УДК 517.97

Н. МАМАДАЛИЕВ

ОБ ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Ключевые слова: *преследования, начальное множество, терминальное множество, управление, пучок траекторий, запаздывание.*

В пространстве R^n рассматривается квазилинейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением [1]

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - f(u, v), \ t \geq 0, \tag{1}$$

где $z \in R^n$, $n \geq 1$; $u \in R^p$; $v \in R^q$; A, B — постоянные квадратные матрицы размера $(n \times n)$ каждая; h — фиксированное действительное число, величина запаздывания. Векторы u, v — управляющие параметры преследующего и убегающего игроков соответственно, имеют вид измеримых векторных функций $u = u(\cdot)$, $v = v(\cdot)$, определенных на отрезке $[0, \infty)$, и удовлетворяют ограничениям вида

$$u(t) \in P, \ v(t) \in Q, \ 0 \leq t < \infty, \tag{2}$$

где P и Q — непустые компактные подмножества пространств R^p и R^q; $f: P \times Q \to R^n$ — непрерывная функция.

В дальнейшем измеримые функции $u = u(t)$ и $v = v(t)$, $0 \leq t < \infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем допустимыми управлениями преследующего и убегающего игроков соответственно.

В пространстве R^n выделено некоторое непустое множество M, называемое терминальным множеством. В дальнейшем предположим, что:

а) терминальное множество имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство пространства R^n, а M_1 — подмножество подпространства L, которое является ортогональным дополнением к подпространству M_0 в R^n (т.е. $M_0 \oplus L = R^n$);

б) π — матрица оператора ортогонального проектирования из R^n на подпространство L;

в) под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [2];

г) под операцией $\underline{*}$ понимается операция геометрической разности [2].

Кроме того, задано начальное множество $N(R(\cdot))\subset R^n$. В качестве начального множества $N(R(\cdot))$ берется множество измеримых ветвей многозначного отображения $R\ (s)$, $-h\le s\le 0$: $N\ (R(\cdot))=\{z_0(s): z_0(s)\in R(s),\ s\in[-h,0]\}$. Обозначим $Z(u(\cdot),\ v(\cdot),\ N(R(\cdot)))$ множество (пучок) всех траекторий уравнения (1), исходящих в момент $t=0$ из точек начального множества $N(R(\cdot))$ при допустимых управлениях $u\ (\cdot)$, $v(\cdot)$ преследующего и убегающего игроков соответственно.

При изучении игры (1) отождествим себя с преследователем. В этом случае наша цель заключается в приведении пучка траекторий $Z(u(\cdot),\ v(\cdot),\ N(R(\cdot)))$ на терминальное множество M. Задача управления пучками траекторий состоит в нахождении числа $T=T(z_0(\cdot))\ge 0$ и конструировании при каждом $t\in[0,\infty)$ значения $u\,[t]$ параметра u так, чтобы каждая траектория $z\,(t), 0\le t<\infty$, пучка $Z(u[\cdot],\ v(\cdot),\ N(R(\cdot)))$ попала на терминальное множество M за время, не превосходящее T, т.е. для каждой траектории $z\ (t), 0\le t<\infty$, пучка $Z(u[\cdot],\ v(\cdot),\ N(R(\cdot)))$ при некотором $t=t'\in[0,T]$ должно иметь место включение $z\ (t')\in M$. Число T называется временем перевода. В случае, когда задача управления пучками траекторий разрешима, то считают, что в игре преследования (1) пучок траекторий из начального множества $N(R(\cdot))$ можно перевести на терминальное множество M за время T.

Заметим, что задачи при одноточечном начальном множестве $N(R(\cdot))$ изучались многими авторами [3–5]. Поэтому с точки зрения развития теории дифференциальных игр представляет интерес случай, когда множество $N(R(\cdot))$ содержит более одного элемента. Отметим, что при одном элементе множества $N(R(\cdot))$ стратегия преследователя строится, в частности, исходя из данного начального положения $z_0(\cdot)$. А в случае, когда $N(R(\cdot))$ содержит более одного элемента, для всех начальных положений $z_0(\cdot)$ из множества $N(R(\cdot))$ строится одна и та же стратегия преследователя. В этом заключается трудность. Случай, когда множество $N(R(\cdot))$ содержит более одного элемента, изучался в работах [6,7]. Для рассматриваемой задачи стратегия преследователя строится в виде $u=u(t,\ v),\ t\ge 0,\ v\in R^q$, при условии, что для любого допустимого управления $v=v(t),\ t\ge 0$, убегающего игрока функция $u[t]=u(t,\ v(t)),\ t\ge 0$, измерима и является допустимым управлением преследующего игрока. В частности, измеримость $u[t],\ t\ge 0$, гарантируется, если $u(t,\ v)$ непрерывна по v при фиксированном t и измерима по t при фиксированном v [8, 9]. Отметим, что рассматриваемая задача ранее в бесконфликтной ситуации изучалась в [10], а в конфликтной ситуации, но с несколько других позиций — в [11].

