СИСТЕМНЫЙ
АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, О.А. ЕМЕЦ, О.А. ЧЕРНЕНКО

УДК 519.85

РЕШЕНИЕ УСЛОВНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ РАЗМЕЩЕНИЙ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Ключевые слова: *метод ветвей и границ, оптимизация, дробно-линейная функция цели, размещение.*

Исследованию задач комбинаторной оптимизации и методов их решения посвящено много работ (например, [1–15]), поскольку большинство практических задач описываются с помощью комбинаторных оптимизационных моделей. Актуальными остаются разработка методов и алгоритмов решения задач на отдельных комбинаторных множествах, в частности, на множестве размещений, и проблема поиска более эффективных алгоритмов.

В работах [2, 3, 5, 6–8, 10–15] описаны методы и алгоритмы решения линейных условных задач на перестановках, полиперестановках, размещениях и полиразмещениях. Разработаны методы решения дробно-линейных условных задач на множествах перестановок [4, 15] и размещений [7].

Предложенный в [9] метод решения условных задач с дробно-линейной целевой функцией на размещениях основан на разбиении пространства на классы эквивалентности и последующем направленном просмотре этих классов. Это один из немногих точных методов для данного класса задач, который учитывает свойства множества размещений. Применение идей методов дискретной оптимизации [16–18] к задачам на комбинаторных множествах целесообразно вследствие определенной схожести отдельных свойств допустимых множеств дискретной и комбинаторной оптимизаций. Поэтому, учитывая специфику комбинаторных ограничений, применим некоторые методы решения дискретных задач для задачи комбинаторной оптимизации.

Цель данной статьи — распространить метод ветвей и границ для решения задач оптимизации на размещениях с дробно-линейной целевой функцией и дополнительными линейными ограничениями, а также обосновать алгоритм этого метода.

Изложим полученные результаты. Множество k первых натуральных чисел обозначим J_k, т.е. $J_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, а $J_k^0 = J_k \cup \{0\}$. Пусть дано мультимножество $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_\eta\}$ с основой $S(G) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, где $e_i \in R^1$ $\forall i \in J_n$, и кратностями элементов $k_G(e_i) = \eta_i$, $i \in J_n$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} \eta_i = \eta$ [2].

Выберем произвольное $k \in J_\eta$. Множество всех упорядоченных k-выборок из мультимножества G вида $(g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k})$, где $g_{i_j} \in G$, $i_j \neq i_t$ $\forall i_j, i_t \in J_\eta$ $\forall j$, $t \in J_k$, образует общее множество размещений $E_{\eta n}^k(G)$. Пусть элементы мультимножества G упорядочены по неубыванию, а элементы $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ его основы — по возрастанию.

Выпуклой оболочкой множества $E_{\eta n}^k(G)$ является общий многогранник размещений $\Pi_{\eta n}^k(G)$, который описан в [2] системой неравенств

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \le \sum_{i \in \omega} x_i \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1} \quad \forall \omega \subset J_k, \tag{1}$$

где $g_j \in G$, $|\omega|$ — количество элементов во множестве ω.

Пусть k, n, η, m, p — натуральные константы, c_j, $d_j \in R$ $\forall j \in J_m^0$, a_{ij}, $b_i \in R$ $\forall j \in J_m$, $\forall i \in J_p$, а также $t = (t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_m) \in R^m$, где $x_j = t_j$ $\forall j \in J_k$, т.е. переменные $t_{k+1}, \dots, t_m$ являются непрерывными, а $x_1, \dots, x_k$ — комбинаторными.

