t,t') . \tag{12}$$

С учетом супермодулярности функции g^* запишем неравенство (6) в виде

$$g^*((k^*(t),t),(k^*(t'),t')) \ge$$
$$\ge g^*((k,t),(k^*(t'))) + g^*((k^*(t),t),(k',t')) - g^*((k,t),(k',t')) , \tag{13}$$

подставим вместо слагаемых в правой части этого неравенства правые части неравенств (10), (11), (12) и таким образом доказываем справедливость неравенства

$$g^*((k^*(t),t),(k^*(t'),t')) \ge c(t,t') - 2\varepsilon_0. \tag{14}$$

Справедливой является следующая цепочка:

$$\max_{\bar{k} \in K^T} G(\bar{k}) =$$
$$= \max_{\bar{k} \in K^T} \sum_{tt' \in \Im} g((k(t),t),(k(t'),t')) = \max_{\bar{k} \in K^T} \sum_{tt' \in \Im} g^*((k(t),t),(k(t'),t')) \le$$
$$\le \sum_{tt' \in \Im} c(t,t') \le \sum_{tt' \in \Im} [g^*((k^*(t),t),(k^*(t'),t')) + 2\varepsilon_0] = G(\bar{k}^*) + |\Im| \cdot 2 \cdot \varepsilon_0. \tag{15}$$

Таким образом, для супермодулярных задач диффузия позволяет найти разметку, качество которой отличается от наилучшего возможного качества не более чем на $2 \cdot |\Im| \cdot \varepsilon_0$. Для целочисленной весовой функции g оптимальная разметка может быть найдена точно. Для этого необходимо, чтобы $\varepsilon < \dfrac{1}{2 \cdot |\Im|}$.

4. ПЕРЕСТАНОВОЧНО-СУПЕРМОДУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ

Пусть g — некоторая весовая функция и для каждого объекта t определена нумерация $z_t : K \to \{1, 2, \ldots, |K|\}$ так, что $z_t(k)$ — номер метки k в объекте t, причем $(k \neq k') \Rightarrow (z_t(k) \neq z_t(k'))$. Весовая функция g называется перестановочно-супермодулярной [8], если существуют такие номера $z_t(k)$, $t \in T$, $k \in K$, что для каждой пары $tt' \in \Im$ и каждой четверки меток k_1, k_2, k'_1, k'_2 таких, что $z_t(k_1) > z_t(k_2)$, $z_{t'}(k'_1) > z_{t'}(k'_2)$, выполняется неравенство

$$g((k_1, t), (k'_2, t')) + g((k_2, t), (k'_1, t')) \leq$$
$$\leq g((k_1, t), (k'_1, t')) + g((k_2, t), (k'_2, t')) . \tag{16}$$

В случае, когда веса дужек не равны $-\infty$, перестановочная супермодулярность является конструктивно распознаваемым свойством весовой функции. В работе [8] описан алгоритм полиномиальной сложности, который отвечает на вопрос о существовании нумерации, удовлетворяющей (16), и указывает эту нумерацию, если она существует. В этом случае (когда веса дужек не равны $-\infty$) решение любой перестановочно-супермодулярной задачи сводится к отысканию необходимой нумерации и последующему решению задачи как супермодулярной. В общем случае, когда веса дужек могут принимать и значения $-\infty$, такой путь решения задач невозможен, поскольку алгоритмы распознавания перестановочной супермодулярности неизвестны.

Сформулируем алгоритм решения любой перестановочно-супермодулярной задачи без отыскания нумерации, преобразующей исходную перестановочно-супермодулярную функцию в супермодулярную. Затем выполним незначительную модификацию алгоритма, в силу которой он окажется способным решать более широкий класс задач, а не только перестановочно-супермодулярные задачи.

Пусть g — перестановочно-супермодулярная функция, принимающая целые значения, g^* — ее эквивалент, полученный с помощью диффузии, несогласованность которого $\varepsilon(g^*) = \varepsilon_0$ меньше, чем $\dfrac{1}{2 \cdot |\Im|}$. Если бы нумерация $z_t(k)$, $t \in T$, $k \in K$, была известной, то можно было бы определить разметку $\bar{k}^*$ подобно тому, как это выполнялось в предыдущем разделе. А именно:

1) определить согласованное подмножество D^* дужек таких, что

$$g^*((k, t), (k', t')) \geq \max_{l, l'} g^*((l, t), (l', t')) - \varepsilon_0 ;$$

2) для каждого $t \in T$ определить множество

$$K(t) = \{k \in K \mid \forall t' \in N(t) \; \exists \, k' \in K ((k, t), (k', t')) \in D^*\} ;$$

3) определить разметку $\bar{k}^*$ так, что

$$k^*(t) = \arg \max_{k \in K(t)} z_t(k) , \; t \in T .$$

Для этой разметки справедливо неравенство

$$\max_{\bar{k} \in K^T} \sum_{tt' \in \Im} g((k(t), t), (k(t'), t')) - \sum_{tt' \in \Im} g((k^*(t), t), (k^*(t'), t')) \leq 2 \cdot |\Im| \cdot \varepsilon_0 < 1 .$$

Учитывая, что все слагаемые в левой части этого неравенства — целые числа, найденная разметка $\bar{k}^*$ является оптимальной.

Если нумерация $z_t(k)$, $t \in T$, $k \in K$, неизвестна, то из неравенства $\varepsilon(g^*) < \dfrac{1}{2 \cdot |\Im_0|}$ непосредственно следует лишь вывод о качестве оптимальной разметки. Саму оптимальную разметку следует находить по более сложному алгоритму.

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_{|T|}$ — произвольная упорядоченность объектов множества T, а $T_0, T_1, \ldots, T_{|T|}$ — последовательность подмножеств $T_i \subset T$ такая, что $T_0 = \varnothing$ и $T_i = T_{i-1} \cup \{t_i\}$, $i = 1, \ldots, |T|$.