В настоящей статье получены достаточные условия разрешимости задачи управления пучками траекторий (см. теоремы 1–4). При формулировке теорем 1–4 уточняется информация, используемая при построении управления $u[t]$.

Пусть $\tau\ge 0,\ r\in[0,\tau]$ и допустимые управления $u=u(r),\ v=v(r)$ определены на отрезке $[0,\tau]$. Тогда для решения уравнения (1) при начальном условии $z_0(\cdot)\in N(R(\cdot))$, $(z(r)=z_0(r),\ -h\le r\le 0)$ в силу формулы Коши (после его проектирования на L) имеет место представление (см. [1])

$$\pi z(\tau)=\pi\ K(\tau)\ z_0(0)+\int_{-h}^{0}\pi K\ (\tau-r-h)Bz_0(r)dr-\int_{0}^{\tau}\pi K(\tau-r)f\,(u(r),\ v(r))dr,$$

где $K(r)$, $-\infty<r\le\tau$, — матричная функция, обладающая свойствами:

а) $K(r)=\widetilde{0},\ r<0$, $\widetilde{0}$ — нулевая матрица порядка n;

б) $K(0)=E,\ E$ — единичная матрица порядка n;

в) элементы матрицы $K(r)$ принадлежат классу $C[0,\tau]$;

г) матричная функция $K(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(r) = AK(r) + BK(r-h), \ 0 < r < h. \quad (3)$$

Существование и единственность матричной функции $K(r)$, удовлетворяющей условиям а–г, могут быть доказаны методом последовательного интегрирования уравнения (3).

Рассмотрим многозначное отображение

$$\hat{w}(r) = \bigcap_{v \in Q} F(r, v), \ r \geq 0,$$

где $F(r, v) = \pi K(r) f(P, v)$ и $\pi K(r) f(P, v) = \{\pi K(r) f(u, v) : u \in P\}$.

Введем множество $W(\tau) = \int_0^\tau \hat{w}(r) dr, \ W(0) = M_1.$

Пусть d — произвольная точка множества $M_1 \overset{*}{-} H[\tau, N(R(\cdot))]$, $w(r), 0 \leq r \leq \tau,$ — произвольная суммируемая функция, $w(r) \in \hat{w}(r)$, где

$$H[\tau, N(R(\cdot))] = \pi K(\tau) R(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - r - h) BR(r) dr =$$

$$= \{\pi K(\tau) z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - r - h) Bz_0(r) dr : \ z_0(s) \in R(s), \ -h \leq s \leq 0\}.$$

Зафиксируем некоторое начальное положение $z_0(\cdot) \in N(R(\cdot))$. Пусть $\xi[\tau, z_0(\cdot)] = -d - f(\tau)$, где $f(\tau) \in W(\tau)$. Далее, в соответствии с определением интеграла $\int_0^\tau \hat{w}(r) dr$ существует измеримый по Борелю суммируемый селектор $w(r) \in \hat{w}(r)$, $0 \leq r \leq \tau$, такой, что выполнено равенство $f(\tau) = \int_0^\tau w(r) dr$. Зафиксируем этот селектор. Тогда функция $\xi[\tau, z_0(\cdot)]$ имеет вид $\xi[\tau, z_0(\cdot)] = -d - \int_0^\tau w(r) dr$.

Для произвольного вектора $v \in Q$ определим числовую функцию $\lambda(z_0(\cdot), \tau, r, v)$ и вектор-функцию $\eta[\tau, z_0(\cdot)]$:

$$\lambda(z_0(\cdot), \tau, r, v) = \begin{cases} \sup\{\lambda > 0 : \lambda \eta[\tau, z_0(\cdot)] \in F(r, v) - w(\tau - r)\}, \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] \neq 0, \\ \tau^{-1}, \ \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0; \end{cases}$$

$$\eta[\tau, z_0(\cdot)] = \begin{cases} \dfrac{\xi[\tau, z_0(\cdot)]}{|\xi[\tau, z_0(\cdot)]|}, \ \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] \neq 0, \\ \eta^0, \ \text{если } \ \xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0, \end{cases}$$

$$\lambda(z_0(\cdot), \tau, r) = \inf_{v \in Q} \lambda(z_0(\cdot), \tau, r, v),$$

где η^0 — произвольный единичный вектор подпространства L.