Рассмотрим задачу следующего вида: найти упорядоченную пару $\langle f(t^*), t^* \rangle$ такую, что

$$f(t^*) = \max_{t \in R^m} f(t) = \max_{t \in R^m} \frac{\sum_{j=1}^{m} c_j t_j + c_0}{\sum_{j=1}^{m} d_j t_j + d_0}, \quad t^* = \arg\max_{t \in R^m} f(t), \tag{2}$$

при комбинаторном условии

$$x = (x_1, \dots, x_k) \in E_{\eta n}^k(G) \subset R^m, \quad k \le m, \tag{3}$$

и дополнительных линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} t_j \le b_i, \quad I \in J_p. \tag{4}$$

Задачу (2)–(4) решим путем перехода к релаксированной задаче: условие (3) ослабим, заменив его (1). Применяя к задаче (1), (2), (4) отображение ψ, которое представим соотношениями

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} d_j t_j + d_0}, \quad z_j = t_j y_0 \quad \forall j \in J_m, \quad t \in R^m, \tag{5}$$

где знаменатель больше нуля, перейдем к задаче с линейной функцией цели и дополнительными линейными ограничениями

$$F(z^*) = \max_{z \in R^{m+1}} F(z) = \max_{z \in R^{m+1}} \sum_{j=1}^{m} (c_j z_j + c_0 y_0), \quad z^* = \arg\max_{z \in R^{m+1}} F(z), \tag{6}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} z_j - b_i y_0 \le 0, \quad i \in J_p, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j y_0 \le \sum_{i \in \omega} y_i \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1} y_0 \quad \forall \omega \subset J_k, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{m} d_j z_j + d_0 y_0 = 1, \quad y_0 > 0, \quad z_j \ge 0 \quad \forall j \in J_m, \tag{9}$$

где $z = (y_0, z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_m) \in R^{m+1}$, $y_j = z_j$ $\forall j \in J_k$.

Комбинаторное условие (3) после применения отображения (5) запишется в виде

$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_k) \in E \subset R^{m+1}. \tag{10}$$

Множество, заданное системой (8), обозначим $Q_{\eta n}^k(G)$. Задачи (1), (2), (4) и (6)–(9) эквивалентны, т.е. если $z^* = (y_0, z_1, \ldots, z_m)$, где $y_j = z_j \ \ \forall j \in J_k$, — оптимальное решение задачи (6)–(9), то $t^* = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$, где $t_j = z_j (y_0)^{-1}$, $t_j = x_j$ $\forall j \in J_k$, — оптимальное решение (1), (2), (4). Аналогичное утверждение имеет место и для задач (2)–(4) и (6), (7), (9), (10).

Среди комбинаторных методов важное значение как в практическом, так и теоретическом плане имеет метод ветвей и границ. В настоящее время существует много общих схем методов ветвей и границ, которые отличаются главным образом способами ветвления, отсечения и оценивания. Именно эти характеристики определяют эффективность метода при решении конкретной задачи.

Далее приведен алгоритм метода ветвей и границ для решения задачи (2)–(4), основанный на идеях Лэнд и Дойг [18]. Обозначим κ номер итерации (один полный цикл алгоритма).

Шаг 1. Перейти к релаксированной задаче: условие (3) ослабляется и заменяется на (1). Применить преобразование (5) к задаче (1), (2), (4).

Шаг 2. Решить линейную задачу (6)–(9).

Шаг 3. Если (6)–(9) не имеет решения, то не имеет решения (2)–(4), иначе пусть $\bar{t} = \bar{z}(y_0)^{-1}$ — экстремаль задачи (1), (2), (4).

Шаг 4. Если $\bar{x} \in E_{\eta n}^k(G)$, где $\bar{x}_j = \bar{t}_j \ \ \forall j \in J_k$, то $\left\langle F(x^*), x^* \right\rangle$ — решение задачи (2)–(4), иначе перейти к шагу 5.

Шаг 5. Определить индекс ρ компонента t_ρ точки $\bar{t}$ такого, что $t_\rho \notin G$, или $k_{\bar{t}}(t_\rho) > k_G(t_\rho)$.

