УДК 519.217; 519.718; 519.837

В.К. ЯСИНСКИЙ, И.В. МАЛЫК

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ПО ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПУАССОНОВСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Ключевые слова: *стохастическая динамическая система, система с последействием, пуассоновское возмущение.*

ВВЕДЕНИЕ

Системы с запаздывающими связями и с последействием используются во многих областях современной науки и техники [9, 13, 15–22, 24]. Например, в системах автоматического регулирования запаздыванием является промежуток времени, который необходим системе для реагирования на входной сигнал. Процесс горение топлива в жидкостных ракетных двигателях также содержит существенное запаздывание. Системы с запаздыванием или последействием часто используются также в электрорадиосвязи, радиолокации, радионавигации. Здесь запаздывание обусловлено конечной скоростью движения носителей электрических зарядов, а также наличием некоторого времени для прохождения электромагнитными волнами значительных расстояний. В низкочастотных устройствах запаздыванием обычно можно пренебречь, а в высокочастотных устройствах, где время запаздывания уже сравнивается с переходом колебаний, пренебречь этим запаздыванием невозможно. Системы с запаздыванием описываются дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом [1, 9, 10, 13], а системы с последействием описываются дифференциально-функциональными уравнениями [12, 17, 19, 24]. В настоящее время достаточно хорошо разработана лишь теория линейных уравнений [1, 10], а для нелинейных уравнений теория находится в завершающий стадии [18, 19, 24]. Однако для специального класса нелинейных (квазилинейных) уравнений разработан метод функционалов Ляпунова–Красовского [9, 10, 12, 20]. Для исследования колебательных процессов, описываемых квазилинейными уравнениями, разработан ряд приближенных методов — методов малого параметра [11, 13, 19].

С увеличением потребностей в области радиофизики, электроники, автоматического регулирования, экономики, теории страхования и т.д. возникла необходимость учитывать воздействия различного рода случайных сил на динамические системы [4, 8–10, 18–20, 23–27].

Такие проблемы, как создание высокочастотных генераторов, обнаружение слабых сигналов на фоне «шума», повышение точности измерений, космическая связь и т.д. привели к потребности учета флуктуационных явлений с воздействием случайных толчков извне [16, 20]. Для этого необходимо изучать свойства решений уравнений со случайными функциями, так называемые стохастические дифференциальные уравнения. Первые результаты в этой области принадлежат С.Н. Бернштейну и Н.Н. Крылову, а основные результаты в этой теории были получены в работах И.И. Гихмана, А.В. Скорохода [4, 11, 14]. Продолжением этой теории являются стохастические дифференциально-функциональные, стохастические интегро-функциональные уравнения Вольтерры [4, 9, 14, 18–25].

Важным для большинства радиотехнических систем являются ламповые генераторы различной модификации [13, 15, 16], а следовательно, их изучение представляет как теоретический, так и практический интерес.

Ламповые генераторы (ЛГ) являются неотъемлемым узлом передающих радиостанций и радиоприемников, необходимой частью аппаратуры любой высокочастотной системы дальней космической связи. ЛГ широко применяются в приборах, предназначенных для налаживания электрических устройств, а также для создания электрических колебаний, используемых в геофизической разведке. Помимо радиотехнических устройств, ЛГ применяются в промышленных устройствах для высокочастотного нагрева. В последние десятилетия повышается интерес к ЛГ с задержкой сигнала в цепи обратной связи.

В настоящей статье изучены колебания в квазилинейных стохастических дифференциально-функциональных уравнениях (СДФУ) с винеровскими и пуассоновскими возмущениями.

Пусть система с последействием такова, что члены с запаздыванием не малы, т.е. не пропорциональны малому параметру $\varepsilon \to 0$. Учет этих членов приводит к системе дифференциальных уравнений, которая не является системой в стандартной форме. Такое ДУ получается при исследований работы ЛГ с запаздывающей обработкой связью в случае $MS >> RC$ [13, 15, 16].

В настоящей статье разработан приближенный метод исследования для таких СДФУ, а также рассматривается СДФУ с винеровскими и пуассовскими возмущениями, для которых доказывается факт непрерывной зависимости от параметра, аналогично как и для СДУ без последействия [4].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть случайный процесс $x(t) \equiv x(t, \omega)\colon [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ задан на вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \ge 0\}$ — фильтрация, стохастическим дифференциально-функциональным уравнением с пуассоновскими возмущениями (СДФУПВ)

$$dx(t) = m(t, x_t, \varepsilon)dt + \sigma(t, x_t, \varepsilon)dw(t) + \int\limits_U \lambda(t, x_t, u, \varepsilon)\widetilde{\nu}(dt, du) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t); \ -\tau \le t \le 0 . \tag{2}$$

Здесь $\{x_t \equiv x(t+\theta),\ -\tau \le \theta \le 0\} \in S([-\tau, 0])$ — пространство Скорохода непрерывных справа функций, которые имеют левосторонние пределы [2, 4, 7, 26]. В дальнейшем обозначим $S([-\tau,0], \mathbb{R}^n)$ пространство, полученное как n-кратное произведение $S([-\tau,0])$ на себя, а значит $x_t \in S([-\tau,0], \mathbb{R}^n)$. Обозначим $\mathcal{F}_t^{/}$ σ-алгебру, относительно которой измеримы винеровский процесс $w(t) \equiv w(t, \omega)$ с нулевым сносом и единичным параметром диффузии и центрированная пуассоновская мера $\widetilde{\nu}(dt, du) \equiv \widetilde{\nu}(dt, du, \omega) \equiv \nu(dt, du, \omega) - dt\Pi(du)$ [4] такие, что:

1) $\mathcal{F}_{t_1}^{/} \supset \mathcal{F}_{t_2}^{/}$ для $t_1 \ge t_2$;

2) приращение $w(t, \omega) - w(\dot{s}, \omega)$ не зависит от $\mathcal{F}_{s_1}^{/}$; приращение $\widetilde{\nu}(t, A, \omega) - \widetilde{\nu}(s, A, \omega)$ не зависит от $\mathcal{F}_{s_1}^{l} \times \gamma$, если $t \ge s \ge s_1$.

Тогда $\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ — поток σ-алгебр, построенный на $\mathcal{F}_t^{l} \vee \mathcal{F}_t^{/} \times G$ и некоторой σ-алгебре $\mathcal{F}$, относительно которой $w(t), \bar{\nu}(t, A)$ независимы, а также взаимно независимы при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}_+$. Далее заданы функционалы по второму аргументу $m(t, \cdot, \varepsilon)$, $\sigma(t, \cdot, \varepsilon)$: $\mathbb{R}_+ \times S([-\tau, 0]) \to \mathbb{R}^n$, $\lambda(t, \cdot, u, \varepsilon)$: $\mathbb{R}_+ \times S([-\tau,0]) \times U \to \mathbb{R}^n$, где $\varepsilon > 0$ является малым положительным параметром, который принимает значения из некоторой окрестности $\varepsilon_0 = 0$.

В [4, 14, 20] доказано, что сильное решение для СДФУПВ (1), (2) $\forall t \in [0, T]$

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t m(s, x_s, \varepsilon) ds + \int_0^t \sigma(s, x_s, \varepsilon) dw(s) + \int_0^t \int_U \lambda(s, x_s, u, \varepsilon) \widetilde{\nu}(ds, du) \qquad (3)$$

существует с точностью до стохастической эквивалентности, $\mathcal{F}_t$ измеримо при приведенных ниже условиях, где $u \in U \equiv \mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство.