Предположение 1. Существуют число $\tau = \tau_1(z_0(\cdot)) > 0$, вектор $d \in M_1 \overset{*}{-} H[\tau_1, N(R(\cdot))]$ и суммируемая функция $w(r), 0 \leq r \leq \tau_1$, $w(r) \in \hat{w}(r)$, $d + \int_0^{\tau_1} w(r) dr \neq 0,$ такие, что:

а) функция $\lambda(z_0(\cdot), \tau_1, r), 0 \leq r \leq \tau_1$, а также суперпозиция $\lambda(z_0(\cdot), \tau_1, r, v(r))$, $0 \leq r \leq \tau_1$, функции $\lambda(z_0(\cdot), \tau_1, r, v)$, $0 \leq r \leq \tau_1$, $v \in Q$, при произвольной измеримой функции $v(r), 0 \leq r \leq \tau_1$, являются суммируемыми;

б) выполнено неравенство

$$\left|\,\xi[\tau_1, z_0(\cdot)]\right| - \int_0^{\tau_1} \lambda(z_0(\cdot), \tau_1, r, v(r))dr \le 0. \tag{4}$$

Теорема 1. Если выполнено предположение 1, то в игре (1) можно перевести пучок траекторий из множества $N(R(\cdot))$ на множество M за время $T = \tau_1$. При этом для конструирования $u[t]$ преследователь в каждый момент t использует значения $v(t)$ параметра v и $z(s)$ при $t - h \le s \le t$.

Доказательство. Пусть для начального положения $z_0(\cdot) \in N(R(\cdot))$ выполнены условия предположения 1. Для произвольной измеримой функции $v = v(r)$, $0 \le r \le \tau_1$, $v(r) \in Q$, рассмотрим функцию $\rho(t; v(r),\ 0 \le r \le t)$, $0 \le t \le \tau_1$ (см. [6]):

$$\rho(t; v(r), 0 \le r \le t) = \left|\,\xi[t, z_0(\cdot)]\right| - \int_0^{t} \lambda(z_0(\cdot), t, r, v(r))dr\,.$$

Утверждается, что существует момент времени $t = t' \in [0, \tau_1]$ такой, что $\rho(t'; v(r), 0 \le r \le t') = 0$. Очевидно, что если $\xi[t, z_0(\cdot)] = 0$, то можно считать $t' = 0$. Пусть $\xi[t, z_0(\cdot)] \ne 0$ и $\rho(t; v(r), 0 \le r \le t) > 0$ на отрезке $[0, \tau_1]$. Иначе

$$0 < \rho(\tau_1; v(r), 0 \le r \le \tau_1) =$$

$$= \left|\,\xi[\tau_1, z_0(\cdot)]\right| - \int_0^{\tau_1} \lambda(z_0(\cdot), \tau_1, r, v(r))dr \le \left|\,\xi[\tau_1, z_0(\cdot)]\right| - \int_0^{\tau_1} \lambda(z_0(\cdot), \tau_1, r)dr \le 0,$$

что противоречит неравенству (4). Таким образом, пусть $\rho(t'; v(r), 0 \le r \le t') = 0$. Учитывая этот факт, целесообразно значение $u[r]$ параметра u выбирать как первый компонент решения уравнений

$$\pi K(\tau_1 - r) f(u, v(r)) = w(\tau_1 - r) + \lambda(z_0(\cdot), \tau_1, r, v(r))\eta[\tau_1, z_0(\cdot)],\ 0 \le r \le t', \tag{5}$$

$$\pi K(\tau_1 - r) f(u, v(r)) = w(\tau_1 - r),\ \ t' < r \le \tau_1, \tag{6}$$

относительно $u \in P$. Используя лемму Филиппова–Кастена [8, 9], можно показать существование измеримого решения уравнений (5), (6). Как обычно, за решение $u[r]$ уравнений (5), (6) принимается наименьшее в лексикографическом смысле среди всех решений этих уравнений. При таком способе управления $u[r]$ убедимся, что пучок траекторий $Z(u[\cdot], v(\cdot), N(R(\cdot)))$ можно перевести из множества $N(R(\cdot))$ на множество M до момента времени T. Действительно, (см. (5), (6)) имеем соотношение