Шаг 6. Записать два ограничения, которые в области (3), (4) отсекают $\bar{t}$:

$$t_\rho \le e_i^1, \tag{11}$$

$$t_\rho \ge e_i^2, \tag{12}$$

где

$$e_i^1 = \max\,\{e_i \,|\, e_i \in S(G),\, e_i < t_\rho,\, (t_1, t_2, \ldots, t_{\rho-1}, e_i) \in E_{\eta n}^\rho(G)\},$$

$$e_i^2 = \min\,\{e_i \,|\, e_i \in S(G),\, e_i > t_\rho,\, (t_1, t_2, \ldots, t_{\rho-1}, e_i) \in E_{\eta n}^\rho(G)\} \ .$$

Шаг 7. Применить к (11), (12) преобразование (5):

$$z_\rho \le e_i^1 y_0, \tag{13}$$

$$z_\rho \ge e_i^2 y_0. \tag{14}$$

Шаг 8. Присоединить к решенной на предыдущей итерации задаче вида (6)–(9) ограничение (13) и решить задачу (6)–(9), (13). Если она не имеет решения, то перейти к шагу 9, иначе ее решением будет $\langle F(\bar{z}_1), \bar{z}_1 \rangle$.

Шаг 9. Присоединить к решенной на предыдущей итерации задаче вида (6)–(9) ограничение (14) и решить задачу (6)–(9), (14). Если она не имеет решения, то перейти к шагу 10, иначе ее решением будет $\langle F(\bar{z}_2), \bar{z}_2 \rangle$.

Шаг 10. Если ни одна из задач вида (6)–(9), (13) и (6)–(9), (14) не имеет решения, то задача (2)–(4) также не имеет решения в случае $\kappa = 1$. Для $\kappa > 1$ выбрать для дальнейшего ветвления другую область с точкой, найденной на шаге 12 $(\kappa - 1)$-й итерации, и перейти к шагу 4.

Шаг 11. Если одна из задач вида (6)–(9), (13) или (6)–(9), (14) не имеет решения, то перейти к шагу 4, считая $\bar{x} = \bar{z}_i (y_0)^{-1}$, где i — номер точки $\bar{z}_i$, которая предоставляет целевой функции значение, наибольшее в области D_i.

Шаг 12. Если обе задачи вида (6)–(9), (13) и (6)–(9), (14) имеют решения, то при $\kappa = 1$ для дальнейшего ветвления выбрать ту область, которая предоставляет целевой функции большее значение, и перейти к шагу 4, считая $\bar{x} = \bar{z}_i (y_0)^{-1}$, где i — номер точки $\bar{z}_i$, предоставляющей целевой функции большее из двух значений $F(\bar{z}_j)$, $j = 1, 2$. В случае, если значения целевых функций совпадают, перейти к шагу 4 и проанализировать решение каждой задачи. Для $\kappa \ge 1$ сравнить значения целевых функций для всех неветвленных областей и для дальнейшего ветвления выбрать ту область, которая предоставляет целевой функции большее значение, далее перейти к шагу 4.

Алгоритм основан на следующих предположениях. Обозначим D допустимую область исходной задачи, т.е. множество точек, удовлетворяющих условиям (2)–(4). Согласно методу ветвей и границ множество D разобьем на части, которые не имеют общих точек, т.е. $D = D_1 \cup D^* \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, где D_1 — множество допустимых решений задачи (2)–(4) при добавлении ограничения (11); D_2 — множество допустимых решений задачи (2)–(4) при добавлении ограничения (12). Очевидно, что множество допустимых решений D^*задачи (2)–(4) при добавлении ограничения $e_i^2 \le t_\rho \le e_i^1$ пустое для задачи (2)–(4), поэтому из дальнейшего ветвления его можно исключить.

Применив к системе неравенств, которые описывают множества D_1, D^*, D_2, преобразование (5), получим Q_1, Q^*, Q_2.

Утверждение 1. Ограничения (13), (14) не отсекают ни одной точки $z = (y_0, z_1, \ldots, z_m)$ такой, что $y \in E$, где $y_j = z_j \ \forall j \in J_k$.

Доказательство. Пусть существует $z^* \in Q^*$ такая, что z^* — решение задачи (6), (7), (9), (10). Применяя к z^* преобразование, обратное (5), получим точку t^*, $t^* = z^* (y_0)^{-1}$. Учитывая, что задачи (6), (7), (9), (10) и (2)–(4) эквивалентны, получаем t^* — решение задачи (2)–(4). Из результатов работы [7] следует, что отображение ψ задает взаимно однозначное соответствие между множеством точек D, которые удовлетворяют (2)–(4), и множеством точек Q, которые удовлетворяют (6), (7), (9), (10), а следовательно, $t^* \in D^*$. Однако по построению множество D^* пустое для задачи (2)–(4). Имеем противоречие. Таким образом, множество Q^* не содержит решений задачи (6), (7), (9), (10).

