УДК 519.81

В.М. МИХАЛЕВИЧ

ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ С ДЕНЕЖНЫМИ ДОХОДАМИ (ПОТЕРЯМИ) ПРИ СОЧЕТАНИИ ПРИНЦИПОВ ГАРАНТИРОВАННОГО И НАИЛУЧШЕГО РЕЗУЛЬТАТОВ

Ключевые слова: *принятие решения, модель системы, принципы оптимальности, критерии оптимальности.*

В 60-х годах прошлого столетия Энскомб и Ауманн в работе [1] предложили модель субъективной ожидаемой полезности (модель SEU), в которой субъективная вероятность аддитивна (не обязательно σ-аддитивна). Однако при этом проблема неопределенности (т.е. обоснование правил выбора решения) решалась в бихевиористских традициях. Другими словами, рациональность выбора решения следовала из поведенческого опыта.

В настоящей статье предлагается модель аналогичного критерия оптимальности, формализм которой аксиоматизирует также и формально-логические принципы оптимальности, что обеспечивает наиболее точное решение проблемы неопределенности предложенной моделью.

Рассматривается система принятия решения, т.е. природа, называемая ситуацией относительно ее определенной части — того, кто принимает решение (ТПР) (см. [2]).

Обозначим $\mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$ класс всех схем параметрических ситуаций с фиксированным множеством значений ненаблюдаемого параметра Θ [3] задач решения с денежными потерями, т.е. троек вида (Θ, U, g), где U — любое непустое множество решений, $g: \Theta\times U \to \mathbb{R}$ — любая ограниченная функция потерь [4]. Множество всех троек вида (Θ, U, f), где $f=-g$, а $(\Theta, U, g)\in \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$, которые назовем схемами ситуаций задач решения с денежными доходами при заданном множестве Θ, обозначим $\mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$. Для $\mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$ и $\mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$ используем общее обозначение $\mathbb{Z}(\Theta)$, если из контекста следует однозначность его понимания. При необходимости дифференциации элементов (Θ, U, g) классов $\mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$ и $\mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$ запишем их в уточняющем расширенном виде: $((\mathbb{R},\leqslant), \Theta, U, g)$ и $((\mathbb{R},\geqslant), \Theta, U, g)$ соответственно.

Через $B_{\Sigma}(\Theta)$, или $B(\Theta)$ (либо B), в контексте с фиксированным Σ (либо фиксированными Θ и Σ), где Θ — произвольное множество с заданной алгеброй подмножеств Σ, обозначим множество всех Σ-измеримых ограниченных функций на Θ.

Определение 1. Статистической закономерностью на Θ, где Θ — произвольное множество с заданной алгеброй подмножеств Σ (если Σ не задается, то считается по умолчанию, что $\Sigma=2^{\Theta}$), называется всякое непустое замкнутое множество P в топологии $\tau(\Theta)$ пространства

$$PF(\Theta):=\{p\in([0,1])^{\Sigma} : p(\Theta)=1,$$

$$p(C\cup D)=p(C)+p(C\setminus D)\;\; \forall C, D\in\Sigma\} \tag{1}$$

всех аддитивных вероятностных мер на Θ, являющейся следом *-слабой топологии в сопряженном к банаховому пространству $B_{\Sigma}(\Theta)$ с нормой $\|f\|:=\sup_{\theta\in\Theta}|f(\theta)|$. Иными словами, для топологии $\tau(\Theta)$ определяющей системой окрестностей точки p в пространстве $PF(\Theta)$ являются множества вида

$$U_{\varepsilon, f_1, f_2, \ldots, f_n}(p) := \{p' \in PF(\Theta) : |\int_{\Theta} f_i\, p(d\theta) - \int_{\Theta} f_i\, p'(d\theta)| < \varepsilon \ \ \forall i \in \overline{1, n}\}$$

для любых $\varepsilon > 0$, $n \in N$, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in B_{\Sigma}(\Theta)$.

Замечание. Данное определение обобщает определение статистической закономерности на Θ, приведенное в [3], когда $\Sigma = 2^{\Theta}$.

Семейство всех статистических закономерностей на Θ будем обозначать $P(\Theta)$. Отметим также, что в топологии $\tau(\Theta)$ пространство $PF(\Theta)$ компактно.

Определение 2. Правилом выбора критерия (ПВК) для схем ситуаций (СС) из класса $\mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta)$ будем называть любое отображение π, определенное на $\mathbb{Z}'(\Theta)$ и сопоставляющее каждой $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$ некоторую действительную функцию $g_Z^*(\cdot)$, определенную на U.

Класс всех ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta)$ обозначим $K(\mathbb{Z}'(\Theta))$, при этом будем относить к $K_0(\mathbb{Z}'(\Theta)) \subset K(\mathbb{Z}'(\Theta))$ все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, удовлетворяющие следующим условиям.