Для сокращения записей при доказательствах введем следующие обозначения:

$$m^\varepsilon(t, \cdot) \equiv m(t, \cdot, \varepsilon); \;\; \sigma^\varepsilon(t, \cdot) \equiv \sigma(t, \cdot, \varepsilon); \;\; \lambda^\varepsilon(t, \cdot) \equiv \lambda(t, \cdot, \varepsilon).$$

Существует ограниченная мера $\mu_r \equiv \mu$ на отрезке $[-\tau, 0]$ такая, что $\forall t \geq 0$ и $\forall \varphi$, $\psi \in S([-\tau, 0])$ выполняются условия:

1) $$|m^\varepsilon(t, \varphi) - m^\varepsilon(t, \psi)| + |\sigma^\varepsilon(t, \varphi) - \sigma^\varepsilon(t, \psi)| + \int_U |\lambda^\varepsilon(t, \varphi, u) - \lambda^\varepsilon(t, \psi, u)| \, \Pi(du) \leq$$
$$\leq \int_{-\tau}^0 \left|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\right| d\mu_r(\theta),$$

где $\|\varphi\| \equiv \sup\limits_{-\tau \leq \theta \leq 0} \mathbb{E}\{|\varphi(\theta)|^2\}^{1/2}$, $\mathbb{E}\{\}$ — операция математического ожидания, причем $\|\varphi\| \leq r$; $\|\psi\| \leq r$;

2) $$|m^\varepsilon(t, \varphi)|^2 + |\sigma^\varepsilon(t, \varphi)|^2 + \int_U |\lambda^\varepsilon(t, \varphi, u)|^2 \, \Pi(du) \leq C \int_{-\tau}^0 (1 + |\varphi(\theta)|^2) d\mu_r(\theta)$$

для $\forall \varphi \in S([-\tau, 0])$, $\forall t \geq 0$; C — постоянное;

3) $$\int_t^{t+\delta} |m^\varepsilon(s, \varphi) - m^0(s, \varphi)| \, ds \leq \psi(\varepsilon) \int_{-\tau}^0 (1 + |\varphi(\theta)|) d\mu_r(\theta) \;\text{ для }\; \forall t \in [0, T],$$

$T > 0$, $\delta > 0$;

4) $$\int_0^T |\sigma^\varepsilon(t, \varphi) - \sigma^0(t, \varphi)|^2 \, dt + \int_0^t \int_U |\lambda^\varepsilon(t, \varphi, u) - \lambda^0(t, \varphi, u)|^2 \, ds \Pi(du) \leq$$

$$\leq \psi(\varepsilon) \int_{-\tau}^0 (1 + \left|\varphi(\theta)\right|^2) d\mu_r(\theta),$$

где $\psi(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\delta = 0(\delta) > 0$.

Отметим, что из п. 1 следует п. 1′:

1′) $$|m^\varepsilon(t, \varphi) - m^\varepsilon(t, \psi)|^2 + |\sigma^\varepsilon(t, \varphi) - \sigma^\varepsilon(t, \psi)|^2 +$$

$$+ \int_U |\lambda^\varepsilon(t, \varphi, u) - \lambda^\varepsilon(t, \psi, u)|^2 \, \Pi(du) \leq C_1 \int_{-\tau}^0 \left|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\right|^2 d\mu_r(\theta),$$

где C_1 — некоторая константа;

5) $\|\varphi\| \leq C$, $\int_0^T \int_U dt \Pi(du) < K$, где $C, K > 0$ — положительные константы и $\Pi(du) dt = \mathbb{E}\{\nu(du, dt)\}$ — параметр пуассоновской меры $\nu(du, dt)$ [4].

Получим достаточные условия, при которых сильное решение СДФУПВ (1), (2) непрерывно зависит от параметра $\varepsilon > 0$ при $\varepsilon \to 0$.

2. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СДФУПВ

В дальнейшем решение СДФУПВ будем считать сильным решением задачи Коши (1), (2) [4, 14, 24].

Аналогично [19] введем конечно-разностную аппроксимацию для решения задачи (1), (2) на конечном отрезке $[0, T]$, $T > 0$.

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[0, T]$ точками $0 \equiv t_0 < t_1 < \ldots$ $\ldots < t_N \equiv T$, а для $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{0, N-1}$, запишем

$$y(t) = y(t_k) + m^{\varepsilon}(t, y_{t_k})(t - t_k) + \sigma^{\varepsilon}(t, y_{t_k})[w(t) - w(t_k)] +$$
$$+ \int_U \lambda^{\varepsilon}(t, y_t, u)[\widetilde{\nu}(t, y_{t_k}, u) - \widetilde{\nu}(t_k, y_{t_k}, u)] . \qquad (4)$$

Случайный процесс, заданный выражением (4), назовем конечно-разностной аппроксимацией решения задачи (1), (2).

Докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Если $\varphi \in S([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ и выполняются условия 4 и 5 из разд. 1, то $\| x_t \|^2 \le C_1$ для $t \in [0, T]$, где $C_1 > 0$ — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. Формально записанное СДФУПВ (1) следует понимать как интегральное уравнение

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t m^{\varepsilon}(\tau, x_\tau) d\tau + \int_0^t \sigma^{\varepsilon}(\tau, x_\tau) dw(\tau) + \int_0^t \int_U \lambda^{\varepsilon}(\tau, x_\tau, u)(d\tau, du) , \qquad (5)$$

где второй интеграл является интегралом Ито, а третий является интегралом по случайной пуассоновской мере [4, 6, 7].

Если $-\tau \le t \le 0$, то $x_t = \varphi$ ограничено по условию. Когда $t > 0$, то (5) перепишем в виде

$$x_t = \varphi(0) + \int_0^{t+\theta} m^{\varepsilon}(\tau, x_\tau) d\tau + \int_0^{t+\theta} \sigma^{\varepsilon}(\tau, x_\tau) dw(\tau) + \int_t^{t+\theta} \int_U \lambda^{\varepsilon}(\tau, x_\tau, u) \widetilde{\nu}(d\tau, du) . \qquad (6)$$

Используя известное неравенство $\left(\sum_{i=1}^{4} a_i \right) \le 4 \sum_{i=1}^{4} a_i^2$, условие 2, неравенство Коши–Буняковского [17], а также свойства стохастических интегралов Ито и интеграла по пуассоновской мерой [3], получаем

$$\| x_t \|^2 \le 4[| \varphi(0)|^2 + \| \int_0^{t+\theta} m^{\varepsilon}(s, x_s) ds \|^2 + \| \int_0^{t+\theta} \sigma^{\varepsilon}(s, x_s) dw(s) \|^2 +$$
$$+ \| \int_0^{t+\theta} \int_U \lambda^{\varepsilon}(s, x_s, u) \widetilde{\nu}(ds, du) \|^2] \le 4[C + Ct(t + K + 1) \int_0^t \sup_{-\tau \le \theta \le 0} \mathbb{E} \{| x_s |^2 \} ds] .$$

Учитывая, что $t \in [0, \tau]$, легко получить неравенство

$$\| x_t \|^2 \le C + C_1 \int_0^t \| x_s \| ds , \qquad (7)$$

где $C_1 = \begin{cases} C\tau(\tau + K + 1) \text{ при } \tau \ge 1, \\ C \text{ при } 0 \le T < 1. \end{cases}$

Из неравенства (7) по лемме Гроноуллу–Беллмана [1] имеем $\| x_t \|^2 \le C_1 e^{Ct} \le C_1 e^{CT}$, что и доказывает лемму 1.

Лемма 2. Пусть выполнены условия 4 и 5. Тогда для достаточно малых $\delta > 0$ имеет место неравенство $\| x_{t+\delta} - x_t \|^2 \le C_2 \delta$.

Доказательство. Согласно (6) запишем интегральное уравнения

$$x_{t+\delta}-x_t=\int_{t+\theta}^{t+\theta+\delta} m^{\varepsilon}(s,x_s)ds+\int_{t+\theta}^{t+\theta+\delta}\sigma^{\varepsilon}(s,x_s)dw(s)+\int_{t+\theta}^{t+\theta+\delta}\lambda^{\varepsilon}(s,x_s,u)\widetilde{\nu}(ds,du).$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|x_{t+\delta}-x_t\|^2\le 3\|\int_{t+\theta}^{t+\theta+\delta} m^{\varepsilon}(s,x_s)ds\|^2+3\|\int_{t+\theta}^{t+\theta+\delta}\sigma^{\varepsilon}(s,x_s)dw(s)\|^2+$$

$$+3\|\int_{t+\theta}^{t+\theta+\delta}\lambda^{\varepsilon}(s,x_s,u)\widetilde{\nu}(ds,du)\|^2\le 3\delta\int_{t+\theta^*}^{t+\theta^*+\delta}\mathbb{E}\left\{\int_{-\tau}^{0}(1+|x_s(\theta)|^2\,d\mu_r(\theta))\right\}ds+$$

$$+3(1+K)\int_{t+\theta^*}^{t+\theta^*+\delta}\mathbb{E}\left\{\int_{-\tau}^{0}(1+|x_s(\theta)|^2\,d\mu_r(\theta))\right\}d\tau\le\left\{\delta C_1+C_1\int_{t+\theta^*}^{t+\theta^*+\delta}\sup_{-\tau\le\theta\le 0}\mathbb{E}\{|x_s|^2\}ds\right\}^{1/2}+$$

$$+\left\{\delta C_1+C_1\int_{t+\theta^*}^{t+\theta^*+\delta}\sup\mathbb{E}\{|x_s|^2\}ds\right\}^{1/2},$$

где $C_1>0$ — некоторая константа.