Для любой весовой функции g и любой вершины (k^*, t^*) определим новую весовую функцию $g' = F(g, k^*, t^*)$ так, что

$$g'((k,t),(k',t')) = -\infty, \text{ если } t^* \in \{t, t'\} \text{ и } (k^*, t^*) \notin \{(k,t),(k't')\},$$

$$g'((k,t),(k',t')) = g((k,t),(k',t')) \text{ в противном случае.} \tag{17}$$

Преобразование весовой функции g в функцию g' назовем (k^*, t^*)-исключением дужек.

Алгоритм решения перестановочно-супермодулярной задачи с целочисленными весами дужек состоит в следующем.

1. Определить порядок $(t_1, t_2, \ldots, t_{|T|})$ просмотра объектов из T так, что $t_i \in T$, $(i \neq j) \Rightarrow (t_i \neq t_j)$.

2. Определить число $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2 \cdot |\Im| + 1}$.

3. Для исходной весовой функции g с помощью диффузии построить ее эквивалент g_1 такой, что $\varepsilon(g_1) \le \varepsilon_0$.

4. Построить D_1 — согласованное подмножество множества дужек $D_{\varepsilon_0}(g_1)$.

5. Определить наибольшее целое число A, не превосходящее числа

$$\sum_{tt' \in \Im} \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g_1((k,t),(k',t')).$$

Комментарий. Число A есть качество искомой оптимальной разметки,

$$A = \max_{\bar{k} \in K^T} \sum_{tt' \in \Im} g((k(t),t),(k(t'),t')).$$

6. Для $i = 1, 2, \ldots, |T|$ выполнить следующие операции.

6.1. Построить множество

$$K(t_i) = \{k \in K \mid \forall t' \in N(t_i)\ \exists\, k' \in K ((k,t_i),(k',t')) \in D_i\}.$$

Комментарий. Множество $K(t_i)$ содержит значение $k^*(t_i)$ искомой разметки.

6.2. Для каждой метки $k \in K(t_i)$ необходимо:

— преобразовать весовую функцию g_i в g'_i в соответствии с формулой (17), т.е. выполнить (k_i, t_i)-исключение дужек;

— с помощью диффузии получить функцию g_i^*, эквивалентную g'_i, такую, что $\varepsilon(g_i^*) \le \varepsilon_0$;

— если

$$\sum_{tt' \in \Im} \max_{k} \max_{k'} g_i^*((k,t),(k',t')) \ge A, \tag{18}$$

то определить $k^*(t_i) = k_i$ и перейти на п. 6.3; в противном случае продолжить выполнение цикла 6.2 для очередной еще не рассмотренной метки из множества $K(t_i)$.

Комментарий. Если исходная функция g перестановочно-супермодулярная, то условие (18) выполнится по крайней мере для одной метки из $K(t_i)$.

6.3. Выполнить $i = i+1$; $g_i = g^*_{i-1}(k)$, $D_i = D_{\varepsilon_0}(g_i)$.

Если $i \le |T|$, продолжить цикл 6.

7. Завершить работу алгоритма.

Комментарий. Метки $k^*(t_1), k^*(t_2), \ldots, k^*(t_{|T|})$ образуют разметку с качеством $A = \max\limits_{\bar{k} \in K^T} \sum\limits_{tt' \in \Im} g((k(t), t), (k(t'), t'))$.

Как видим, для реализации рассмотренного алгоритма не обязательно знать конкретную нумерацию $z_t(k)$, $t \in T$, $k \in K$, вершин, которая определяет перестановочную супермодулярность решаемой задачи. Тем не менее, если на вход алгоритма подать перестановочно-супермодулярную задачу, то алгоритм ее гарантированно решает и при неизвестных номерах $z_t(k)$, $t \in T$, $k \in K$. Более того, алгоритм решает и некоторые задачи, не являющиеся перестановочно-супермодулярными, если в них гарантируется выполнение условия (18) по крайней мере для одной метки $k \in K$ и для каждого объекта $t \in T$. В силу этого алгоритм можно доопределить так, чтобы он завершил работу, если для очередного объекта t_i условие (18) нарушится для всех меток $k \in K(i)$. Завершение работы по этому условию должно пониматься как отказ от решения задачи. Таким образом, областью определения алгоритма становится множество всех возможных задач, и для каждой задачи, предложенной для решения, алгоритм за конечное время выходит на один из двух вариантов завершения работы: отказ от решения предложенной задачи или построение гарантированно оптимальной разметки.

Таким образом, в области определения алгоритма (а это множество всех возможных задач разметки) выделено подмножество задач, которое можно назвать областью его компетентности. Для использования алгоритма на его вход можно подавать любые задачи (а не только из этого более узкого подмножества), и алгоритм сам определяет, входит ли предложенная задача в область его компетентности или не входит. При этом область компетентности алгоритма включает все перестановочно-супермодулярные задачи, а также некоторые задачи, не являющиеся такими.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Алгоритм диффузии пригоден для решения определенных подклассов задач оптимальной разметки и может занять свое место среди других известных алгоритмов того же назначения, обладая как преимуществами, так и недостатками по сравнению с ними.

Алгоритм диффузии решает приближенно (а при определенных, не слишком жестких ограничениях и точно) все ациклические задачи и все супермодулярные задачи. При решении именно этих задач алгоритм диффузии, естественно, уступает специальным алгоритмам, предназначенным только для этих задач. Для ациклических задач следует отдать предпочтение алгоритмам динамического программирования (например, [12]), а при решении супермодулярных задач более предпочтительно сводить их к известным задачам о максимальном потоке в графе [3, 11]. Однако динамическое программирование применимо только к ациклическим задачам, а к поиску максимального потока сводятся только супермодулярные задачи. Эти два подхода по своей идеологии существенно отличаются один от другого. Алгоритм же диффузии единообразно решает все супермодулярные, все ациклические и многие другие задачи (например, перестановочно-супермодулярные).