У1. Если $Z_1 = (\Theta, U_1, g_1) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $Z_2 = (\Theta, U_2, g_2) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $U_1 \subseteq U_2$ и $g_1(\theta, u) = g_2(\theta, u)$ $\forall \theta \in \Theta$, $\forall u \in U_1$, то

$$g_{Z_1}^*(u) = g_{Z_2}^*(u) \ \ \forall u \in U_1.$$

У2. Если $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i \in U$, $i = \overline{1, 2}$, и $g(\theta, u_1) \le g(\theta, u_2)$ $\forall \theta \in \Theta$, то

$$g_Z^*(u_1) \le g_Z^*(u_2).$$

У3. Если $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i \in U$, $i = \overline{1, 2}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$ и $g(\theta, u_1) = ag(\theta, u_2) + b$ $\forall \theta \in \Theta$, то

$$g_Z^*(u_1) = a g_Z^*(u_2) + b.$$

У4. Если $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $u_i \in U$, $i = \overline{1, 3}$, и $g(\theta, u_1) + g(\theta, u_2) = 2g(\theta, u_3)$ $\forall \theta \in \Theta$, то

$$g_Z^*(u_1) + g_Z^*(u_2) \ge 2 g_Z^*(u_3).$$

Определение 3. (Параметрической) моделью ПВК (Ω-МПВК) для СС в классе $\mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta)$ назовем конечную совокупность условий (аксиом) У на ПВК для класса $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые задают единственное (единственное с точностью до параметра $\omega \in \Omega$, где Ω — множество значений параметра ω) ПВК, и обозначим [У] в классе $\mathbb{Z}'(\Theta)$ ([У] в классе $\mathbb{Z}'(\Theta)$ с параметром $\omega \in \Omega$).

Введем в рассмотрение отображение $\eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)} : P(\Theta) \to K(\mathbb{Z}'(\Theta))$, где $P(\Theta)$ — семейство всех статистических закономерностей на (Θ, Σ). Это отображение определяется следующим образом. Если

$$P \in P(\Theta), \ \pi = \eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(P), \ Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta), \ \pi(\mathrm{Z}) = g_Z^*(\cdot),$$

то для любых $u \in U$

$$g_Z^*(u) = \max_{p \in P} \int_{\Theta} g(\theta, u)\, p(d\theta), \tag{2}$$

где интеграл понимается в естественном смысле интеграла по конечно-аддитивной мере. При этом существование максимума следует из замкнутости множества $P \in P(\Theta)$ в топологии $\tau(\Theta)$.

Определение 4. Моделью ситуации (МС) для СС $Z \in \mathbb{Z}(\Theta)$ будем называть любую четверку вида $(\Theta, U, g, P) = (Z, P)$, где $P \in P(\Theta)$, и обозначать через M.

Обозначим $x_\Theta(\cdot)$ отображение, тождественно равное $x \in X$ на Θ, т.е. $x_\Theta(\theta) := x \ \forall \theta \in \Theta$ (если это не приводит к недоразумениям, индекс Θ будем опускать). Тогда через X_Θ обозначим все постоянные отображения на Θ:

$$X_\Theta = \{x_\Theta : x \in X\}. \tag{3}$$

Обозначим $B_0(\Theta)$ (или B_0 в контексте Θ) множество всех конечнозначных Σ-измеримых функций на Θ:

$$B_0(\Theta) := \{f \in B(\Theta) : \mathrm{Card}\, f(\Theta) < \infty\}.$$

Обозначим $B_0(a, b)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $(-a), b > 0$, множество всех конечнозначных Σ-измеримых функций на Θ со значениями в интервале (a, b), т.е. $B_0(a, b) := \{f \in \mathbb{R}^\Theta : f \in B_0, \ f(\Theta) = (a, b), \ 0 \in (a, b)\}$.

Определение 5. Схему ситуации $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(\Theta)$ назовем определяющей, если найдутся $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$B_0(a, b) \subseteq g(\cdot, U) = \mathrm{co}[g(\cdot, U)] \subseteq B. \tag{4}$$

Далее для СС класса $\mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta)$ будем относить к $\breve{K}_0(\mathbb{Z}'(\Theta)) \subseteq$ $\subseteq K(\mathbb{Z}'(\Theta))$ все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые для любой определяющей СС $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$ удовлетворяют условиям У2, У4. Ослабленные таким образом условия будем обозначать У2′ и У4′ соответственно. Очевидно, что $\breve{K}_0(\mathbb{Z}'(\Theta)) \supseteq K_0(\mathbb{Z}'(\Theta))$.

Обозначим $K_{01}(\mathbb{Z}'(\Theta))$ все ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые принадлежат $\breve{K}_0(\mathbb{Z}'(\Theta))$ и удовлетворяют также следующим условиям.

У1′. Если $Z_1 = (\Theta, U_1, g_1) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$, $Z_2 = (\Theta, U_2, g_2) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$,

$$u_1 \in U_1, \ u_2 \in U_2, \ g_1(\theta, u_1) = g_2(\theta, u_2) \ \forall \theta \in \Theta, \text{ то}$$

$$g^*_{Z_1}(u_1) = g^*_{Z_2}(u_2).$$

У3′. Если $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta)$ — определяющая, $u_i \in U$, $i = \overline{1,3}$, $\alpha \in [0,1]$, $g(\cdot, u_3) = c_\Theta$ и для любых $\theta \in \Theta$ $g(\theta, u_1) = \alpha g(\theta, u_2) + (1-\alpha)c$, то

$$g^*_Z(u_1) = \alpha g^*_Z(u_2) + (1-\alpha)c.$$

Для произвольного векторного пространства V введем отношение эквивалентности $\overset{\mathrm{co}}{\approx}$ на 2^V следующим образом. Для любых $X, Y \subseteq V$

$$X \overset{\mathrm{co}}{\approx} Y \Leftrightarrow \mathrm{co}X = \mathrm{co}Y. \tag{5}$$

Класс всех ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, которые удовлетворяют условиям У1′, У2′, У3′, У4′, ослабленными тем, что требования их распространяются лишь на $g \in B_0(\Theta)$, будем обозначать $K_{02}(\mathbb{Z}'(\Theta))$. Соответствующие ослабленные условия обозначим через У1″, У2″, У3″, У4″.