Заметим, что θ^* — значение $\theta\in[-\tau,0]$, при котором достигается верхняя грань в θ правой части неравенства. Тогда в силу леммы 1 получим окончательное неравенство

$$\|x_{t+\delta}(\theta)-x_t(\theta)\|^2\le\delta^2C_1+\delta C_2\le C_3\delta,$$

если $\delta>0$ достаточно мало. ■

Далее с помощью лемм 1 и 2 докажем утверждение о стремлении конечно-разностной аппроксимации (4) для решения СДФУПВ (3) к его точному решению, если длина разбиения $\Delta\equiv\max_{0\le t\le N-1}(t_{i+1}-t_i)\to 0$. Значит, можно установить, что решение СДФУПВ (1) непрерывно зависит от параметра $\varepsilon>0$ при $\varepsilon\to 0$.

Теорема 1. Пусть $m^{\varepsilon}(t,\circ)$, $\sigma^{\varepsilon}(t,\circ)$ и $\lambda^{\varepsilon}(t,\circ,u)$ дифференцируемы по t и удовлетворяют условиям лемм 1 и 2.

Тогда

$$\lim_{\Delta\to 0}\|x_t-y_t\|^2=0,$$

где $\Delta\equiv\max_{0\le t\le N-1}(t_{i+1}-t_i)$, $x_t=\{|x(t+\theta)|,\tau\le\theta\}$, $y_t=\{|x(t+\theta)|,-\tau\le\theta\le 0\}$ для фиксированного $t\in[o,\tau]$.

Доказательство. При $\forall t\in[t_k,t_{k+1}]$ можно записать для отрезков решений $x_t\in S([t-\tau,t],\mathbb{R}^n)$ уравнения (5) и его аппроксимации $y_t\in S([t-\tau,t],\mathbb{R}^n)$, заданной (4), в виде интегральных уравнений

$$x_t=x(\alpha_k(\theta))+\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}m^{\varepsilon}(s,x_s)ds+\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}\sigma^{\varepsilon}(s,x_s)dw(s)+\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}\int_U\lambda^{\varepsilon}(s,x_s,u)\widetilde{\nu}(ds,du);$$

$$y_t=y(\alpha_k(\theta))+\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}m^{\varepsilon}(t+\theta,y_{\alpha_k(\theta)}(\theta))ds+\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}\sigma^{\varepsilon}(t+\theta,y_{\alpha_k(\theta)}(\theta))dw(s)+$$

$$+\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}\int_U\lambda^{\varepsilon}(t+\theta,y_{\alpha_k(\theta)}(\theta),u)\widetilde{\nu}(ds,du).$$

Здесь в качестве $\alpha_k(\theta)$ выступает левая граница того отрезка $[t_j, t_{j+1}]$, которому принадлежит $t+\theta$, если $t \in [t_j, t_{j+1}]$.

Рассмотрим разность

$$x_t - y_t = x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta)) + \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} [m^\varepsilon(s, x_s) - m^\varepsilon(t+\theta, y_{\alpha_k(\theta)}(\theta))]\, ds +$$

$$+ \int_{\alpha_k \theta}^{t+\theta} [\sigma^\varepsilon(s, x_s) - \sigma^\varepsilon(t+\theta, y_{\alpha_k(\theta)}(\theta))]\, dw(s) +$$

$$+ \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} \int_U [\lambda^\varepsilon(s, x_s(\theta), u) - \lambda^\varepsilon(t+\theta, y_{\alpha_k(\theta)}(\theta), u) \widetilde{\nu}(ds, du)].$$

Представим ее в виде

$$x_t - y_t = x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta)) + \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} [p_1(s) + p_2(s) + p_3(s)]\, d\widetilde{s}\,, \tag{8}$$

$d\widetilde{s}$ означает наличие в $p_i(s)$, $i = \overline{1,3}$, соответственно дифференциалов $ds, dw(s), \widetilde{\nu}(ds, du)$, а именно

$$p_1(s) d\widetilde{s} = [m^\varepsilon(s, x_{\alpha_k(\theta)}) - m^\varepsilon(s, y_{\alpha_k(\theta)})] ds + [\sigma^\varepsilon(s, x_{\alpha_k(\theta)}) - \sigma^\varepsilon(s, y_{\alpha_k(\theta)})] dw(s) +$$

$$+ \int_U [\lambda^\varepsilon(s, x_{\alpha_k(\theta)}, u) - \lambda^\varepsilon(s, y_{\alpha_k(\theta)}, u) \widetilde{\nu}(ds, du)];$$

$$p_2(s) d\widetilde{s} = [m^\varepsilon(s, x_s) - m^\varepsilon(s, x_{\alpha_k(\theta)})] d\tau + [\sigma^\varepsilon(s, x_s) - \sigma(s, x_{\alpha_k(\theta)})] dw(s) +$$

$$+ \int_U [\lambda^\varepsilon(s, x_s, u) - \lambda^\varepsilon(s, x_{\alpha_k(\theta)}, u) \widetilde{\nu}(ds, du)];$$

$$p_3(s) d\widetilde{s} = [m^\varepsilon(s, y_{\alpha_k(\theta)}) - m^\varepsilon(t+\theta, y_{\alpha_k(\theta)})] ds + [\sigma^\varepsilon(s, y_{\alpha_k(\theta)}) - \sigma(t+\theta, y_{\alpha_k(\theta)})] dw(s) +$$

$$+ \int_U [\lambda^\varepsilon(s, y_{\alpha_k(\theta)}, u) - \lambda^\varepsilon(t+\theta, y_{\alpha_k(\theta)}, u) \widetilde{\nu}(ds, du)].$$

Далее обе части равенства (8) возведем в квадрат и, применяя операцию математического ожидания, получим

$$\mathbb{E} \| x_t - y_t \|^2 \le \mathbb{E} \{ | x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta)) |^2 \} +$$

$$+ 2\mathbb{E} \left\{ | x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta)) |^2 \cdot \left| \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} (p_1(s) + p_2(s) + p_3(s)) d\widetilde{s} \right| \right\} +$$

$$+ \mathbb{E} \left\{ \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} [p_1(s) + p_2(s) + p_3(s)] d\widetilde{s} \right\}. \tag{9}$$

С учетом $p_i(s)$, $i = \overline{1,3}$, оценим три слагаемых в правой части неравенства (9):

$$\mathbb{E} \{ | x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta)) |^2 \} \le \| x_{\alpha_k(\theta)}(\theta) - y_{\alpha_k(\theta)}(\theta) \|^2 ,$$

$$\mathbb{E} \left\{ | x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta)) |^2 \cdot \left| \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} (p_1(s) + p_2(s) + p_3(s)) d\widetilde{s} \right| \right\} \le$$

$$\leq \mathbb{E}\left\{ |x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta))| \left(\left| \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_1(s) d\widetilde{s} \right| + \left| \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_2(s) d\widetilde{s} \right| + \left| \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_3(s) d\widetilde{s} \right| \right) \right\}.$$

Известно [4, 25], что для случайных процессов $f(t, \omega)$ и $f_1(t, \omega)$, измеримых относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$, имеют место равенства

$$\mathbb{E}\left\{ f(t, \omega) \int_{t_1}^{t_2} v_1(s, \omega) dw(s, \omega) \right\} = 0;$$

$$\mathbb{E}\left\{ f_1(t, \omega) \int_{t_1}^{t_2} \int_U v_1(s, u, u) \widetilde{\nu}(ds, du, \omega) \right\} = 0.$$