Неподвижной точкой алгоритма диффузии является согласованная весовая функция. Это роднит его со многими другими известными алгоритмами — от самого раннего [10] до более поздних [2, 7, 13], что определяет общие достоинства и общие недостатки этих алгоритмов. Все они выполняют эквивалентное преобразование весовой функции и в конечном итоге находят оценку сверху для качества оптимальной разметки, названной в статье энергией весовой функции. Некоторые задачи преобразуются алгоритмом диффузии так, что их энергия становится сколь угодно близкой к качеству оптимальной разметки, а иногда и равной этому качеству. Это — общее для всех таких алгоритмов достоинство. Их общий недостаток состоит в том, что эквивалентное преобразование весовой функции в согласованную функцию не гарантирует получения наименьшего значения энергии. Это значит, что существуют такие весовые функции, которые можно эквивалентно преобразовать таким образом, что их энергия становится равной качеству оптимальной разметки, однако этот наилучший эквивалент не будет найден алгоритмом диффузии, равно как и другими родственными с ним алгоритмами [2, 7, 10, 13]. Более подробно об этом недостатке ыизложено в работе [5], где предложены пути его преодоления.

Рассмотренные алгоритмы относятся к ряду известных алгоритмов решения оптимизационных задач структурного распознавания; каждый из них имеет свои преимущества перед другими. Что касается достоинств алгоритма диффузии по сравнению со всеми другими, то, несомненно, это — его исключительная наглядность и простота реализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлезингер М.И. Синтаксический анализ двумерных зрительных сигналов в условиях помех // Кибернетика. — 1976. — № 4. — С. 113–130.
2. Kolmogorov V. Convergent tree-reweighted message passing for energy minimization // IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI). — 2006. — **28**, N 10. — P. 1568–1583.
3. Boykov Y., Veksler O., Zabih R. Fast approximate energy minimization via graph cuts // IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI). — 2001. — **23**, N 11. — P. 1222–1239.
4. Schlesinger M.I., Flach B. Some solvable subclasses of structural recognition problems. — Praha: Czech Pattern Recognition Workshop, 2000. — P. 55–62.
5. Шлезингер М.И., Гигиняк В.В. Решение (max,+)-задач структурного распознавания с помощью их эквивалентных преобразований. I // УСИМ. — 2007. — № 1. — С. 3–15.
6. Шлезингер М.И., Гигиняк В.В. Решение (max,+)-задач структурного распознавания с помощью их эквивалентных преобразований. II // Там же. — 2007. — № 2. — С. 5–17.
7. Werner T. A linear programming approach to max-sum problem: A review // IEEE Trans. on Pattern Analusis and Machine Intelligence (PAMI). — 2007. — **29**, N 7. — C. 1165–1179.
8. Schlesinger D. Exact solution of permuted submodular minsum problems / A.L. Yuille et al. (Eds.): CVPR, 2007. — P. 28–38.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит. — 2001. — Т. 1. — 616 с.
10. Коваль В.К., Шлезингер М.И. Двумерное программирование в задачах анализа изображений // Автоматика и телемеханика. — 1976 . — № 8. — С. 149–168.
11. Ishikawa H., Geiger D. Segmentation by grouping junctions // IEEE Conf. Comp. Vision and Pattern Recogn., 1998. — P. 125–131.
12. Шлезингер М., Главач В. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию. — К.: Наук. думка, 2004. — 545 с.
13. Wainwright M., Jaakkola T., Willsky A. Exact MAP estimates by (hyper) tree agreement / In S.T.S. Becker and K. Obermayer (Eds.) // Advances in Neural Information Processing Systems. — 2003. — N 15. — C. 809–816.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Диффузия осуществляет эквивалентное преобразование весовой функции в том понимании, как это утверждает следующая лемма.

Лемма 1. Пусть g — весовая функция, $g^* = F(g)$ — результат ее преобразования алгоритмом диффузии. Тогда для любой разметки $\bar{k}: T \to K$ выполняется равенство

$$\sum_{tt' \in \Im} g((k(t), t), (k(t'), t')) = \sum_{tt' \in \Im} g^*((k(t), t), (k(t'), t')). \qquad (1)$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно убедиться в справедливости следующего более сильного утверждения: $(k^*,\ t^*)$-диффузия есть эквивалентное преобразование весовой функции при любых $k^* \in K$, $t^* \in T$.

Произвольно выберем некоторую пару $(k^*,\ t^*)$ и зафиксируем ее для дальнейшего рассмотрения. Пусть g — весовая функция, а g^* — результат ее преобразования с помощью $(k^*,\ t^*)$-диффузии. Рассмотрим разметку $\bar{k}: T \to K$ такую, что $k(t^*) \neq k^*$. Для этой разметки равенство (1) выполняется, так как для любой дужки $((k(t), t), (k(t'), t'))$, входящей в эту разметку, выполняется равенство

$$g((k(t), t), (k(t'), t')) = g^*((k(t), t), (k(t'), t')).$$

Для разметки $\bar{k}: T \to K$ такой, что $k(t^*) = k^*$, равенство (1) также выполняется. Действительно, в соответствии с определением (k^*, t^*)-диффузии новые веса дужек вида $((k^*, t^*), (k', t'))$, $t' \in N(t^*)$, $k' \in K$, вычисляются по формуле

$$g^*((k^*,\ t^*), (k', t')) = g((k^*,\ t^*), (k', t')) - s(t') + \frac{1}{|N(t^*)|} \sum_{t' \in N(t^*)} s(t'),$$

где

$$s(t') = \max_{k' \in K} g((k^*,\ t^*), (k', t')).$$

Веса всех остальных дужек остаются неизменными. Поэтому для такой разметки справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{tt' \in \Im} g((k(t), t), (k(t'), t')) - \sum_{tt' \in \Im} g^*((k(t), t), (k(t'), t')) =$$

$$= \sum_{t' \in N(t^*)} g((k^*,\ t^*), (k(t'), t')) - \sum_{t' \in N(t^*)} g^*((k^*,\ t^*), (k(t'), t')) =$$

$$= \sum_{t' \in N(t^*)} s(t') - \sum_{t' \in N(t^*)} \frac{1}{|N(t^*)|} \sum_{t'' \in N(t^*)} s(t'') = 0. \ \blacksquare$$

Исходя из того, что $(k^*,\ t^*)$-диффузия является эквивалентным преобразованием весовой функции при любых $k^* \in K$, $t^* \in T$, непосредственно следует, что t^*-диффузия также является эквивалентным преобразованием, равно как и диффузия F. Очевидны также следующие два свойства $(k^*,\ t^*)$-диффузии.