Очевидно, что $K_{01}(\mathbb{Z}'(\Theta)) \subseteq K_{02}(\mathbb{Z}'(\Theta))$.

Условия У4, У4′, У4″ при $\mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_\leqslant(\Theta)$ представляют специфическую форму принципа гарантированного результата, а при $\mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_\geqslant(\Theta)$ — специфическую форму тяготения к риску [5, 6].

Введем в рассмотрение отображение $\eta'_{\mathbb{Z}'(\Theta)}: P(\Theta)\,/\overset{\mathrm{co}}{\approx}\,\to K(\mathbb{Z}'(\Theta))$ таким образом, что если P — класс эквивалентности по отношению $(P(\Theta),\overset{\mathrm{co}}{\approx})$ с представителем P, то

$$\eta'_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(\widetilde{P}):=\eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(P)\,. \tag{6}$$

Обозначим $P_{\mathrm{co}}(\Theta)$ множество всех выпуклых статистических закономерностей на Θ, т.е. $P_{\mathrm{co}}(\Theta):=\{P\in P(\Theta): P=\mathrm{co}P\}$. Очевидно, что для любой функции $f\in B(\Theta)$

$$\max_{p\in P}\int_{\Theta} f(\theta)\,p(d\theta)=\max_{p\in\mathrm{co}P}\int_{\Theta} f(\theta)\,p(d\theta),$$

$$\min_{p\in P}\int_{\Theta} f(\theta)\,p(d\theta)=\min_{p\in\mathrm{co}P}\int_{\Theta} f(\theta)\,p(d\theta),\ \text{где } P\in P(\Theta),$$

в силу аффинности интеграла по аддитивной мере.

Действительно, с одной стороны, для любой закономерности $P\in P(\Theta)$, поскольку $P\subseteq\mathrm{co}P$, имеем

$$\max_{p\in P}\int_{\Theta} f(\theta)\,p(d\theta)\le\max_{p\in\mathrm{co}P}\int_{\Theta} f(\theta)\,p(d\theta)\,,$$

с другой стороны, для любого $p\in\mathrm{co}P$ имеем представление $p=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i$, где $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, $p_i\in P$, $i=\overline{1,n}$, следовательно,

$$\max_{p\in\mathrm{co}P}\int_{\Theta} f(\theta)\,p(d\theta)=\int_{\Theta} f(\theta)\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i\right](d\theta)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_{\Theta} f(\theta)\,p_i(d\theta)\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\max_{p\in P}\int_{\Theta} f(\theta)\,p(d\theta)=\max_{p\in P}\int_{\Theta} f(\theta)\,p(d\theta)\,,$$

откуда следует первое равенство в доказываемом утверждении. Второе равенство вытекает из первого при $f:=-f$.

При этом в силу компактности $PF(\Theta)$ и замкнутости P в топологии $\tau(\Theta)$ множество P компактно [7, с. 99, теорема 3]. Следовательно, $\mathrm{co}\,P$ компактно [8, теорема 2.6], а значит, замкнуто [7, с. 100, теорема 4], т.е. $\mathrm{co}\,P=\overline{\mathrm{co}\,P}\in P_{\mathrm{co}}(\Theta)$.

Тогда

$$\eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(P(\Theta))=\eta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(P_{\mathrm{co}}(\Theta))=\eta'_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(P(\Theta)\,/\overset{\mathrm{co}}{\approx})\,.$$

Обозначим $\mathbb{Z}'_1(\Theta)$ и $\mathbb{Z}''_1(\Theta)$ и т.д. любые подклассы СС класса $\mathbb{Z}(\Theta)$, в которых для любой СС $Z'=(\Theta,U',g')\in\mathbb{Z}'_1(\Theta)$ и любого $u'\in U'$ найдутся такая определяющая СС $Z=(\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'_1(\Theta)$ и такое $u\in U$, что $g(\theta,u)=g'(\theta,u')\ \forall\theta\in\Theta$.

В каждом из условий У4, У4′, У4″, заменив знак $\ge$ на знак $\le$, определим условия $\overline{У4}$, $\overline{У4'}$, $\overline{У4''}$ соответственно, которые при $\mathbb{Z}'(\Theta)\subseteq\mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$ представляют специфическую форму принципа гарантированного результата, а при $\mathbb{Z}'(\Theta)\subseteq\mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$ — специфическую форму тяготения к риску. Обозначим

$\overline{K}_0(\mathbb{Z}'(\Theta))$, $\breve{\overline{K}}_0(\mathbb{Z}'(\Theta))$, $\overline{K}_{01}(\mathbb{Z}'(\Theta))$, $\overline{K}_{02}(\mathbb{Z}'(\Theta))$ классы ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$, определяемые аналогично классам $K_0(\mathbb{Z}'(\Theta))$, $\breve{K}_0(\mathbb{Z}'(\Theta))$, $K_{01}(\mathbb{Z}'(\Theta))$, $K_{02}(\mathbb{Z}'(\Theta))$ ПВК для $\mathbb{Z}'(\Theta)$ соответственно с той лишь разницей, что вхождение в соответствующее определение одного из условий У4, У4′, У4″ заменяется на вхождение соответствующего из условий $\overline{У4}$, $\overline{У4'}$, $\overline{У4''}$. Очевидно, что введенное условие будет условием предпочтения гарантированного результата, если заменяемое является условием предпочтения наилучшего результата (т.е. для $\mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$), и наоборот: введенное условие является условием предпочтения наилучшего результата, если заменяемое — условие предпочтения гарантированного результата (т.е. для $\mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$).