$$d = -\xi[\tau_1, z_0(\cdot)] - \int_0^{\tau_1} w(\tau_1 - r)dr =$$

$$= -\xi[\tau_1, z_0(\cdot)] - \int_0^{t'} \pi K(\tau_1 - r)[f(u[r], v(r)) - \lambda(z_0(\cdot), \tau_1, r, v(r))\eta[\tau_1, z_0(\cdot)]]dr -$$

$$- \int_{t'}^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - r) f(u[r], v(r))dr = -\xi[\tau_1, z_0(\cdot)] + \int_0^{t'} \lambda(z_0(\cdot), \tau_1, r, v(r))\,\eta[\tau_1, z_0(\cdot)]\,dr -$$

$$- \int_{t'}^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - r) f(u[r], v(r))dr = - \int_{t'}^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - r) f(u[r], v(r))dr, \tag{7}$$

ибо из установленного выше равенства $\rho(t'; v(r), 0 \le r \le t') = 0$ имеем

$$-\xi[\tau_1, z_0(\cdot)] + \int_0^{t'} \lambda(z_0(\cdot), \tau_1, r, v(r))\eta[\tau_1, z_0(\cdot)]dr =$$

$$= -\left|\,\xi[\tau_1, z_0(\cdot)]\right|\eta[\tau_1, z_0(\cdot)] + \int_0^{t'} \lambda(z_0(\cdot), \tau_1, r, v(r))\,\eta\,[\tau_1, z_0(\cdot)]\,dr =$$

$$= [-\left|\,\xi[\tau_1, z_0(\cdot)]\right| + \int_0^{t'} \lambda(z_0(\cdot), \tau_1, r, v(r))dr]\,\eta\,[\tau_1, z_0(\cdot)] = 0.$$

Следовательно (см. (7)), получаем

$$-\int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - r) f(u[r], v(r)) ds = d \in [M_1 \overset{*}{\_} H[\tau_1, N(R(\cdot))]].$$

Из определения геометрической разности множеств следует, что

$$H[\tau_1, N(R(\cdot))] - \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - r) f(u[r], v(r)) ds \subset M_1.$$

Таким образом, учитывая произвольность начального положения $z_0(\cdot) \in N(R(\cdot))$, пучок траекторий из множества $N(R(\cdot))$ переведен на множество M за время τ_1. Теорема 1 доказана.

Пусть ω — произвольное разбиение отрезка $[0, \tau]$: $\omega = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \tau\}$, $v_i(r)$, $t_{i-1} \le r \le t_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, —произвольная измеримая функция со значениями из множества Q; Ω —произвольное замкнутое подмножество множества $M_1 \overset{*}{\_} H[\tau, N(R(\cdot))]$.

Положим $A_0 = \Omega$ (см. [6]) и

$$A_i = \bigcap_{v_i(\cdot)} \left[A_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \pi K(r) f(P, v_i(r)) dr \right], \ i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$A_k(\Omega, \omega) = A_k, \ W(\Omega, \tau) = \bigcap_{\omega} A_k(\Omega, \omega),$$

где пересечение берется по всевозможным разбиениям ω отрезка $[0, \tau]$. По определению положим $W(\Omega, 0) = \Omega$ и рассмотрим множество

$$W_2[M_1 \overset{*}{\_} H[\tau, N(R(\cdot))], \tau] = \bigcup_{\Omega} W(\Omega, \tau), \ \tau > 0.$$

Теорема 2. Предположим, что при некотором $\tau = \tau_2(z_0(\cdot)) > 0$ имеет место включение

$$0 \in W_2\,[M_1 \overset{*}{\_} H[\tau, N(R(\cdot))], \tau]. \tag{8}$$

Тогда в игре (1) пучок траекторий можно перевести из множества $N(R(\cdot))$ на множество M за время $T = \tau_2$. При этом для конструирования $u[t]$ используются значения $u(s)$, $0 \le s \le t$, и $v(s)$, $0 \le s \le t + \varepsilon$, где ε — произвольное фиксированное положительное число.