Лемма 2. Пусть g^* — весовая функция, полученная в результате применения $(k^*,\ t^*)$- диффузии к произвольной весовой функции g. В таком случае все величины

$$\max_{k' \in K} g^*((k^*,\ t^*), (k',\ t')),\ t' \in N(t^*),$$

равны между собой.

Лемма 3. Пусть g^* — весовая функция, полученная в результате применения t^*-диффузии к произвольной весовой функции g. В таком случае все величины

$$\max_{k \in K} \max_{k' \in K} g^*((k, t^*), (k', t')),\ t' \in N(t^*),$$

равны между собой.

Доказательство двух последних лемм непосредственно следует из определений (k, t)-диффузии и t-диффузии, поэтому здесь не приводится.

Для любой весовой функции g определим ее характеристику $E(g)$, называемую энергией функции:

$$E(g) = \sum_{tt' \in \Im} \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g((k, t), (k', t')). \qquad (2)$$

Лемма 4. Пусть g^* — весовая функция, а $F(g)$ — результат применения диффузии к функции g. В таком случае

$$E(F(g)) \le E(g). \qquad (3)$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно доказать более сильное утверждение:

для произвольного $t^* \in T$ энергия весовой функции при t^*-диффузии не возрастает.

Пусть g^* — весовая функция, полученная в результате применения t^*-диффузии к функции g. Для доказательства (3) достаточно доказать, что

$$\sum_{t' \in N(t^*)} \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g((k, t^*), (k', t')) \geq \sum_{t' \in N(t^*)} \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g^*((k, t^*), (k', t')), \tag{4}$$

так как веса дужек $((k, t), (k', t'))$, которые отсутствуют как в левой, так и в правой частях неравенства (4), не изменились при t^*-диффузии. Из определения t^*-диффузии для весов g и g^* справедливы следующие равенства:

$$\sum_{t' \in N(t^*)} \max_{k' \in K} g^*((k, t^*), (k', t')) = \sum_{t' \in N(t^*)} \max_{k' \in K} \left[g((k, t^*), (k', t')) - \max_{l' \in K} g((k, t^*), (l', t')) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|N(t^*)|} \sum_{t' \in N(t^*)} \max_{l' \in K} g((k, t^*), (l', t')) \right] = \sum_{t' \in N(t^*)} \max_{k' \in K} g((k, t^*), (k', t')).$$

Отсюда следует, что

$$\max_{k \in K} \sum_{t' \in N(t^*)} \max_{k' \in K} g((k, t^*), (k', t')) = \max_{k \in K} \sum_{t' \in N(t^*)} \max_{k' \in K} g^*((k, t^*), (k', t')). \tag{5}$$

Для левой части (5) справедливо очевидное неравенство

$$\max_{k \in K} \sum_{t' \in N(t^*)} \max_{k' \in K} g((k, t^*), (k', t')) \leq \sum_{t' \in N(t^*)} \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g((k, t^*), (k', t')). \tag{6}$$

Для правой части (5) справедливо равенство

$$\max_{k \in K} \sum_{t' \in N(t^*)} \max_{k' \in K} g^*((k, t^*), (k', t')) = \sum_{t' \in N(t^*)} \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g^*((k, t^*), (k', t')), \tag{7}$$

поскольку согласно лемме 2 величина $\max\limits_{k' \in K} g^*((k, t^*), (k', t'))$ не зависит от t'. Из равенств (5), (7) и неравенства (6) следует (4). ■

Для заданной весовой функции g и числа $\varepsilon \geq 0$ определено подмножество $D_\varepsilon(g)$:

$$D_\varepsilon(g) = \{((k, t), (k', t')) | g((k, t), (k', t')) \geq \max_{l \in K, l' \in K} g((l, t), (l', t')) - \varepsilon\}. \tag{8}$$

Для заданной весовой функции g определена величина $\varepsilon(g)$ как минимальное число ε, при котором подмножество $D_\varepsilon(g)$ содержит в себе согласованное подмножество дужек.

Лемма 5. Для любой весовой функции g такой, что $\varepsilon(g) > 0$, имеет место либо строгое неравенство $E(F(g)) < E(g)$, либо строгое включение $D_0(F(g)) \subset D_0(g)$.

Доказательство. 1. Докажем, что если

$$E(F(g)) = E(g), \tag{9}$$

то имеет место включение (не обязательно строгое)

$$D_0(F(g)) \subseteq D_0(g). \tag{10}$$

Для этого достаточно доказать, что аналогичное свойство выполняется при t^*-диффузии для произвольного $t^* \in T$. Выберем такое $t^* \in T$ и зафиксируем его для последующего рассмотрения. Обозначим g и g^* весовые функции до и после t^*-диффузии соответственно. Для доказательства включения (10) необходимо доказать, что для любой дужки $((k, t), (k', t'))$, для которой выполняется равенство

$$g^*((k, t), (k', t')) = \max_{l \in K} \max_{l' \in K} g^*((l, t), (l', t')), \tag{11}$$

выполняется и равенство

$$g((k, t), (k', t')) = \max_{l \in K} \max_{l' \in K} g((l, t), (l', t')). \tag{12}$$

2. Импликация (11), (12), естественно, справедлива для тех дужек $((k, t), (k', t'))$, для которых $t \neq t^*$ и $t' \neq t^*$, так как по определению t^*-диффузии для таких дужек

$$g^*((k, t), (k', t')) = g((k, t), (k', t')).$$

3. Рассмотрим дужку вида $((k^*, t^*), (k^{**}, t^{**}))$, $t^{**} \in N(t^*)$, для которой выполняется (11),

$$g^*((k^*,\ t^*),(k^{**},\ t^{**}))=\max_{l\in K}\ \max_{l'\in K} g^*((l,t^*),(l',t^{**})). \tag{13}$$

Из этого равенства следует, что

$$\max_{l'\in K} g^*((k^*,\ t^*),(l',\ t^{**}))=\max_{l\in K}\ \max_{l'\in K} g^*((l,t^*),(l',t^{**})).$$

В силу лемм 2 и 3 из последнего равенства следует, что равенство

$$\max_{k'\in K} g^*((k^*,t^*),(k',t'))=\max_{k\in K}\max_{k'\in K} g^*((k,t^*),(k',t')) \tag{14}$$

справедливо для всех $t'\in N(t^*)$.