Тогда можно провести следующие оценки для второго слагаемого правой части неравенства (9):

$$\mathbb{E}\left\{ |x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta))| \cdot \left| \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_1(s) d\widetilde{s} \right| \right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{E}\left\{ |x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta))| \left| \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} [(m^{\varepsilon}(s, x_{\alpha_k(\theta)}) - m^{\varepsilon}(s, y_{\alpha_k(\theta)}))] ds \right| \right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{E}\left\{ |x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta))| \int_{\alpha_k(\theta)-\tau}^{t+\theta} \int^{0} |x_{\alpha_k(\theta)}(\theta) - y_{\alpha_k(\theta)}(\theta)| \, d\mu_r(\theta) ds \right\} \leq$$

$$\leq \left\{ \mathbb{E}\left\{ \left| x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta)) \right|^2 \Delta \int_{\alpha_k(\theta)-\tau}^{t+\theta} \int^{0} \left\{ \left| x_{\alpha_k(\theta)}(\theta) - y_{\alpha_k(\theta)}(\theta) \right|^2 d\mu_r(\theta) ds \right\} \right\} \right\} \leq$$

$$\leq \Delta C \, \| x_{\alpha_k(\theta)}(\theta) - y_{\alpha_k(\theta)}(\theta) \| ; \qquad (10)$$

$$\mathbb{E}\left\{ |x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta))| \cdot \left| \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_2(s) d\widetilde{s} \right| \right\} \leq$$

$$\leq \left\{ \mathbb{E}|x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta))|^2 \cdot C \cdot \Delta \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} \int_{-\tau}^{0} \mathbb{E}|x_{\alpha_k(\theta)}(\theta) - y_{\alpha_k(\theta)}(\theta)|^2 \, d\mu_r(\theta) ds + \right.$$

$$\left. + C \cdot \Delta \cdot K \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} \int_{-\tau}^{0} \mathbb{E}|x_{\alpha_k(\theta)}(\theta) - y_{\alpha_k(\theta)}(\theta)|^2 \, d\mu_2(\theta) ds \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C_1 \Delta^{3/2} \, \| x_{\alpha_k(\theta)}(\theta) - y_{\alpha_k(\theta)}(\theta) \| ; \qquad (11)$$

$$\mathbb{E}\left\{ |x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta))| \cdot \left| \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_3(s) d\widetilde{s} \right| \right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{E}\left\{ |x(\alpha_k(\theta)) - y(\alpha_k(\theta))| \, \Delta \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} \left| \frac{dm(t, y_{\alpha_k(\theta)}(\theta))}{dt} \right| ds \right\} \leq$$

$$\leq \Delta^2 C_1 \, \| x_{\alpha_k(\theta)}(\theta) - y_{\alpha_k(\theta)}(\theta) \| . \qquad (12)$$

Перейдем к оценке третьего слагаемого неравенства (9):

$$\mathbb{E}\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_1(s)+p_2(s)+p_3(s)d\widetilde{s}\right| \le$$

$$\le 3\left\{\mathbb{E}\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_1(s)d\widetilde{s}\right|^2+\mathbb{E}\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_2(s)d\widetilde{s}\right|^2+\mathbb{E}\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_3(s)d\widetilde{s}\right|^2\right\},$$

где

$$\mathbb{E}\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_1(s)d\widetilde{s}\right|^2 \le 3\left[\mathbb{E}\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} m^{\varepsilon}(s,\ x_{\alpha_k(\theta)}(\theta))-m^{\varepsilon}(s,\ y_{\alpha_k(\theta)}(\theta))ds\right|\right]+$$

$$+\mathbb{E}\left\{\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}\sigma^{\varepsilon}(s, x_{\alpha_k(\theta)}(\theta))-\sigma^{\varepsilon}(s,\ y_{\alpha_k(\theta)}(\theta))|\,dw(s)\right\}^2+$$

$$+\mathbb{E}\left\{\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}\int_U|\lambda^{\varepsilon}(s, x_{\alpha_k(\theta)}(\theta),u)-\lambda^{\varepsilon}(s,\ y_{\alpha_k(\theta)}(\theta),u)|\,d\widetilde{\nu}(ds,\ du)\right\}^2 \le$$

$$\le 3(\Delta+K+1)\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}\int_{-\tau}^{0}\mathbb{E}\,|x_{\alpha_k(\theta)}(\theta)\ y_{\alpha_k(\theta)}(\theta)|^2\ d\mu_2(\theta)ds \le$$

$$\le C_1\Delta(\Delta+K+1)\,\|x_{\alpha_{k(\theta)}}(\theta)-y_{\alpha_{k(\theta)}}(\theta)\|^2\ ; \tag{13}$$

$$\mathbb{E}\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_2(s)d\widetilde{s}\right|^2 \le 3(\Delta+K+1)\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}\|x_{\tau}(\theta)-x_{\alpha_k(\theta)}(\theta)\|^2 \le C_1\Delta^2(\Delta+K+1); \tag{14}$$

$$\mathbb{E}\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_1(s)d\widetilde{s}\right|^2 \le$$

$$\le \mathbb{E}\left\{\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}\frac{dm^{\varepsilon}(t_1^*,\ x_{\alpha_k}(\theta))}{dt}\,ds\right\}^2+\mathbb{E}\left\{\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}\frac{d\sigma(t_1^*,\ y_{\alpha_k}(\theta))}{dt}\,dw(s)\right\}^2+$$

$$+\mathbb{E}\left\{\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}\int_U d\lambda^{\varepsilon}(t_3^*,\ y_{\alpha_k}(s),u)d\widetilde{\nu}(ds,du)\right\}^2 \le C_1\Delta^3(\Delta+K+1)\,. \tag{15}$$

Объединяя полученные неравенства (13)–(15) для оценки третьего слагаемого в (9), неравенства (10)–(12) для оценки второго слагаемого в (9), получаем оценку

$$\mathbb{E}\,\|x_t-y_t\|^2 \le [1+K+\Delta C_1(1+\Delta)]\,\|x_{\alpha_{k(\theta)}}(\theta)-y_{\alpha_{k(\theta)}}(\theta)\|^2+(c_1\Delta^{3/2}+c_1\Delta^2)\times$$

$$\times\|x_{\alpha_{k(\theta)}}(\theta)-y_{\alpha_{k(\theta)}}(\theta)\|+C_1(K+1+\Delta)\Delta^2+C\Delta^3(K+1+\Delta)\,.$$

Так как $\| x_{\alpha_{k(\theta)}}(\theta) - y_{\alpha_{k(\theta)}}(\theta) \| \le C$, то для достаточно малого $\Delta > 0$ последнее неравенство примет вид

$$\mathbb{E} \| x_t - y_t \|^2 \le (K + 1 + \Delta C) \| x_{\alpha_{k(\theta)}}(\theta) - y_{\alpha_{k(\theta)}}(\theta) \|^2 + C_2 \Delta^{3/2},$$

где C_2 — соответствующая константа.

После перехода в этом неравенстве к точной верхней грани по $\theta \in [-\tau, 0]$ окончательно можно получить для $t \in [t_k, t_{k+1}]$ оценку

$$\| x_t - y_t \|^2 \le (1 + K + C\Delta) \| x_{\alpha^*}(\theta) - y_{\alpha^*}(\theta) \|^2 + C_2 \Delta^{3/2}, \tag{16}$$

где $\alpha^* \equiv \alpha_k(\theta^*)$ совпадает с некоторым $t_i \le t_k$, $i = \overline{0, N-1}$. Для получения последних неравенств воспользуемся условием 1, дифференцируемостью $m^\varepsilon(t, \circ)$, $\sigma^\varepsilon(t, \circ)$ и $\lambda^\varepsilon(t, \circ, u)$ по t, а также леммами 1 и 2.

Используя неравенство (16), как рекуррентное соотношение, получим для $\forall t \in [0, t]$ окончательную оценку

$$\| x_t - y_t \|^2 \le (1 + K + C\Delta) \| x_0(\theta) - y_0(\theta) \|^2 + C_2 \Delta^{3/2} \sum_{l=0}^{n} (1 + K + C\Delta)^l \le \sqrt{\Delta} K_1,$$

где $L \equiv \left\{ \max_k (t_{k+1} - t_k);\ \min_k (t_{k+1} - t_k) \right\}$, а $K_1 \equiv K(T, L, C)$.