Утверждение доказано.

С учетом того, что задачи (1), (2), (4) и (6)–(9) эквивалентны, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Оценками допустимых областей D_i задач (2)–(4), (11) или (2)–(4), (12) являются значения целевых функций соответствующих задач (1), (2), (4), (11) или (1), (2), (4), (12).

Каждому из множеств областей D_i допустимых решений соответствующей задачи вида: найти (2) при ограничениях (1), (4) и при дополнительных ограничениях (11) или (12), приписывают оценку $\xi(D_i) = \max\limits_{x \in D_i} f(x)$. Если оптимальные решения полученных задач удовлетворяют комбинаторному условию (3), то решение с максимальной оценкой будет оптимальным для исходной задачи. Иначе продолжаем процесс ветвления, выбирая множество D_i с наибольшей оценкой. Для итераций $\kappa > 1$ в случае, если выбранная область D_i не содержит точек, которые являются размещениями, используем для дальнейшего ветвления вторую область, найденную на предыдущей итерации (шаг 10 приведенного выше алгоритма).

Разбивая в процессе решения множество D на подмножества D_i, $\bigcup\limits_{\forall i} D_i = D$, имеем, что оценка для любого из них не больше чем оценка для исходного множества D, т.е. для всех D_i имеет место неравенство $\xi(D_i) \le \xi(D)$.

Согласно правилам отсечения отсекаются только те области D_i, которые не содержат точек, удовлетворяющих условию (3) (шаг 6 алгоритма), и те, для которых $\xi(D_i) \le f(x_0)$, где $f(x_0)$ — допустимое решение исходной задачи.

Из изложенных способов ветвления, отсечения и оценивания следует справедливость следующего утверждения относительно предложенного алгоритма.

Утверждение 3. Алгоритм метода ветвей и границ, примененный к задаче (2)–(4), находит ее оптимальное решение.

Рассмотрим пример. Найти максимум функции $\dfrac{x_1 + x_2}{2x_1 + x_2} \to \max$ при комбинаторном условии принадлежности множеству k-размещений ($k = 2$) из элементов мультимножества $G : x = (x_1, x_2) \in E^2_{5,4}(G)$, где $G = \{1, 2, 2, 4, 5\}$, при дополнительных линейных ограничениях $x_1 + x_2 \ge 4$, $-2x_1 + 3x_2 \le 7$.

Решение.

Шаг 1. Заменив комбинаторное условие системой ограничений, описывающих многогранник размещений исходной задачи, получим задачу $\dfrac{x_1 + x_2}{2x_1 + x_2} \to \max$ при линейных ограничениях $x_1 + x_2 \ge 4$, $-2x_1 + 3x_2 \le 7$, $1 \le x_1 \le 5$, $1 \le x_2 \le 5$, $3 \le x_1 + x_2 \le 9$. Применив преобразование (5) к полученной задаче, имеем $y_1 + y_2 \to \max$ при ограничениях $-y_1 - y_2 - 4y_0 \le 0$, $-2y_1 + 3y_2 - 7y_0 \le 0$, $-y_1 - 5y_0 \le 0$, $-y_1 + y_0 \le 0$, $y_2 - 5y_0 \le 0$, $-y_2 + y_0 \le 0$, $-y_1 - y_2 + 3y_0 \le 0$, $y_1 + y_2 - 9y_0 \le 0$, $2y_1 + y_2 = 1$.

Шаги 2–3. Решив полученную задачу, имеем $\bar{y} = (1/5, 1/5, 3/5)$, откуда $\bar{x} = (1, 3)$.

Шаг 4. Учитывая, что $(1, 3) \notin E^2_{5,4}(G)$, переходим к шагу 5.

Шаг 5. Определим индекс $\rho = 2$, поскольку $3 \notin G$.