Выберем метки $k(t')$, $t'\in N(t^*)$, для которых

$$k(t')=\arg\max_{l'} g^*((k^*,t^*),(l',t')).$$

При этом в качестве $k(t^{**})$ можно выбрать k^{**}. Для меток, выбранных таким образом, выполняется равенство

$$\sum_{t'\in N(t^*)} g^*((k^*,\ t^*),(k(t'),t'))=\sum_{t'\in N(t^*)}\max_{l\in K}\ \max_{l'\in K} g^*((k,t^*),(l',t')). \tag{15}$$

4. В процессе доказательства леммы 1 было установлено, что t^*-диффузия является эквивалентным преобразованием весовой функции, поэтому

$$\sum_{t'\in N(t^*)} g^*((k^*,\ t^*),(k(t'),t'))=\sum_{t'\in N(t^*)} g((k^*,\ t^*),(k(t'),t')). \tag{16}$$

5. Запишем условие (9) более подробно:

$$\sum_{t'\in N(t^*)}\max_{l\in K}\ \max_{l'\in K} g^*((l,t^*),(l',t'))=\sum_{t'\in N(t^*)}\max_{l\in K}\ \max_{l'\in K} g((l,t^*),(l',t')). \tag{17}$$

Из (15)-(17) следует равенство

$$\sum_{t'\in N(t^*)} g((k^*,\ t^*),(k(t'),t'))=\sum_{t'\in N(t^*)}\max_{l\in K}\ \max_{l'\in K} g((l,t^*),(l',t')),$$

которое возможно тогда и только тогда, когда равенство

$$g((k^*,\ t^*),(k(t'),t'))=\max_{l\in K}\ \max_{l'\in K} g((l,t^*),(l',t'))$$

выполняется для всех $t'\in N(t^*)$, в том числе для t^{**}.

Таким образом доказано, что из равенства (13) следует равенство

$$g((k^*,\ t^*),(k^{**},\ t^{**}))=\max_{l\in K}\ \max_{l'\in K} g((l,t^*),(l',t^{**})),$$

т.е. доказано включение (10).

6. Докажем, что из условий $\varepsilon(g)>0$ и $E(F(g))=E(g)$ следует строгое включение $D_0(F(g))\subset D_0(g)$.

7. Диффузия F есть суперпозиция $(k^*,\ t^*)$-диффузий, $k^*\in K$, $t^*\in T$. При этом в силу условия $\varepsilon(g)>0$ по крайней мере для одной пары $(k^*,\ t^*)$ окажется, что существуют такие два объекта $t'\in N(t^*)$ и $t''\in N(t^*)$, что

$$\max_{k'\in K} g((k^*,\ t^*),(k',t'))<\max_{k\in K}\ \max_{k'\in K} g((k,t^*),(k',t')) \tag{18}$$

и

$$\max_{k''\in K} g((k^*,\ t^*),(k'',t''))=\max_{k\in K}\ \max_{k''\in K} g((k,t^*),(k'',t'')). \tag{19}$$

Отсутствие такой пары $(k^*,\ t^*)$ обозначало бы, что множество $D_0(g)$ дужек согласовано, что противоречит условию $\varepsilon(g)>0$.

8. Для пары $(k^*,\ t^*)$, удовлетворяющей условиям (18) и (19), определим метки $k(t)$, $t\in N(t^*)$, так, что

$$g((k^*,\ t^*),(k(t),t))=\max_{l'\in K} g((k^*,\ t^*),(l',t)), \tag{20}$$

и обозначим g^* весовую функцию, полученную в результате t^*-диффузии над функцией g. В силу (19) для дужки $((k^*,t^*),(k(t''),t''))$ окажется справедливым равенство

$$g((k^*,\ t^*),(k(t''),t''))=\max_{k\in K}\ \max_{k''\in K} g((k,t^*),\ (k'',t'')). \tag{21}$$

9. Для меток $k(t)$, $t \in N(t^*)$, выбранных в соответствии с (20), выполняется неравенство

$$g((k^*, t^*), (k(t), t)) \le \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g((k, t^*), (k', t)),$$

а в силу (18) для $t' \in N(t^*)$ это неравенство выполняется строго

$$g((k^*, t^*), (k(t'), t')) < \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g((k, t^*), (k', t')).$$

Таким образом, получаем

$$\sum_{t \in N(t^*)} g((k^*, t^*), (k(t), t)) < \sum_{t \in N(t^*)} \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g((k, t^*), (k', t)). \tag{22}$$

10. Поскольку $E(g) = E(F(g))$, то $E(g) = E(g^*)$, т.е.

$$\sum_{t \in N(t^*)} \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g((k, t^*), (k', t)) = \sum_{t \in N(t^*)} \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g^*((k, t^*), (k', t)). \tag{23}$$

11. В силу леммы 1 t^*-диффузия есть эквивалентное преобразование весовой функции, поэтому

$$\sum_{t \in N(t^*)} g((k^*, t^*), (k(t), t)) = \sum_{t \in N(t^*)} g^*((k^*, t^*), (k(t), t))$$

и с учетом (22), (23)

$$\sum_{t \in N(t^*)} \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g^*((k, t^*), (k', t)) > \sum_{t \in N(t^*)} g^*((k^*, t^*), (k(t), t)). \tag{24}$$

12. В силу леммы 3 все слагаемые в левой части неравенства (24) равны между собой. В силу леммы 2 и с учетом (20) равны между собой все слагаемые в правой части (24). Поэтому неравенство

$$g^*((k^*, t^*), (k(t), t)) < \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g^*((k, t^*), (k', t))$$

справедливо для всех $t \in N(t^*)$, в том числе для объекта $t'' \in N(t^*)$, для которого справедливо равенство (21). ■

Введем обозначение $F^i(g)$, $i = 0, 1, \ldots$, так, что $F^0(g) = g$, а $F^i(g) = F(F^{i-1}(g))$, $i = 0, 1, \ldots$ Пусть $n = |\Im| \times |K| \times |K|$.