Отсюда при $\Delta \to 0$ имеем утверждение теоремы 1.

3. О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ СДФУПВ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Рассмотрим метод анализа решения СДФУПВ (1), основанного на замене решения (случайного процесса) этого уравнения некоторым конечномерным марковским процессом [5].

Утверждение о близости этих процессов на асимптотически большом интервале времени основано на методе усреднения [19], который является следствием утверждения непрерывной зависимости решения СДФУПВ от параметра $\varepsilon > 0$. Это утверждение в некотором случае позволяет говорить о непрерывной зависимости такого решения от параметра, хотя при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ правая часть уравнения не имеет предела. Например, решение уравнения

$$dx = \left(\sin \frac{t}{\varepsilon} \right) x dt;\ x(0) = x_0 \tag{17}$$

имеет вид

$$x(t) = x_0 \exp \left\{ -\varepsilon \cos \frac{t}{\varepsilon} \right\}$$

и при $\varepsilon \to 0$ оно стремится к x_0, т.е. к решению уравнения $dx = 0;\ x(0) = x_0$. Однако правая часть уравнения (17) не имеет предела при $\varepsilon \to 0$, но для малого $T > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \sin \frac{t}{\varepsilon} dt = 0 .$$

Это означает, что «интегральная непрерывность» для стохастических систем имеет особенность [3].

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и условия 1 и 3 п. 1. Тогда решение СДФУПВ (1), (2) непрерывно в среднем по ε при $\varepsilon \to 0$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} \{ | x^\varepsilon(t) |^2 \} \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E} \{ | x(t, \omega, \varepsilon) |^2 \} = \mathbb{E} \{ | x(t, \omega, 0) |^2 \} .$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[0, T]$ точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ $\ldots < t_{n-1} < t_n = T$. Тогда для $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$, исходя из интегрального уравнения (3), можно записать для отрезка решения интегральное уравнение

$$x_t^{\varepsilon}(\theta) = x^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta)) + \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} m^{\varepsilon}(s, x_s^{\varepsilon}(\theta))ds + \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} \sigma^{\varepsilon}(s, x_s^{\varepsilon}(\theta))dw(s) +$$

$$+ \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} \int_U \lambda^{\varepsilon}(s, x_s^{\varepsilon}(\theta))\widetilde{\nu}(ds, du).$$

Отсюда очевидно уравнение

$$x_t^{\varepsilon}(\theta) - x_t^0(\theta) = x^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta)) - x^0(\alpha_k(\theta)) + \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} [m^{\varepsilon}(s, x_s^{\varepsilon}(\theta)) - m^0(s, x_s^0(\theta))]ds +$$

$$+ \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} [\sigma^{\varepsilon}(s, x_s^{\varepsilon}(\theta)) - \sigma^0(s, x_s^0(\theta))]dw(s) + \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} \int_U [\lambda^{\varepsilon}(s, x_s^{\varepsilon}(\theta)) - \lambda^0(s, x_s^0(\theta))]\widetilde{\nu}(ds, du).$$

С использованием приведенных ниже обозначений можно также получить

$$x_t^{\varepsilon}(\theta) - x_t^0(\theta) = x^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta)) - x^0(\alpha_k(\theta)) + \int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_0(s)d\widetilde{s}, \qquad (18)$$

где

$$p_0 d\widetilde{s} \equiv \sum_{i=1}^{4} p_i(s)d\widetilde{s},$$

$$p_1(s)d\widetilde{s} \equiv [m^0(s, x_{\alpha_{k(\theta)}}^0(\theta)) - m^0(s, x_s^0(\theta))]ds + [\sigma^0(s, x_{\alpha_{k(\theta)}}^0(\theta)) - \sigma^0(s, x_s^0(\theta))]dw(s) +$$

$$+ \int_U [\lambda^0(s, x_{\alpha_{k(\theta)}}^0(\theta), u) - \lambda^0(s, x_s^0(\theta), u)]\widetilde{\nu}(ds, du);$$

$$p_2(s)d\widetilde{s} \equiv [m^0(s, x_{\alpha_{k(\theta)}}^{\varepsilon}(\theta)) - m^0(s, x_s^0(\theta))]ds + [\sigma^0(s, x_{\alpha_{k(\theta)}}^{\varepsilon}(\theta)) - \sigma^0(s, x_s^0(\theta))]dw(s) +$$

$$+ \int_U [\lambda^0(s, x_{\alpha_{k(\theta)}}^{\varepsilon}(\theta), u) - \lambda^0(s, x_s^0(\theta), u)]\widetilde{\nu}(ds, du);$$

$$p_3(s)d\widetilde{s} \equiv [m^{\varepsilon}(s, x_{\alpha_{k(\theta)}}^{\varepsilon}(\theta)) - m^0(s, x_s^{\varepsilon}(\theta))]ds + [\sigma^{\varepsilon}(s, x_{\alpha_{k(\theta)}}^{\varepsilon}(\theta)) - \sigma^0(s, x_s^{\varepsilon}(\theta))]dw(s) +$$

$$+ \int_U [\lambda^{\varepsilon}(s, x_{\alpha_{k(\theta)}}^{\varepsilon}(\theta), u) - \lambda^0(s, x_s^{\varepsilon}(\theta), u)]\widetilde{\nu}(ds, du);$$

$$p_4(s)d\widetilde{s} \equiv [m^{\varepsilon}(s, x_{\alpha_{k(\theta)}}^{\varepsilon}(\theta)) - m^{\varepsilon}(s, x_s^{\varepsilon}(\theta))]ds + [\sigma^{\varepsilon}(s, x_{\alpha_{k(\theta)}}^{\varepsilon}(\theta)) - \sigma^{\varepsilon}(s, x_s^{\varepsilon}(\theta))]dw(s) +$$

$$+ \int_U [\lambda^{\varepsilon}(s, x_{\alpha_{k(\theta)}}^{\varepsilon}(\theta), u) - \lambda^{\varepsilon}(s, x_s^{\varepsilon}(\theta), u)]\widetilde{\nu}(ds, du).$$

Далее возведем в квадрат обе части модулей уравнения (18) и затем применим операцию $\mathbb{E}\{\cdot\}$, с учетом свойства равенства нулю математических ожиданий интеграла Ито и интеграла по пуассоновской мере получим

$$\mathbb{E}\{|x_t^{\varepsilon}(\theta)-x_t^0(\theta)|^2\}\le \mathbb{E}\{|x^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-x^0(\alpha_k(\theta))|^2\}+$$

$$+2\mathbb{E}\left\{|x^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-x^0(\alpha_k(\theta))|\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_0(s)d\tilde{s}\right|\right\}+\mathbb{E}\left\{\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_0(s)d\tilde{s}\right|^2\right\}. \qquad (19)$$

Первое слагаемое в правой части (19) оценивается следующим образом:

$$\|\varphi\|\equiv \sup_{-\tau\le\theta\le 0}\mathbb{E}\{|\varphi(\theta)|^2\}^{1/2},$$

$$\mathbb{E}\{|x^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-x^0(\alpha_k(\theta))|^2\}=\|x^{\varepsilon}_{\alpha_k(\theta)}(\theta)-x^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta)\|^2. \qquad (20)$$