Обозначим $\overline{\eta}'_{\mathbb{Z}'(\Theta)}$ отображение $P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}$ в $K(\mathbb{Z}'(\Theta))$, вводимое аналогично отображению $\eta'_{\mathbb{Z}'(\Theta)}$, но с критерием вида (2), в котором операция max заменена на операцию min.

Таким образом, аналоги теорем 2 и 3 из [5] для задач принятия решений с денежными доходами примут следующий вид.

Теорема 1. Для произвольного класса СС $\mathbb{Z}'_1(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}'_{\geqslant}(\Theta)$ отображение $\overline{\eta}'_{\mathbb{Z}'_1(\Theta)}$ является инъекцией и

$$\overline{\eta}'_{\mathbb{Z}'_1(\Theta)}(P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}) = \overline{K}_{01}(\mathbb{Z}'_1(\Theta)) = \overline{K}_{02}(\mathbb{Z}'_1(\Theta)).$$

Доказательство. Определим инъекцию i: $\mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta) \to \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$ таким образом, что для любой СС $Z' = ((\mathbb{R}, \leqslant), \Theta, U', g') \in \mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$ положим $\mathrm{i}(Z') := ((\mathbb{R}, \geqslant), \Theta, U', -g') \in \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$. Очевидно, что i — биекция.

Для каждой СС $Z_1 = ((\mathbb{R}, \leqslant), \Theta, U_1, g_1)$ класса $\mathbb{Z}'_1(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}'_{\leqslant}(\Theta)$ и любого $u' \in U_1$ найдутся в силу определения класса $\mathbb{Z}'_1(\Theta)$ такая определяющая СС $Z = ((\mathbb{R}, \leqslant), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'_1(\Theta)$ и такое $u \in U$, что

$$g(\theta, u) = g_1(\theta, u') \;\; \forall \theta \in \Theta. \tag{7}$$

Тогда для каждой СС класса $\mathrm{i}(\mathbb{Z}'_1(\Theta))$ вида $\mathrm{i}(Z_1)$, где $Z_1 = ((\mathbb{R}, \leqslant), \Theta, U_1, g_1) \in \mathbb{Z}'_1(\Theta)$, и любого $u' \in U_1$ схема ситуации $\mathrm{i}(Z)$, где $Z = ((\mathbb{R}, \leqslant), \Theta, U, -g) \in \mathbb{Z}'_1(\Theta)$, будет также определяющей, т.е. в силу соотношений (4) и (7) для СС $\mathrm{i}(Z)$ будет выполняться соотношение

$$B_0(b, a) \subseteq -g(\cdot, U) = \mathrm{co}[-g(\cdot, U)] \subseteq B,$$

при этом в силу соотношений (7) имеет место

$$-g(\theta, u) = -g(\theta, u') \;\; \forall \theta \in \Theta..$$

Поскольку СС Z_1 пробегает весь класс $\mathbb{Z}'_1(\Theta)$, то это означает, что для класса СС $\mathrm{i}(\mathbb{Z}'_1(\Theta))$ согласно введенным обозначениям $\mathbb{Z}'_1(\Theta)$, $\mathbb{Z}''_1(\Theta)$ и т.д. можно использовать обозначение $\mathbb{Z}''_1(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$, т.е.

$$\mathbb{Z}''_1(\Theta) := \mathrm{i}(\mathbb{Z}'_1(\Theta)). \tag{8}$$

Далее определим инъекцию I: $K(\mathbb{Z}'_1(\Theta)) \to K(\mathbb{Z}''_1(\Theta))$ таким образом, что для любого ПВК $\pi \in K(\mathbb{Z}'_1(\Theta))$ выполняется

$$[\mathrm{I}(\pi)](\mathrm{i}Z) = -\pi(Z) \;\; \forall Z \in \mathbb{Z}'_1(\Theta). \tag{9}$$

Данное определение корректно в силу соотношения (8).

Лемма 1. Для произвольного класса СС $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$ имеет место $\mathrm{I}[K_j(\mathbb{Z}_1'(\Theta))] = \overline{K}_j(\mathbb{Z}_1''(\Theta))$, где $j \in \{01, 02\}$, $\mathbb{Z}_1''(\Theta) = \mathrm{i}\mathbb{Z}_1'(\Theta)$.

Доказательство. Пусть $\overline{\pi} \in \mathrm{I}[K_j(\mathbb{Z}_1'(\Theta))] \subseteq K(\mathbb{Z}_1''(\Theta))$. Отсюда $\overline{\pi} = \mathrm{I}(\pi)$, где $\pi \in K_j(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$. Значит, в силу соотношения (9) для любой СС $\mathbb{Z}_{\leqslant}((\mathbb{R}, \leqslant), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_1'(\Theta)$, а следовательно, с учетом соотношения (8) и для любой СС $\mathrm{i}Z \in \mathbb{Z}_1''(\Theta)$, имеем

$$[\mathrm{I}(\pi)](iZ) = -\pi(Z) = -g_Z^*.$$

Поскольку $\pi \in K_j(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$, то для любой определяющей СС $Z = \mathbb{Z}_1'(\Theta)$ функция g_Z^* удовлетворяет условиям, определяющим класс $K_j(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$. Учитывая это, легко проверить выполнимость для функции $-g_Z^*$ условий, определяющих класс $\overline{K}_j(\mathbb{Z}_1''(\Theta))$, а значит принадлежность ПВК $\mathrm{I}(\pi)$ классу $\overline{K}_j(\mathbb{Z}_1''(\Theta))$. Таким образом, для произвольного класса СС $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$

$$\mathrm{I}[K_j(\mathbb{Z}_1'(\Theta))] \subseteq \overline{K}_j(\mathbb{Z}_1''(\Theta)), \tag{10}$$

где $j \in \{01, 02\}$, $\mathbb{Z}_1''(\Theta) = \mathrm{i}\mathbb{Z}_1'(\Theta)$.