Лемма 6. Несогласованность $\varepsilon(g)$ весовой функции равна нулю тогда и только тогда, когда $E(g) = E(F^n(g))$.

Доказательство. Если $\varepsilon(g) > 0$, то $E(g) > E(F^n(g))$, так как в противном случае множество $D_0(F^n(g))$ оказалось бы пустым, а это невозможно согласно определению (см. (8)). Очевидно, что если $\varepsilon(g) = 0$, то $E(g) = E(F(g))$ и $\varepsilon(F(g)) = 0$; следовательно, $E(g) = E(F^i(g))$ для любого i. ■

Определим метрику на множестве весовых функций так, чтобы расстояние $\rho(g, g')$ между функциями g и g' составляло

$$\rho(g, g') = \max_{tt' \in \Im} \max_{k \in K} \max_{k' \in K} |g((k, t), (k', t')) - g'((k, t), (k', t'))|.$$

Лемма 7. Энергия $E(g)$ есть непрерывная функция весов g.

Доказательство. Лемму доказывает следующая цепочка равенств и неравенств:

$$|E(g) - E(g')| =$$

$$= \left| \sum_{tt' \in \Im} \left[\max_{k \in K} \max_{k' \in K} g((k, t), (k', t')) - \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g'((k, t), (k', t')) \right] \right| \le$$

$$\le \sum_{tt' \in \Im} \left| \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g((k, t), (k', t')) - \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g'((k, t), (k', t')) \right| \le$$

$$\le |\Im| \max_{tt' \in \Im} \left| \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g((k, t), (k', t')) - \max_{k \in K} \max_{k' \in K} g'((k, t), (k', t')) \right| \le$$

$$\le |\Im| \max_{tt' \in \Im} \max_{k \in K} \max_{k' \in K} \left| g((k, t), (k', t')) - g'((k, t), (k', t')) \right| = |\Im| \cdot \rho(g, g'). \ ■$$

Лемма 8. Несогласованность $\varepsilon(g)$ есть непрерывная функция весов g.

Доказательство. 1. Пусть g и g' — две весовые функции такие, что $\rho(g, g') = \delta$; следовательно,

$$-\delta \le g((k, t), (k', t')) - g'((k, t), (k', t')) \le \delta, \ tt' \in \Im, \ k \in K, \ k \in K'. \tag{25}$$

По определению несогласованности $\varepsilon(g)$ весовой функции множество

$$D_{\varepsilon(g)}(g)=\{((k,t),(k',t'))|g((k,t),(k',t'))\geq \max_{l\in K}\max_{l'\in K} g((l,t),(l',t'))-\varepsilon(g)\}$$

содержит в себе согласованное подмножество дужек.

2. Из (25) следуют неравенства

$$\max_{l\in K}\max_{l'\in K} g'((l,t),(l',t'))\leq \max_{l\in K}\max_{l'\in K} g((l,t),(l',t'))+\delta\,,\ tt'\in\Im\,, \tag{26}$$

откуда вытекает

$$g'((k,t),(k',t'))\geq g((k,t),(k',t'))-\delta,\ tt'\in\Im\,,\ k\in K,\ k\in K'\,. \tag{27}$$

3. Из неравенств (26), (27) следует, что для любой дужки, для которой выполняется неравенство

$$g((k,t),(k',t'))\geq \max_{l\in K}\max_{l'\in K} g((l,t),(l',t'))-\varepsilon(g)\,,$$

выполняется неравенство

$$g'((k,t),(k',t'))\geq \max_{l\in K}\max_{l'\in K} g'((l,t),(l',t'))-\varepsilon(g)-2\delta\,.$$

Таким образом, $D_{\varepsilon(g)}(g)\subset D_{\varepsilon(g)+2\delta}(g')$.

4. Поскольку множество $D_{\varepsilon(g)}(g)$ содержит в себе согласованное подмножество дужек, то множество $D_{\varepsilon(g)+2\delta}(g')$ также содержит в себе это же согласованное подмножество. Поэтому

$$\varepsilon(g')\leq\varepsilon(g)+2\delta\,. \tag{28}$$

5. Аналогично доказательству неравенства (28) доказывается, что

$$\varepsilon(g)\leq\varepsilon(g')+2\delta\,. \tag{29}$$

Из неравенств (28) и (29) следует

$$-2\delta\leq\varepsilon(g)-\varepsilon(g')\leq 2\delta\,. \ ■$$

Лемма 9. Веса $F(g)$ являются непрерывной функцией весов g.

Доказательство. Поскольку диффузия есть конечная последовательность (k^*, t^*)-диффузий, для доказательства леммы достаточно доказать непрерывность (k^*, t^*)-диффузии.

1. Пусть g_1'и g_2' — весовые функции, полученные в результате (k^*, t^*)-диффузии, применяемой к функциям g_1 и g_2 соответственно таким, что

$$|g_1((k,t),\ (k',t'))-g_2((k,t),(k',t'))|\leq\delta\,,\ tt'\in\Im\ ,\ k\in K\,,\ k'\in K\,. \tag{30}$$

2. Пусть

$$s_1(t')=\max_{k'\in K} g_1((k^*,\ t^*),(k',t'))\,,\ t'\in N(t^*)\,, \tag{31}$$

$$s_2(t')=\max_{k'\in K} g_2((k^*,\ t^*),(k',t'))\,,\ t'\in N(t^*)\,. \tag{32}$$

Из (30) следует

$$|s_1(t')-s_2(t')|\leq\delta\,,\ t'\in N(t^*)\,, \tag{33}$$

$$\left|\frac{1}{N(t^*)}\sum_{t'\in N(t^*)} s_1(t')-\frac{1}{N(t^*)}\sum_{t'\in N(t^*)} s_2(t')\right|\leq\delta\,. \tag{34}$$