Используя условия теоремы 2, результаты лемм 1 и 2, неравенство Коши-Буняковского, оцениваем второе слагаемое в правой части неравенства (19):

$$\mathbb{E}\left\{|x^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-x^0(\alpha_k(\theta))|\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}[m^0(s,x^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta))-m^0(s,x^0_s(\theta))]ds\right|\right\}\le$$

$$\le\left[\mathbb{E}\left\{|x^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-x^0(\alpha_k(\theta))|^2\,\Delta\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}\int_{-\tau}^{0}\{|x^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta)-x^0_s(\theta)|^2\,d\mu_r(\theta)ds\}\right\}\right]\le$$

$$\le C\Delta^{3/2}||x^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-x^0(\alpha_k(\theta))||^2; \qquad (21)$$

$$\mathbb{E}\left\{|x^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-x^0(\alpha_k(\theta))|\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}[m^0(s,x^{\varepsilon}_{\alpha_k(\theta)}(\theta))-m^0(s,x^0_s(\theta))]ds\right|\right\}\le$$

$$\le C\Delta||x^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-x^0(\alpha_k(\theta))||^2; \qquad (22)$$

$$\mathbb{E}\left\{|x^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-x^0(\alpha_k(\theta))|\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}[m^0(s,x^{\varepsilon}_{\alpha_k(\theta)}(\theta))-m^0(s,x^{\varepsilon}_s(\theta))]ds\right|\right\}\le$$

$$\le\left\{||x^{\varepsilon}_{\alpha_k(\theta)}(\theta)-x^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta)||^2\,\psi^2(\varepsilon)\cdot C\int_{-\tau}^{0}\mathbb{E}\{(1+|x^{\varepsilon}_{\alpha_k(\theta)}(\theta)|)^2\,d\mu_r(\theta)\}^{1/2}\right\}\le$$

$$\le C\psi(\varepsilon)||x^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-x^0(\alpha_k(\theta))||; \qquad (23)$$

$$\mathbb{E}\left\{|x^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-x^0(\alpha_k(\theta))|\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}[m^{\varepsilon}(s,x^{\varepsilon}_s(\theta))-m^{\varepsilon}(s,x_{\alpha_k(\theta)}(\theta))]ds\right|\right\}\le$$

$$\le C\Delta^{3/2}\|x^{\varepsilon}_{\alpha_k(\theta)}(\alpha_k(\theta))-x^0_{\alpha_k(\theta)}(\alpha_k(\theta))\|^2\,. \qquad (24)$$

Учитывая свойства математического ожидания от интегралов Ито и по пуассоновской мере, а также математических ожиданий квадратов этих интегралов [4, 25], оценим третье слагаемое в правой части неравенства (19):

$$\mathbb{E}\left\{\left|\int\limits_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_0(s)d\widetilde{s}\right|^2\right\} \le 4\left[\mathbb{E}\left\{\left|\int\limits_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_1(s)d\widetilde{s}\right|^2\right\} + \mathbb{E}\left\{\left|\int\limits_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_2(s)d\widetilde{s}\right|^2\right\} + \right.$$

$$\left. + \mathbb{E}\left\{\left|\int\limits_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_3(s)d\widetilde{s}\right|^2\right\} + \mathbb{E}\left\{\left|\int\limits_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_4(s)d\widetilde{s}\right|^2\right\}\right]. \qquad (25)$$

Здесь для каждого из четырех слагаемых существуют следующие оценки:

$$\mathbb{E}\left\{\left|\int\limits_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_1(s)d\widetilde{s}\right|^2\right\} \le 2(1+\Delta) \int\limits_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} \int\limits_{-\tau}^{0} \mathbb{E}\{|x^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta) - x^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta)|^2\} d\mu_r(\theta) ds \le$$

$$\le C(1+\Delta) \int\limits_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} \| x^\varepsilon(\alpha_k(\theta)) - x^0(\alpha_k(\theta)) \|^2 \le C\Delta^2(1+\Delta); \qquad (26)$$

$$\mathbb{E}\left\{\left|\int\limits_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_2(s)d\widetilde{s}\right|^2\right\} \le 2(K+1+\Delta) \int\limits_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} \int\limits_{-\tau}^{0} \mathbb{E}\{|x^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta) - x^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta)|^2\} d\mu_r(\theta) ds \le$$

$$\le C(K+1+\Delta) \| x^\varepsilon(\alpha_k(\theta)) - x^0(\alpha_k(\theta)) \|^2; \qquad (27)$$

$$\mathbb{E}\left\{\left|\int\limits_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_3(s)d\widetilde{s}\right|^2\right\} \le 2\mathbb{E}\left\{\psi(\varepsilon) \int\limits_{-\tau}^{0} (1+|x^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta)|) d\mu_r(\theta)\right\} +$$

$$+ 2\mathbb{E}\left\{\psi(\varepsilon) \int\limits_{-\tau}^{0} (1+|x^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta)|) d\mu_r\right\} \le$$

$$\le \psi(\varepsilon)[K+1+C\psi(\varepsilon)] \int\limits_{-\tau}^{0} (1+|x^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta)|^2) d\mu_r(\theta) \le C_1\psi(\varepsilon) + C_2\psi^2(\varepsilon), \qquad (28)$$

где $C_i \equiv C_i(C, K)$, $i = \overline{1,2}$;

$$\mathbb{E}\left\{\left|\int\limits_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} p_4(s)d\widetilde{s}\right|^2\right\} \le 2(K+1+\Delta) \int\limits_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta} || x^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta) - x^\varepsilon_s(\theta) ||^2 ds \le C\Delta^2(K+1+\Delta). \qquad (29)$$

Отметим, что в неравенствах (26)–(29) $\Delta > 0$ достаточно мало. Тогда неравенство (19) с учетом полученных оценок (20)–(28) примет вид

$$\mathbb{E}\{|x^\varepsilon_t(\theta) - x^0_t(\theta)|^2\} \le (K+1+C\Delta) || x^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta) - x^\varepsilon_s(\theta) ||^2 + C_3[\Delta^{3/2} + \psi(\varepsilon)],$$

где $C_3 \equiv C_3(K, C)$.

Если перейти к точной верхней грани по θ слева и справа, то получим для $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, следующую оценку:

$$\| x^\varepsilon_t(\theta) - x^0_t(\theta) \|^2 \le (K+1+C\Delta) \| x^\varepsilon_{\alpha^*_k(\theta)}(\theta) - x^0_{\alpha^*_k(\theta)}(\theta) \|^2 + C_3(\Delta^{3/2} + \psi(\varepsilon)). \qquad (30)$$

Далее неравенство (30) рассматривается как рекуррентное соотношение для $i=\overline{0, N}$, и тогда для $\forall t \in [0, T]$ имеет место оценка

$$\| x_t^\varepsilon(\theta) - x_t^0(\theta) \|^2 \le (K+1+C\Delta)^{N+1} \| x_0^\varepsilon(\theta) - x_0^0(\theta) \|^2 + C[\Delta^{3/2} + \psi(\varepsilon)] \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{N} (K+1+C\Delta)^i \le K_1[\Delta^{3/2} + \psi(\varepsilon)] \sum_{i=0}^{N} \exp\{c\Delta i\} \le K_1 \sqrt{\Delta} \cdot \Delta \cdot N \exp\{CT\} +$$

$$+ K_1 N \exp\{CT\} \le K_1 \sqrt{\Delta} T \cdot L \exp\{LCT\} + \psi(\varepsilon) K_1 N \exp\{CT\}, \qquad (31)$$

где L — постоянная из теоремы 1.

Далее разбиение отрезка $[0, T]$ на элементарные отрезки $[t_i, t_{i+1}]$ выберем ввиду малости разбиения Δ таким, чтобы

$$KLT\sqrt{\Delta} \exp\{CLT\} \le \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (32)$$

а $\varepsilon > 0$ можно выбрать ввиду малости $\psi(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ таким, чтобы

$$\psi(\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{2N \exp\{CT\}}. \qquad (33)$$

Тогда окончательно неравенство (31) с учетом оценок (32), (33) примет вид

$$\| x_t^\varepsilon(\theta) - x_t^0(\theta) \|^2 \le \varepsilon,$$

что и доказывает теорему 2. ■

4. О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ СДФУПВ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Теорема 3. Пусть выполнены условия леммы 1, условие 1 интегрального неравенства Липщица (см. разд. 1), а также следующие условия относительно случайных процессов:

6) $[\mathbb{E}\{| w(t, \varepsilon) - w(t, 0)|^4\}]^{1/2} \equiv \chi_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;

7) $\left[\mathbb{E}\left\{\int_U \left|\widetilde{\nu}(t, du, \varepsilon) - \widetilde{\nu}(t, du, 0)\right|^4\right\}\right]^{1/2} \equiv \chi_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Тогда случайный процесс $y^\varepsilon(t)$ (аппроксимация СДФУПВ (1), (2)) для $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, вида

$$y^\varepsilon(t) = y^\varepsilon(t_k) + m^0(t, y_{t_k}^\varepsilon(\theta))(t - t_k) + \sigma^0(t, y_{t_k}^\varepsilon(\theta))[w(t, \varepsilon) - w(t_k, \varepsilon)] +$$

$$+ \int_U \lambda^0(t, y_{t_k}^\varepsilon(\theta), u)[\widetilde{\nu}(t, du, \varepsilon) - \widetilde{\nu}(t_k, u, \varepsilon)] \qquad (34)$$

непрерывен в среднем по $\varepsilon > 0$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \| y_t^\varepsilon(\theta) - y_t^0(\theta) \| = 0$ равномерно по разбиению γ отрезка $[0, T]$ (γ: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$).