Шаг 6. Запишем два ограничения, которые отсекают $\bar{x}$: $x_2 \le 2$, $x_2 \ge 4$, учитывая, что

$$e_i^1 = \max\,\{e_i \mid e_i \in S(G),\, e_i < 3,\, (1, e_i) \in E^2_{54}(G)\} = 2,$$
$$e_i^2 = \min\,\{e_i \mid e_i \in S(G),\, e_i > 3,\, (1, e_i) \in E^2_{54}(G)\} = 4.$$

Шаг 7. Применив к ограничениям $x_2 \le 2$, $x_2 \ge 4$ преобразование (5), получим $y_2 - 2y_0 \le 0$, $-y_2 + 4y_0 \le 0$.

Шаг 8. К линейной задаче шага 1 добавим ограничение $y_2 - 2y_0 \le 0$ и решим ее: $F(\bar{y}_1) = f(\bar{x}_1) = 2/3$, $\bar{x}_1 = (2, 2)$.

Шаг 9. К линейной задаче шага 1 добавим ограничение $-y_2 + 4y_0 \le 0$ и решим ее: $F(\bar{y}_2) = f(\bar{x}_2) = 13/18$, $\bar{x}_2 = (5/2, 4)$.

Шаг 10. Учитывая, что $\dfrac{2}{3} < \dfrac{13}{18}$, для дальнейшего ветвления выберем задачу шага 9. Далее, применив алгоритм к задаче, решенной на шаге 9, получим две задачи: к одной добавляется ограничение вида $y_1 - 2y_0 \le 0$, к другой — ограничение вида $-y_1 + 4y_0 \le 0$. Первая задача не имеет решения, а вторая предоставляет целевой функции значение $F(\bar{y}_4) = 9/13$, откуда $F(\bar{x}_4) = 9/13$, $\bar{x}_4 = (4, 5)$. Пара $\langle 9/13, (4,5)\rangle$ — оптимальное решение исходной задачи.

Таким образом, предложен и обоснован алгоритм метода ветвей и границ для решения задач оптимизации на комбинаторном множестве размещений в случае дробно-линейной целевой функции и дополнительных линейных ограничениях. Целесообразно в дальнейшем провести теоретическую оценку его сложности, а также найти границы его применения на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — К.: Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К.: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. — 188 с.
3. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.
4. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями / За ред. І.В. Сергієнка. — К.: Наук. думка, 2005. — 117 с.
5. Емец О.А., Бараболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях / Под ред. И.В. Сергиенко. — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с.
6. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. — Полтава: ПУЕТ, 2011. — 239 с.
7. Емец О.А., Черненко О.А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях / Под ред. И.В. Сергиенко. — К.: Наук. думка, 2011. — 139 с.
8. Емец О.А., Романова Н.Г. Оптимизация на полиперестановках / Под ред. И.В. Сергиенко. — К.: Наук. думка, 2010. — 105 с.
9. Емец О.А., Барболина Т.Н., Черненко О.А. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными ограничениями на размещениях // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 5. — С. 79–85.
10. Емец О.А., Парфёнова Т.А. Транспортные задачи на перестановках: свойства оценок в методе ветвей и границ // Там же. — 2010. — № 6. — С. 106–112.
11. Ємець О.О., Парфьонова Т.О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв'язування, узагальнення. — Полтава: ПУЕТ, 2011. — 174 с.
12. Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. — 144 с.
13. Ємець О.О., Черненко О.О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації. — Полтава: ПУЕТ, 2011. — 204 с.
14. Гуляницький Л.Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: Автореф. дис. … д-ра техн. наук:. — К., 2005. — 32 с.
15. Донець Г.П., Колєчкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. — Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. — 309 с.
16. Корбут А.А., Сигал И.Х., Финкельштейн Ю.Ю. Метод ветвей и границ: обзор теории, алгоритмов, программ и приложений // Math. Operationsch und Statist., Ser. Optimiz. — 1977. — N 2. — P. 253–280.
17. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. — М.: Наука, 1969. — 368 с.
18. Land A.H., Doig A.G. An automatic method of solving discrete programming problems // Econometrica. — 1960. — **28**. — P. 497–520.

Поступила 23.03.2012