Исходя из симметрии, при замене I на I^{-1}, а K_j на $\overline{K}_j$ аналогичные рассуждения приводят к тому, что для произвольного класса СС $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$

$$\mathrm{I}^{-1}[\overline{K}_j(\mathbb{Z}_1''(\Theta))] \subseteq K_j(\mathbb{Z}_1'(\Theta)),$$

где $j \in \{01, 02\}$, $\mathbb{Z}_1''(\Theta) = \mathrm{i}\mathbb{Z}_1'(\Theta)$. Отсюда, поскольку I — инъекция, получим

$$\mathrm{I}\{\mathrm{I}^{-1}[\overline{K}_j(\mathbb{Z}_1''(\Theta))]\} = \overline{K}_j((\mathbb{Z}_1''(\Theta)) \subseteq \mathrm{I}[K_j(\mathbb{Z}_1''(\Theta))], \tag{11}$$

где $j \in \{01, 02\}$, $\mathbb{Z}_1''(\Theta) = \mathrm{i}\mathbb{Z}_1'(\Theta)$.

Соотношения (10) и (11) полностью доказывают лемму.

Лемма 2. Для произвольного класса СС $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$

$$\mathrm{I}[\eta'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx})] = \overline{\eta}'_{\mathbb{Z}_1''(\Theta)}(P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}),$$

где $\mathbb{Z}_1''(\Theta) = \mathrm{i}\mathbb{Z}_1'(\Theta)$.

Доказательство. Пусть $\overline{\pi} \in \mathrm{I}[\eta_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta))] \subseteq K(\mathbb{Z}_1''(\Theta))$. Отсюда $\overline{\pi} = I(\pi)$, где $\pi \in \eta_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta))$. Значит, в силу соотношения (9) для любой СС $Z \in \mathbb{Z}_1'(\Theta)$ с учетом соотношения (8) и для любой СС $\mathrm{i}Z \in \mathbb{Z}_1''(\Theta)$ имеем

$$(-g)_{\mathrm{i}Z}^* = [\mathrm{I}(\pi)](\mathrm{i}Z) = -\pi(Z) = -g_Z^*.$$

Для любой СС $Z = ((\mathbb{R}, \leqslant), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_1'(\Theta)$, поскольку $\pi \in \eta_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta))$, для каждого $u \in U$ имеем

$$g_Z^*(u) = \max_{p \in P} \int_\Theta g(\theta, u)\, p(d\theta).$$

Значит, для любой СС $\mathrm{i}Z = ((\mathbb{R}, \geqslant), \Theta, U, -g) \in \mathbb{Z}_1''(\Theta)$ и любого $u \in U$

$$(-g)_{\mathrm{i}Z}^*(u) = -\max_{p \in P} \int_\Theta g(\theta, u)\, p(d\theta) = \min_{p \in P} \int_\Theta [-g(\theta, u)]\, p(d\theta).$$

Следовательно, ПВК $\mathrm{I}(\pi)$ принадлежит классу $\bar{\eta}'_{\mathbb{Z}_1''(\Theta)}(P(\Theta))$. Таким образом, для произвольного класса СС $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$

$$\mathrm{I}[\eta_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta))] \subseteq \bar{\eta}_{\mathbb{Z}_1''(\Theta)}(P(\Theta)),$$

где $\mathbb{Z}_1''(\Theta) = \mathrm{i}\mathbb{Z}_1'(\Theta)$.

Исходя из симметрии, при замене I на I^{-1}, а η на $\bar{\eta}$ аналогичные рассуждения приводят к тому, что для произвольного класса СС $\mathbb{Z}_1''(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$

$$\mathrm{I}^{-1}[\bar{\eta}_{\mathbb{Z}_1''(\Theta)}(P(\Theta))] \subseteq \eta_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta)),$$

где $\mathbb{Z}_1''(\Theta) = \mathrm{i}\mathbb{Z}_1'(\Theta)$. Отсюда в силу того, что I — инъекция, получим вложение и в другую сторону

$$\bar{\eta}_{\mathbb{Z}_1''(\Theta)}(P(\Theta) \subseteq \mathrm{I}[\eta_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta))],$$

где $\mathbb{Z}_1''(\Theta) = \mathrm{i}\mathbb{Z}_1'(\Theta)$.

Тогда

$$\bar{\eta}'_{\mathbb{Z}_1''(\Theta)}(P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx}) = \bar{\eta}_{\mathbb{Z}_1''(\Theta)}(P(\Theta)) = \mathrm{I}[\eta_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta))] =$$

$$= \mathrm{I}[\eta'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx})],$$

где $\mathbb{Z}_1''(\Theta) = \mathrm{i}\mathbb{Z}_1'(\Theta)$.

Лемма доказана.