Доказательство. Рассмотрим очевидное равенство для отрезков $y_t^\varepsilon(\theta) \equiv \{y^\varepsilon(t+\theta), -\tau \le \theta \le 0\}$ аппроксимации (34):

$$y_t^\varepsilon(\theta) - y_t^0(\theta) = y^\varepsilon(\alpha_k(\theta)) - y^0(\alpha_k(\theta)) +$$

$$+ [m^0(t+\theta, y_{\alpha_k(\theta)}^\varepsilon(\theta)) - m^0(t+\theta, y_{\alpha_k(\theta)}^0(\theta))](t+\theta-\alpha_k(\theta)) +$$

$$+ \sigma^0(t+\theta, y_{\alpha_k(\theta)}^\varepsilon(\theta))[w(t+\theta, \varepsilon) - w(\alpha_k(\theta), \varepsilon)] -$$

$$-\sigma^0(t+\theta, y^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta))[w(t+\theta,\varepsilon)-w(\alpha_k(\theta),\varepsilon)]+$$

$$+\int_U \lambda^0(t+\theta, y^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta),u)[\widetilde{\nu}(t+\theta,du,\varepsilon)-\widetilde{\nu}(\alpha_k(\theta),du,\varepsilon)]-$$

$$-\int_U \lambda^0(t+\theta, y^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta),u)[\widetilde{\nu}(t+\theta,du,\varepsilon)-\widetilde{\nu}(\alpha_k(\theta),du,0)]=y^\varepsilon(\alpha_k(\theta))-y^0(\alpha_k(\theta))+$$

$$+[m^0(t+\theta, y^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta))-m^0(t+\theta, y^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta))](t+\theta-\alpha_k(\theta))+\sigma^0(t+\theta, y^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta))\times$$

$$\times[w(t+\theta,\varepsilon)-w(t+\theta,0)]-\sigma^0(t+\theta, y^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta))[w(\alpha_k(\theta),\varepsilon)-w(\alpha_k(\theta),\varepsilon)]-$$

$$-[\sigma^0(t+\theta, y^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta))-\sigma^0(t+\theta, y^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta))][w(t+\theta,\varepsilon)-w(\alpha_k(\theta),0)]+$$

$$+\int_U \lambda^0(t+\theta, y^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta),u)[\widetilde{\nu}(t+\theta,du,\varepsilon)-\widetilde{\nu}(\alpha_k(\theta),du,\varepsilon)]-$$

$$-\int_U \lambda^0(t+\theta, y^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta),u)[\widetilde{\nu}(t+\theta,du,\varepsilon)-\widetilde{\nu}(\alpha_k(\theta),du,0)]- \qquad (35)$$

$$-[\int_U [\lambda^0(t+\theta, y^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta),u)-\lambda^0(t+\theta, y^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta),u)][\widetilde{\nu}(t+\theta,du,\varepsilon)-\widetilde{\nu}(\alpha_k(\theta),du,0)]].$$

Возведем обе части полученного интегрального уравнения (35) в квадрат и, применив операцию математического ожидания, получим для $\forall t\in[t_k, t_{k+1}]$, $k=0, 1, \ldots, N-1$, неравенство

$$\mathbb{E}\{|y^\varepsilon_t(\theta)-y^0_t(\theta)|^2\}\le\mathbb{E}\{|y^\varepsilon(\alpha_k(\theta))-y^0(\alpha_k(\theta))|^2\}+$$

$$2\mathbb{E}\{|y^\varepsilon(\alpha_k(\theta))-y^0(\alpha_k(\theta))|\}\times\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}p_0(s)d\widetilde{s}\right|+\mathbb{E}\left\{\left|\int_{\alpha_k(\theta)}^{t+\theta}p_0(s)d\widetilde{s}\right|^2\right\}. \qquad (36)$$

Пусть

$$p_1(t)\equiv[m^0(t+\theta, y^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta))-m^0(t+\theta, y^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta))](t+\theta-\alpha_k(\theta)); \qquad (37)$$

$$p_2(t)\equiv\sigma^0(t+\theta, y^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta))[w(t+\theta,\varepsilon)-w(t+\theta,0)]+\int_U \lambda^0(t+\theta, y^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta),u)\times$$

$$\times[\widetilde{\nu}(t+\theta,du,\varepsilon)-\widetilde{\nu}(t+\theta,du,0)]; \qquad (38)$$

$$p_3(t)\equiv\sigma^0(t+\theta, y^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta))[w(\alpha_k(\theta),\varepsilon)-w(\alpha_k(\theta),0)]+\int_U \lambda^0(t+\theta, y^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta),u)\times$$

$$\times[\widetilde{\nu}(\alpha_k(\theta),du,\varepsilon)-\widetilde{\nu}(\alpha_k(\theta),du,0)]; \qquad (39)$$

$$p_4(t)\equiv[\sigma^0(t+\theta, y^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta))-\sigma^0(t+\theta, y^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta))][w(t+\theta,\varepsilon)-w(\alpha_k(\theta),0)]+ \qquad (40)$$

$$+\int_U [\lambda^0(t+\theta, y^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta),u)-\lambda^0(t+\theta, y^\varepsilon_{\alpha_k(\theta)}(\theta),u)][\widetilde{\nu}(t+\theta,du,\varepsilon)-\widetilde{\nu}(\alpha_k(\theta),du,0)].$$

Проведем оценки для математических ожиданий правой части неравенства (36) с учетом представления $p_i(t), i=\overline{1,4}$, равенствами (37)–(40), как это сделано при доказательстве теоремы 2:

$$\mathbb{E}\{|y^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-y^0(\alpha_k(\theta))|^2\}\le\|y^{\varepsilon}_{\alpha_k(\theta)}(\theta)-y^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta)\|^2\ ;$$

$$\mathbb{E}\{|y^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-y^0(\alpha_k(\theta))||p_1(t)|\}\le C\Delta\|y^{\varepsilon}_{\alpha_k(\theta)}(\theta)-y^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta)\|^2\ ;$$

$$\mathbb{E}\{|y^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-y^0(\alpha_k(\theta))||p_2(t)|\}=0;\quad \mathbb{E}\{|y^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-y^0(\alpha_k(\theta))||p_3(t)|\}=0\,.$$

Аналогично предыдущему равенству получим

$$\mathbb{E}\{|y^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-y^0(\alpha_k(\theta))||p_4(t)|\}=0.$$

Далее проведем оценки для третьего слагаемого неравенства (36) с учетом представлений $p_i(t), i=\overline{1,4}$, равенствами (37)–(40), а именно:

$$\mathbb{E}\{|p_1(t)|^2\}\le C\Delta^2\|y^{\varepsilon}_{\alpha_k(\theta)}(\theta)-y^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta)\|^2\ ;$$

$$\mathbb{E}\{|p_2(t)|^2\}\le C[1+C\|y^{\varepsilon}_{\alpha_k(\theta)}(\theta)\|^4]^{1/2}\times$$

$$\times\left[[\mathbb{E}\{|w(t+\theta,\varepsilon)-w(t+\theta,0)|^4\}]^{1/2}+\left[\mathbb{E}\left\{\int_U|\widetilde{\nu}(t+\theta,du,\varepsilon)-\widetilde{\nu}(t+\theta,du,0)|^4\right\}\right]^{1/2}\right];$$

$$\mathbb{E}\{|p_3(t)^2|\}\le C[1+C\|y^{\varepsilon}_{\alpha_k(\theta)}(\theta)\|^4]^{1/2}\times\left[\left[\mathbb{E}\left\{|w(\alpha_k(\theta),\varepsilon)-w(\alpha_k(\theta),0)|^4\right\}\right]^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\left[\mathbb{E}\left\{\int_U|\widetilde{\nu}(\alpha_k(\theta),du,\varepsilon)-\widetilde{\nu}(\alpha_k(\theta),du,0)|^4\right\}\right]^{1/2}\right];$$

$$\mathbb{E}\{|p_4(t)|^2\}\le C\Delta\|y^{\varepsilon}_{\alpha_k(\theta)}(\theta)-y^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta)\|^2\ .$$