3. В соответствии с определением (k^*,t^*)-диффузии

$$g_1'((k^*,\ t^*),(k',t'))=g_1((k^*,\ t^*),(k',t'))-s_1(t')+\widetilde{s}_1\ ,\ t'\in N(t^*)\,,\ k'\in K, \tag{35}$$

$$g_2'((k^*,\ t^*),(k',t'))=g_2((k^*,\ t^*)\,,\ (k',t'))-s_2(t')+\widetilde{s}_2\ ,\ t'\in N(t^*)\,,\ k'\in K, \tag{36}$$

где

$$\widetilde{s}_1=\frac{1}{|N(t^*)|}\sum_{t'\in N(t^*)} s_1(t'),\ \ \widetilde{s}_2=\frac{1}{|N(t^*)|}\sum_{t'\in N(t^*)} s_2(t')\,,$$

4. С учетом неравенств (33) и (34) для любой дужки $((k^*,t^*),(k',t'))$ справедлива следующая цепочка равенств и неравенств:

$$|g'_1((k^*,t^*),(k',t'))-g'_2((k^*,t^*),(k',t'))|=$$

$$=|[g_1((k^*,t^*),(k',t'))-g_2((k^*,t^*),(k',t'))]+[s_2(t')-s_1(t')]+[\widetilde{s}_1-\widetilde{s}_2]|\leq$$

$$\leq|[g_1((k^*,t^*),(k',t'))-g_2((k^*,t^*),(k',t'))]+[s_1(t')-s_2(t')]+[\widetilde{s}_1-\widetilde{s}_2]|\leq 3\delta\,.$$

5. Для всех остальных дужек $((k,t),(k',t'))$, не содержащих вершины (k^*,t^*), справедливо неравенство

$$|g'_1((k,t),(k',t')) - g'_2((k,t),(k',t'))| \le \delta,$$

так как веса этих дужек в процессе (k^*, t^*)-диффузии не изменяются. ■

Лемма 10. Пусть g — весовая функция такая, что вес каждой дужки лежит в пределах

$$g((k,t),(k',t')) \le M, \ tt' \in \Im, \ k \in K, \ k' \in K, \tag{37}$$

$$g((k,t),(k',t')) \ge m, \ tt' \in \Im, \ k \in K, \ k' \in K. \tag{38}$$

Пусть также $g^i = F^i(g)$. В этом случае веса дужек $((k,t),(k',t'))$ лежат в пределах

$$g^i((k,t),(k',t')) \le M, \ tt' \in \Im, \ k \in K, \ k' \in K, \tag{39}$$

$$g^i((k,t),(k',t')) \ge |\Im| m - (|\Im| - 1)M, \ tt' \in \Im, \ k \in K, \ k' \in K. \tag{40}$$

Доказательство. 1. Для доказательства (39) достаточно доказать, что (k^*, t^*)-диффузия не нарушает неравенства (37) при произвольном $k^* \in K$, $t^* \in T$. Выберем произвольно $k^* \in K$ и $t^* \in T$ и зафиксируем их для дальнейшего рассмотрения. Пусть g и g^* — две весовые функции, полученные соответственно до и после (k^*, t^*)-диффузии, причем для весов g выполняется неравенство (37).

2. В соответствии с (k^*, t^*)-диффузией веса дужек определяются выражениями (35) и (36), откуда следует, что

$$\max_{k' \in K} g^*((k^*, t^*),(k',t')) = \frac{1}{|N(t^*)|} \sum_{t' \in N(t')} \max_{k' \in K} g((k^*, t^*),(k',t')).$$

Отсюда с учетом условия (37) вытекает, что неравенство

$$g^*((k^*, t^*),(k',t')) \le M \tag{41}$$

выполняется для всех дужек, содержащих вершину (k^*, t^*).

3. Веса дужек, не содержащих вершины (k^*, t^*), также удовлетворяет неравенство (41), поскольку веса этих дужек не изменяются в процессе (k^*, t^*)-диффузии.

4. Пусть g — весовая функция, для которой выполняются условия (37), (38), а $g^i = F^i(g)$. Выберем произвольную дужку $((k_1,t_1),(k_2,t_2))$ и произвольную разметку $\bar{k}^*: T \to K$ такую, что $k^*(t_1) = k_1$, $k^*(t_2) = k_2$.

5. Поскольку диффузия F выполняет эквивалентное преобразование весовой функции (равно как и преобразование F^i), для разметки $\bar{k}^*$ выполняется равенство

$$\sum_{tt' \in \Im} g^i((k(t),t),(k(t'),t')) = \sum_{tt' \in \Im} g((k(t),t),(k(t'),t')). \tag{42}$$

6. В силу условия (38) справедливо неравенство

$$\sum_{tt' \in \Im} g((k(t),t),(k(t'),t')) \ge |\Im| \cdot m,$$

из которого с учетом (42) следует

$$\sum_{tt' \in \Im} g^i((k(t),t),(k(t'),t')) \ge |\Im| \cdot m. \tag{43}$$

7. Поскольку для функции g^i доказано неравенство (41), то

$$\sum_{tt' \in \Im \setminus \{t_1, t_2\}} g^i((k(t),t),(k(t'),t')) \le (|\Im| - 1) \cdot M. \tag{44}$$

Вычитая (44) из (43), получаем

$$g^i((k_1,t_1),(k_2,t_2)) \ge |\Im| \cdot m - (|\Im| - 1) \cdot M. \ ■$$

Теорема 1. Для любой весовой функции g

$$\lim_{i \to \infty} \varepsilon(F^i(g)) = 0.$$

Доказательство. 1. В силу леммы 10 элементы последовательности $g_i = F^i(g)$, $i = 1, 2, \ldots$, принадлежат ограниченному множеству, и поэтому она содержит в себе подпоследовательность $g_{i(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$, $j > j' \Rightarrow i(j) > i(j')$, имеющую предел $\lim_{j \to \infty} g_{i(j)}$. Покажем, что для любой такой подпоследовательности

$$\varepsilon\left(\lim_{j \to \infty} g_{i(j)}\right) = 0. \tag{45}$$

2. Выберем произвольно подпоследовательность $g_{i\,(j)}$, $j=1,2,\ldots$, имеющую предел, и зафиксируем ее для дальнейшего рассмотрения. Обозначим

$$g^* = \lim_{j\to\infty} g_{i\,(j)}\,. \tag{46}$$

3. Для любого $i=1,2,\ldots$ и для любой разметки $\bar{k}: T \to K$ справедлива цепочка равенств и неравенств

$$E(g_i) = \sum_{tt'\in\Im} \max_{k\in K}\max_{k'\in K} g_i((k,t),(k',t')) \ge \sum_{tt'\in\Im} g_i((k(t),t),(k(t'),t')) = \sum_{tt'\in\Im} g((k(t),t),(k(t'),t')) \ge$$

$$\ge \sum_{tt'\in\Im} \min_{k\in K}\min_{k'\in K} g((k(t),t),(k(t'),t')) \ge |\Im|\cdot m\,, \tag{47}$$