Тогда в силу теоремы 2 из [5] для произвольного класса $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$ отображение $\eta'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}$ является инъекцией и

$$\eta'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx}) = K_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)) = K_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)).$$

Отсюда

$$\mathrm{I}[\eta'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx})] = \mathrm{I}[K_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))] = \mathrm{I}[K_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))].$$

Используя леммы 1 и 2, из последних равенств получаем

$$\bar{\eta}'_{\mathbb{Z}_1''(\Theta)}(P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx}) = \bar{K}_{01}(\mathbb{Z}_1''(\Theta)) = \bar{K}_{02}(\mathbb{Z}_1''(\Theta)).$$

где $\mathbb{Z}_1''(\Theta) = \mathrm{i}\mathbb{Z}_1'(\Theta)$, при этом, поскольку $\eta'_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}$ и I являются инъекциями, $\bar{\eta}'_{\mathbb{Z}_1''(\Theta)}$ также будет инъекцией. Таким образом, вследствие произвольности класса СС $\mathbb{Z}_1''(\Theta) = \mathrm{i}\mathbb{Z}_1'(\Theta) \in \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$; теорема доказана.

Теорема 2. Для произвольного класса СС $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \in \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$ любое ПВК $\bar{g}^* \in \bar{K}_{02}(\mathbb{Z}_{01}'(\Theta))$ можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВК $g^* \in \bar{K}_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$.

Доказательство. В силу теоремы 3 из [5] для произвольного класса СС $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \in \mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$ всякое ПВК $\bar{g}^* \in K_{02}(\mathbb{Z}_{01}'(\Theta))$ можно, и притом единственным образом продолжить до ПВК $g^* \in K_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$.

Введем обозначение класса СС

$$\overline{\mathbb{Z}_{01}'}(\Theta) := \{((\mathbb{R}, \geqslant), \Theta, U, -g) : ((\mathbb{R}, \leqslant), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_{01}(\Theta)\} \subseteq \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta).$$

Тогда согласно лемме 1

$$\mathrm{I}(\overline{g}^*) \in \mathrm{I}[K_{02}(\mathbb{Z}'_{01}(\Theta))] = \overline{K}_{02}(\overline{\mathbb{Z}}_{01}(\Theta))$$

и $\mathrm{I}(g^*) \in \mathrm{I}[K_{01}(\mathbb{Z}'_1(\Theta))] = \overline{K}_{01}(\overline{\mathbb{Z}''_1}(\Theta))$, где $\mathbb{Z}''_1(\Theta) = \mathrm{i}\mathbb{Z}'_1(\Theta)$. При этом, поскольку I — инъекция, то когда $\overline{g}^*$ пробегает все элементы $K_{02}(\mathbb{Z}'_{01}(\Theta))$, $\mathrm{I}(\overline{g}^*)$ будет пробегать все элементы $\overline{K}_{02}(\overline{\mathbb{Z}'_{01}}(\Theta))$.

Теорема доказана.

Всюду далее L обозначает произвольное выпуклое множество таких Σ-измеримых ограниченных функций на Θ, что найдутся $a, b \in \mathbb{R}$, для которых множество $B_0(a,b)$ содержится в L:

$$B_0(a,b) \subseteq L = \mathrm{co}\, L \subseteq B. \tag{12}$$

Обозначим $V(L)$ класс всех функционалов v на L, т.е. $L \to \mathbb{R}$, а через $V_0(L) \subset V(L)$ — класс функционалов, удовлетворяющих для любых $f_1, f_2 \in L$ следующим условиям.

V1. Если $f_1(\theta) \le f_2(\theta)$ $\forall \theta \in \Theta$, то $v(f_1) \le v(f_2)$.

V2. Если $a', b' \in \mathbb{R}$, $a' \ge 0$ и $f_1(\theta) = a' f_2(\theta) + b'$ $\forall \theta \in \Theta$, то $v(f_1) = a' v(f_2) + b'$.

V3. Имеет место $v(f_1) + v(f_2) \ge 2v\left(\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2\right)$.

Теорема 3. Для произвольного класса СС $\mathbb{Z}'_1(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$ отображение $\eta'_{\mathbb{Z}'_1(\Theta)}$ является инъекцией и

$$\eta'_{\mathbb{Z}'_1(\Theta)}(P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}) = K_{01}(\mathbb{Z}'_1(\Theta)) = K_{02}(\mathbb{Z}'_1(\Theta)).$$

Доказательство. Согласно теореме 1 имеем

$$\overline{\eta}'_{\mathbb{Z}''_1(\Theta)}(P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}) = \overline{K}_{01}(\mathbb{Z}''_1(\Theta)) = \overline{K}_{02}(\mathbb{Z}''_1(\Theta));$$

значит,

$$\mathrm{I}^{-1}[\overline{\eta}'_{\mathbb{Z}''_1(\Theta)}(P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx})] = \mathrm{I}^{-1}[\overline{K}_{01}(\mathbb{Z}''_1(\Theta))] = \mathrm{I}^{-1}[\overline{K}_{02}(\mathbb{Z}''_1(\Theta))].$$

Отсюда, используя леммы 1 и 2, получаем

$$\eta'_{\mathbb{Z}'_1(\Theta)}(P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}) = K_{01}(\mathbb{Z}'_1(\Theta)) = K_{02}(\mathbb{Z}'_1(\Theta)).$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Для произвольного класса СС $\mathbb{Z}'_1(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$ любое ПВК $\overline{g}^* \in K_{02}(\mathbb{Z}'_{01}(\Theta))$ можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВК $g^* \in K_{01}(\mathbb{Z}'_1(\Theta))$.

Доказательство. В силу теоремы 6 из [6] для произвольного класса СС $\mathbb{Z}'_1(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$ любое ПВК $\overline{g}^* \in \overline{K}_{02}(\mathbb{Z}'_{01}(\Theta))$ можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВК $g^* \in \overline{K}_{01}(\mathbb{Z}'_1(\Theta))$.