Пусть разбиение γ такое, что $\Delta\ll 1$. Легко видеть в силу леммы 1, что четвертый момент решения также ограничен по норме на $[0,T]$. Тогда будем иметь оценку

$$\mathbb{E}\{|y^{\varepsilon}_t(\theta)-y^0_t(\theta)|^2\}\le(1+C\Delta)\|y^{\varepsilon}(\alpha_k(\theta))-y^0(\alpha_k(\theta))\|^2+$$
$$+C[\mathbb{E}\{|w(\alpha_k(\theta),\varepsilon)-w(\alpha_k(\theta),0)|\}]^{1/2}+$$
$$+C\left[\mathbb{E}\left\{\left|\int_U(\widetilde{\nu}(\alpha_k(\theta),du,\varepsilon)-\widetilde{\nu}(\alpha_k(\theta),du,0))\right|^4\right\}\right]^{1/2}+$$
$$+C[\mathbb{E}\{|w(t+\theta,\varepsilon)-w(t+\theta,0)|^4\}]^{1/2}+$$
$$+C\left[\mathbb{E}\left\{\left|\int_U(\widetilde{\nu}(t+\theta,du,\varepsilon)-\widetilde{\nu}(t+\theta,du,0))\right|^4\right\}\right]^{1/2}.$$

Перейдем слева и справа к точной верхней грани по $\theta\in[-\tau,0]$ и, используя свойства 6, 7 теоремы 3 для случайных процессов $w(t,\omega)$ и $\widetilde{\nu}(t,u,\varepsilon)$, получаем

$$\|y^{\varepsilon}_t(\theta)-y^0_t(\theta)\|^2\le(1+C\Delta)\|y^{\varepsilon}_{\alpha_k(\theta)}(\theta)-y^0_{\alpha_k(\theta)}(\theta)\|^2+C\chi_1(\varepsilon)+K\chi_2(\varepsilon).\quad(41)$$

Из неравенства (41) для $\forall t \in [0, T]$ следует оценка

$$\| y_t^{\varepsilon}(\theta) - y_t^0(\theta) \|^2 \leq K_1 N [\chi_1(\varepsilon) + K\chi_2(\varepsilon)] e^{CT}, \quad \text{где } K_1 \equiv K_1(C, L). \quad (42)$$

Поскольку в неравенстве (42) N — конечное число отрезков разбиения $[0, T]$, то из неравенства вытекает утверждение теоремы 3.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теорем 1 и 3.

Тогда сильное решение СДФУПВ

$$dx^{\varepsilon}(t) = m^0(t, x_t^{\varepsilon}(\theta)) dw(t, \varepsilon) + \int_U \lambda^0(t, x_t^{\varepsilon}(\theta)) dw(t, \varepsilon)$$

для $\forall t \in [0, T], T > 0$, удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| x_t^{\varepsilon}(\theta) - x_t^0(\theta) \|^2 = 0. \quad (43)$$

Доказательство. Согласно определению (8) нормы $\|\cdot\|$ легко записать неравенство

$$\| x_t^{\varepsilon}(\theta) - x_t^0(\theta) \|^2 = \| x_t^{\varepsilon}(\theta) - y_t^{\varepsilon}(\theta) + y_t^{\varepsilon}(\theta) - y_t^0(\theta) + y_t^0(\theta) - x_t^0(\theta) \|^2 \leq$$

$$\leq 3 \| x_t^{\varepsilon}(\theta) - y_t^{\varepsilon}(\theta) \|^2 + 3 \| y_t^{\varepsilon}(\theta) - y_t^0(\theta) \|^2 + 3 \| y_t^0(\theta) - x_t^0(\theta) \|^2 .$$

Выбрав достаточно малое разбиение для $\Delta > 0$, а затем достаточно малое $\varepsilon > 0$ согласно теоремам 1 и 3, получим для наперед заданного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ оценку $\| x_t^{\varepsilon}(\theta) - x_t^0(\theta) \|^2 < \varepsilon$. Отсюда следует утверждение (43) теоремы 4. ■

Теорема 5. Пусть выполняются условия 1–4 и условие леммы 1.

Тогда случайный процесс, как сильное решение СДФУПВ

$$dx^{\varepsilon}(t) = m^{\varepsilon}(t, x_t^{\varepsilon}(\theta)) dt + \sigma^{\varepsilon}(t, x_t^{\varepsilon}(\theta)) dw(t, \varepsilon) + \int_U \lambda^{\varepsilon}(t, x_t^{\varepsilon}(\theta), u) \tilde{\nu}(t, du, \varepsilon)$$

непрерывен в среднем по $\varepsilon > 0$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \| x_t^{\varepsilon}(\theta) - x_t^0(\theta) \|^2 = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье рассмотрены стохастические дифференциальные уравнения с разрывными траекториями в пространстве Скорохода. Для этих случайных процессов обоснован метод малого параметра и сформулированы условия сходимости случайных процессов, зависящих от параметра, к некоторому усредненному процессу. Эта методика реализована в теоремах 1–4. Теорема 4 позволяет исследовать решения при малых ε по усредненному решению. В последующих работах по данной тематике планируется уточнить скорость сходимости аппроксимационных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 543 с.
2. Биллинсли П. Сходимость вероятностных мер. — М. : Наука, 1977. — 352 с.
3. Гихман И.И. Дифференциальные уравнения со случайными функциями / Зимняя школа по теореме вероятностей и математической статистике (Ужгород). — Киев: Из-во АН УССР, 1964. — 168 с.
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 612 с.
5. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматизд, 1969. — 659 с.

6. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. — М.: Наука, 1992. — Т. 1. — 544 с.
7. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. — М.: Наука, 1994. — Т. 2. — 486 с.
8. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. — Екатеринбург: Урал. Госакадемия путей сообщения, 1999. — 228 с.
9. Колмановский В.Б., Носов В.Б. Устойчивость и периодические решения регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1971. — 448 с.
10. Кореневский Д.Т. Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений (алгебраические критерии) . — К.: Наук. думка, 1992. — 146 с.
11. Митропольский Ю.Д. Метод усреднения в нелинейной механике. — К.: Наук. думка, 1971. — 359 с.
12. Кушнер Г.Д. Стохастическая устойчивость и управление. — М.: Мир, 1969. — 290 с.
13. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. — М.: Наука, 1969. — 357 с.
14. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1987. — 328 с.
15. Стратонович Р.А. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1981. — 423 с.
16. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. — М. : Наука, 1981. — 423 с.
17. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
18. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциальных функциональных систем. — К.: Изд-во ИНТИ, 1997. — 236 с.
19. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциальных-функциональных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 429 с.
20. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональное уравнения. — Рига: Ориентир, 1992. — 314 с.
21. Антонюк С.В., Ясинский В.К. Устойчивость решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений с пуассоновскими переключениями со всей предысторией // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 1 — С. 123–134.
22. Юрченко І.В. Ясинський В.К. Стійкість та оптимальне керування в лінійних стохастичних динамічних системах. — Чернівці: Золоті литаври, 2009. — 237 с.
23. Юрченко І.В., Ясинський В.К., Ясинська Л.І. Методи стохастичного моделювання систем. — Чернівці: Прут, 2003. — 416 с.
24. Ясинський В.К. Ясинський Є.В. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. — К.: Теория вероятности и мат. статистика, 2005. — 580 с.
25. Jacod J., Shiryaev A.N. Limit theorems for stochastic processes. — Berlin; Heidelberg: Springer–Verlag, 1987. — 600 p.
26. Jakubovski A.A. The a.s. Skorohod topology on the Skorohod space // Theory Probal. Appl. — 1997. — **42.** — P. 209–216.
27. Koroliuk V.S., Liminios N. Stochastic system in merging phase space. — London; Hong Kong: World Scientific, 2005. — 331 p.

Поступила 16.06.2010