где $m=\min\limits_{tt'\in\Im}\min\limits_{k\in K}\min\limits_{k'\in K} g((k,t),(k',t'))$.

Равенство

$$\sum_{tt'\in\Im} g_i((k(t),t),(k(t'),t')) = \sum_{tt'\in\Im} g((k(t),t),(k(t'),t'))$$

в этой цепочке справедливо в силу леммы 1, а все остальные звенья этой цепочки очевидны.

4. Последовательность $E(g_i)$, $i=1,2,\ldots$, вследствие леммы 4 является невозрастающей, а в силу (47) — ограниченной снизу. Следовательно, она имеет предел

$$E^* = \lim_{i\to\infty} E(g_i)\,.$$

Этот же предел имеет любая подпоследовательность последовательности $E(g_i)$, $i=1,2,\ldots$, в частности подпоследовательность $g_{i\,(j)}$, $j=1,2,\ldots$ (см. п. 2) и подпоследовательность $g_{i\,(j)+n}$, где $n=|\Im|\times|K|\times|K|$,

$$E^* = \lim_{i\to\infty} E(g_{i\,(j)}),\ E^* = \lim_{i\to\infty} E(g_{i\,(j)+n})\,.$$

Следовательно,

$$\lim_{i\to\infty}[E(g_{i\,(j)}) - E(g_{i\,(j)+n})] = 0\,,$$

или, в другой записи,

$$\lim_{i\to\infty}[E(g_{i\,(j)}) - E(F^n(g_{i\,(j)}))] = 0\,. \tag{48}$$

5. Лемма 7 утверждает, что $E(g)$ есть непрерывная функция весов g, а лемма 9 утверждает, что $F(g)$ есть непрерывное преобразование весов g. Следовательно, величина $E(g)-E(F^n(g))$ есть непрерывная функция весов и поэтому

$$E(g^*) - E(F^n(g^*)) = \lim_{i\to\infty}[E(g_{i\,(j)}) - E(F^n(g_{i\,(j)}))] = 0\,.$$

Отсюда в силу леммы 6 следует

$$\varepsilon(g^*) = 0\,, \tag{49}$$

что доказывает равенство (45).

6. Вследствие леммы 10 величина $\varepsilon_i=\varepsilon(g_i)$ не может превосходить величины

$$|\Im|\cdot[\max_{tt'\in\Im}\max_{k\in K}\max_{k'\in K} g((k,t),(k',t')) - \min_{tt'\in\Im}\min_{k\in K}\min_{k'\in K} g((k,t),(k',t'))]\,,$$

поэтому для каждого i существует верхний предел $s_i=\sup\limits_{j\ge i}\varepsilon_j$. Последовательность s_i есть монотонно невозрастающая последовательность неотрицательных чисел и поэтому имеет предел $s^*=\lim\limits_{i\to\infty} s_i$.

7. Ввиду известной теоремы анализа [9] для любой такой последовательности существует подпоследовательность $i'(k)$, $k=1,2,\ldots$, такая, что $k>k' \Rightarrow i'(k)>i'(k')$, и такая, что

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_{i'(k)} = \lim_{i\to\infty}\sup_{j\ge i}\varepsilon_j = s^*,$$

или, в другой записи,

$$s^* = \lim_{k\to\infty}\varepsilon(g_{i'(k)}) = 0\,. \tag{50}$$

Равенство (50), естественно, справедливо и для любой подпоследовательности последовательности $g_{i'(k)}$, $k=1,2,\ldots$; в частности, такой подпоследовательности $g_{i'(k(j))}$, $j=1,2,\ldots$, $j>j' \Rightarrow k(i)>k(j')$, для которой существует предел

$$g^* = \lim_{j\to\infty} g_{i'(k(j))}\,,$$

или, в более краткой записи,

$$g^* = \lim_{j \to \infty} g_{i(j)},$$

где $i(j) = i'(k(j))$. Сходящаяся подпоследовательность $g_{i'(k(j))}$, $j = 1, 2, \dots$, гарантированно существует, поскольку последовательность $g_{i'(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, ограничена (согласно лемме 10).

Таким образом, доказано существование последовательности $g_{i(j)}$, $j = 1, 2, \dots$, имеющей предел

$$g^* = \lim_{j \to \infty} g_{i(j)}, \tag{51}$$

и такой, что

$$\lim_{j \to \infty} \varepsilon(g_{i(j)}) = \lim_{i \to \infty} \sup_{j \ge i} \varepsilon(g_j). \tag{52}$$

8. Равенство (45) справедливо для любой последовательности $g_{i(j)}$, $j = 1, 2, \dots$, имеющей предел, в том числе последовательности, для которой выполняются свойства (51) и (52). В силу леммы 8 из равенства (45) следует $\lim_{j \to \infty} \varepsilon(g_{i(j)}) = 0$ и с учетом (52)

$$\lim_{i \to \infty} \sup_{j \ge i} \varepsilon(g_j) = 0. \tag{53}$$

Неравенство $0 \le \lim_{i \to \infty} \varepsilon(g_i) \le \sup_{j \ge i} \varepsilon(g_j)$ выполняется для каждого $j = 1, 2, \dots$, и поэтому из (53) следует $\lim_{i \to \infty} \varepsilon(g_i) = 0$. ■

Поступила 01.02.2010