Пусть $\overline{\mathbb{Z}'_{01}}(\Theta) := \{((\mathbb{R}, \leqslant), \Theta, U, -g) : ((\mathbb{R}, \leqslant), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'_{01}(\Theta)\} \subseteq \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$.

Тогда согласно лемме 1

$$\mathrm{I}^{-1}(\bar{g}^*) \in \mathrm{I}^{-1}[\bar{K}_{02}(\mathbb{Z}'_{01}(\Theta))] = K_{02}(\overline{\mathbb{Z}'_{01}}(\Theta)),$$

а

$$\mathrm{I}^{-1}(g^*) \in \mathrm{I}^{-1}[\bar{K}_{01}(\mathbb{Z}'_1(\Theta))] = K_{01}(\mathbb{Z}''_1(\Theta)),$$

где $\mathbb{Z}''_1(\Theta) = \mathrm{i}\mathbb{Z}'_1(\Theta)$.

При этом, поскольку I — инъекция, то когда $\bar{g}^*$ пробегает все элементы множества $\bar{K}_{02}(\mathbb{Z}'_{01}(\Theta))$, элемент $\mathrm{I}^{-1}(\bar{g}^*)$ будет пробегать все множество $K_{01}(\overline{\mathbb{Z}'_{01}}(\Theta))$.

Теорема доказана.

Теорема 5. Для произвольного непустого множества Θ функционал v на L удовлетворяет условиям V1, V2 и условию V3″ тогда и только тогда, когда найдется, и притом единственная, аддитивная вероятностная мера p на Θ такая, что $\forall f \in L$ имеет место

$$v(f) = \int_{\Theta} f(\theta)\, p(d\theta).$$

V3″. Если $f_1, f_2 \in L$, то $v(f_1) + v(f_2) = 2v\left(\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2\right)$.

Доказательство. Из теорем 1, 3 из [6] следует, что найдутся две выпуклые статистические закономерности P_1 и P_2 на Θ такие, что $\forall f \in L$ имеет место соотношение

$$\max_{p \in P_1} \int_{\Theta} f(\theta)\, p(d\theta) = v(f) = \min_{p \in P_2} \int_{\Theta} f(\theta)\, p(d\theta). \tag{13}$$

Предположим, что закономерности P_1 и P_2 не совпадают.

В силу симметрии без уменьшения общности можно считать, что найдется $p_1 \in P_1 \setminus P_2$. Тогда согласно теореме отделимости [9, теорема V.2.10] и теореме о представлении элементов пространства $B^*(\Theta, \Sigma)$ [9, теорема IV.5.1] найдется такой элемент $f \in B$, что

$$\int_{\Theta} f(\theta)\, p_1(d\theta) > \max_{p \in P_2} \int_{\Theta} f(\theta)\, p(d\theta).$$

Аналогично, не уменьшая общности, можно считать, что $f \in B_0(a, b)$. Отсюда следует, существование такого элемента $f \in B_0(a, b)$, для которого

$$\max_{p \in P_1} \int_{\Theta} f(\theta)\, p(d\theta) > \max_{p \in P_2} \int_{\Theta} f(\theta)\, p(d\theta) \geq \min_{p \in P_2} \int_{\Theta} f(\theta)\, p(d\theta),$$

что противоречит соотношению (13). Следовательно, закономерности P_1 и P_2 совпадают. Отсюда в силу соотношения (13) $\forall p_1, p_2 \in P_1,\ f \in L$

$$\int_{\Theta} f(\theta)\, p_1(d\theta) = \int_{\Theta} f(\theta)\, p_2(d\theta).$$

Тогда $\forall A \in \Sigma$ при $f(\theta) = \left(\frac{b}{2}\right)_A$ имеем

$$\frac{b}{2} p_1(A) = \int_{\Theta} \left(\frac{b}{2}\right)_A p_1(d\theta) = \int_{\Theta} \left(\frac{b}{2}\right)_A p_2(d\theta) = \frac{b}{2} p_2(A),$$

т.е. $p_1 = p_2$.

Доказательство в обратную сторону очевидным образом следует из теорем 1, 3 работы [6].

Теорема доказана.

Функционал, удовлетворяющий условиям теоремы 5, аналогичный критерию в известной теореме Энскомба–Ауманна, которая формулируется для задач принятия решений в необайесовской форме [1, 10]. Чтобы сформулировать аналог теоремы Энскомба–Ауманна, введем в рассмотрение отображение $\vartheta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}$: $PF(\Theta) \to K(\mathbb{Z}'(\Theta))$, где $PF(\Theta)$ — семейство всех аддитивных вероятностных мер на (Θ, Σ). Это отображение определяется следующим образом. Если

$$p \in PF(\Theta),\ \pi = \vartheta_{\mathbb{Z}'(\Theta)}(p),\ Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta),\ \pi(Z) = g_Z^*(\cdot),$$

то для любых $u \in U$

$$g_Z^*(u) = \int_\Theta g(\theta, u)\, p(d\theta)\,. \tag{14}$$

Тогда аналогом теоремы Энскомба–Ауманна является следующая теорема.

Теорема 6. Для произвольного класса СС $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta)$ отображение $\vartheta_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}$ является инъекцией и

$$\vartheta_{\mathbb{Z}_1'(\Theta)}(PF(\Theta)) = K_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)) \cap \overline{K}_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)) = K_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)) \cap \overline{K}_{02}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))\,.$$

Доказательство следует для $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$ из теорем 2 из [5], 5 из [6] и теоремы 5 настоящей статьи, а для $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$ — из теорем 1, 3 и 5 настоящей статьи.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого класса $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta)$ условия У1″, У2″, У3″, У4″, $\overline{\text{У4}''}$ на ПВК в классе $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ есть [У1″, У2″, У3″, У4″, $\overline{\text{У4}''}$] в классе с параметрами $p \in PF(\Theta)$, т.е. $PF(\Theta)$-МТПР в классе $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$.

Следствие 2. Для любой СС $Z' \in \mathbb{Z}(\Theta)$, являющейся определяющей, имеет место

$$\vartheta_{\{Z'\}}(PF(\Theta)) = \overline{K}_{02}(\{Z'\}) = \overline{\breve{K}_0}(\{Z'\}).$$

Следствие 3. Четверка (Θ, U, g, p) является полным математическим описанием ситуации с СС $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(\Theta)$ и аддитивной вероятностной мерой $p \in PF(\Theta)$ для [У1″, У2″, У3″, У4″, $\overline{\text{У4}''}$] в $\mathbb{Z}(\Theta)$ с параметром $p \in PF(\Theta)$.

Теорема 7. Для произвольного класса СС $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta)$ любое ПВК $\overline{g}^* \in K_{02}(\mathbb{Z}_{01}'(\Theta)) \cap \overline{K}_{02}(\mathbb{Z}_{01}'(\Theta))$ можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВК $g^* \in K_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta)) \cap \overline{K}_{01}(\mathbb{Z}_1'(\Theta))$.

Доказательство следует для $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$ из теорем 3 из [5], 6 из [6] и теоремы 5 настоящей статьи, а для $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$ — из теорем 2, 4 и 5 данной статьи.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого класса $\mathbb{Z}_1'(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta)$ условия У1″, У2″, У3″, У4″, $\overline{\text{У4}''}$ на ПВК в классе $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ есть [У1″, У2″, У3″, У4″, $\overline{\text{У4}''}$] в классе $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$ с параметром $p \in PF(\Theta)$, т.е. $PF(\Theta)$-МТПР в классе $\mathbb{Z}_1'(\Theta)$.

Следствие 2. Четверка (Θ, U, g, p) является полным математическим описанием ситуации со схемами $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(\Theta)$ и аддитивной вероятностной мерой $p \in PF(\Theta)$ для [У1″, У2″, У3″, У4″, $\overline{\text{У4″}}$] в $\mathbb{Z}'_{01}(\Theta)$ с параметром $p \in PF(\Theta)$.

Результаты, вытекающие из теорем 6 и 7, можно проинтерпретировать, в частности, таким образом, что условия У1″, У2″, У3″, У4″, $\overline{\text{У4″}}$ являются необходимыми и достаточными для математически корректной постановки задачи выбора предпочтения (ЗП) с любой МС $M = (Z, p)$, где $Z = (\Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'_1(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(\Theta)$, а $p \in PF(\Theta)$. При этом критерий в ЗП задается функцией полезности (вредности) $g_Z^*(u) = \int_{\Theta} g(\theta, u)\, p(d\theta)\ \forall u \in U$ при $\mathbb{Z}(\Theta) = \mathbb{Z}_{\geqslant}(\Theta)$ (при $\mathbb{Z}(\Theta) \subseteq \mathbb{Z}_{\leqslant}(\Theta)$). Более того, ТПР, согласные с указанными условиями для схем из класса $\mathbb{Z}'_{01}(\Theta)$, перенесут эти условия и на схемы класса $\mathbb{Z}'_1(\Theta)$. Иными словами, их предпочтения на решениях с конечным числом последствий в этом случае определяют предпочтения на всех решениях.

Таким образом, теоремы 6 и 7 представляют решение задачи непротиворечивости и полноты указанного формализма модели системы принятия решения (т.е. существования и единственности с точностью до аддитивной вероятности МС и ПВК) для задач принятия решений с денежными доходами (потерями), основанного на сочетании принципов гарантированного и наилучшего результатов в статистических формах, проявляющемся в безразличии к постоянству при выборе решений в антагонистических играх. При этом критерий оптимальности решения, представляющий $PF(\Theta)$-МТПР, является среднеожидаемыми по аддитивной вероятности потерями (доходами).

В заключение отметим, что получена так называемая модель субъективной ожидаемой полезности (SEU), в которой критерий оптимальности представляет среднеожидаемые потери (доходы) по субъективной вероятности, задаваемой аддитивным вероятностным распределением на основе формально-логических принципов оптимальности. При этом использован предложенный в работах [5, 6] аксиоматический подход к проблеме неопределенности в задачах принятия решений с предпочтением на решениях, задаваемых функцией полезности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Anscombe F.J., Aumann R.J. A definition of subjective probability // The Annals of Mathematics and Statistics. — 1963. — **34.** — P. 199–205.
2. Михалевич В.М. О некоторых классах правил выбора предпочтений в задачах принятия решения // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 6. — С. 140–154.
3. Иваненко В.И., Лабковский В.А. Проблема неопределенности в задачах принятия решений. — К.: Наук. думка, 1990. — 136 с.
4. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974. — 496 с.
5. Михалевич В.М. К параметрической задаче решения с денежными потерями // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 2. — С. 131–142.
6. Михалевич В.М. К параметрической задаче решения с денежными доходами // Там же. — № 5 — С. 163–169.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — 542 с.
8. Лейхтвейс К. Выпуклые множества: Пер. с нем. — М.: Наука, 1985. — 336 с.
9. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы (общая теория): Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит, 1962. — 896 с.
10. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений: Пер. с англ. — М.: Наука, 1978. — 352 с.

Поступила 20.03.2011