Доказательство. Для некоторого замкнутого подмножество Ω множества $M_1 \overset{*}{\_} H[\tau, N(R(\cdot))]$ по условию теоремы 2 при $\tau = \tau_2$ имеет место включение $0 \in W_2(\Omega, \tau_2)$ (см. (8)). Множество $W_2(\Omega, \tau_2)$ является альтернированным интегралом Л.С. Понтрягина с начальным множеством $A_0 = \Omega$ [2, 6]. Поэтому для него выполнено полугрупповое свойство альтернированного интеграла [2]

$$W_2(\Omega, \tau_2) \subset \bigcap_{v_0(\cdot)} \left[W_2(\Omega, \tau_2 - \varepsilon) + \int_{\tau_2 - \varepsilon}^{\tau_2} \pi K(r) f(P, v_0(r)) dr \right], \tag{9}$$

ε — произвольное положительное фиксированное малое число, $0 < \varepsilon \le \tau_2$; $v_0(r)$, $\tau_1 - \varepsilon \le r \le \tau_2$, — произвольная измеримая функция со значениями из множества Q.

Пусть $v = v(t)$, $0 \le t < \infty$, — произвольная измеримая функция $v(t) \in Q$. В соответствии с условиями доказываемой теоремы в момент времени $t = 0$ становится известным сужение $v(t)$, $0 \le t \le \varepsilon$, функции $v(t)$, $0 \le t < \infty$, на отрезок $[0, \varepsilon]$. Из включения (9) следует, что для произвольной функции $\tilde{v}(\tau_2 - r)$, $\tau_2 - \varepsilon \le r \le \tau_2$, $\tilde{v}(\tau_2 - r) \in Q$, имеем

$$0 \in W_2(\Omega, \tau_2 - \varepsilon) + \int_{\tau_2 - \varepsilon}^{\tau_2} \pi K(r) f(P, \tilde{v}(\tau_2 - r)) dr. \tag{10}$$

Сделаем замену переменных $s=\tau_2-r$ в интеграле, участвующем в (10). Тогда имеет место включение

$$0\in W_2(\Omega,\tau_2-\varepsilon)+\int_0^{\varepsilon}\pi K(\tau_2-s)f(P,\tilde{v}(s))ds. \qquad (11)$$

Таким образом, для произвольной измеримой функции $\tilde{v}(s)$, $0\le s\le\varepsilon$, имеет место включение (11). Следовательно, и при $\tilde{v}(s)\equiv v(s)$, $0\le s\le\varepsilon$, справедливо включение (11). Отсюда в силу определения операции алгебраической суммы двух множеств вытекает существование измеримой функции $u(s)$, $0\le s\le\varepsilon$, такой, что $u(s)\in P$ и

$$-\int_0^{\varepsilon}\pi K(\tau_2-s)f(u(s),v(s))ds\in W_2(\Omega,\tau_2-\varepsilon). \qquad (12)$$

Далее рассуждаем аналогично для следующих отрезков. Поскольку

$$W_2(\Omega,\tau_2-\varepsilon)\subset W_2(\Omega,\tau_2-2\varepsilon)+\int_{\tau_2-2\varepsilon}^{\tau_2-\varepsilon}\pi K(r)f(P,\bar{\bar{v}}(\tau_2-r))dr \qquad (13)$$

для произвольной измеримой функции $\bar{\bar{v}}(\tau_2-r)$, $\tau_2-2\varepsilon\le r\le\tau_2-\varepsilon$, $\bar{\bar{v}}(\tau_2-r)\in Q$, то при $\bar{\bar{v}}(s)\equiv v(s)$, $\varepsilon\le s\le 2\varepsilon$, где $v(s)$, $\varepsilon\le s\le 2\varepsilon$, — сужение функции $v(s)$, $0\le s<\infty$, на отрезок $[\varepsilon,2\varepsilon]$, имеем

$$W_2(\Omega,\tau_2-\varepsilon)\subset W_2(\Omega,\tau_2-2\varepsilon)+\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\pi K(\tau_2-s)f(P,v(s))ds. \qquad (14)$$

Следовательно, существует измеримая функция $u(s)$, $\varepsilon\le s\le 2\varepsilon$, такая, что $u(s)\in P$ и

$$-\int_0^{\varepsilon}\pi K(\tau_2-s)f(u(s),v(s))ds\in W_2(\Omega,\tau_2-2\varepsilon)+\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\pi K(\tau_2-s)f(u(s),v(s))ds. \qquad (15)$$

Из соотношения (15) следует, что

$$-\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\pi K(\tau_2-s)f(u(s),v(s))ds\in W_2(\Omega,\tau_2-2\varepsilon) \qquad (16)$$

и т.д. Очевидно, что существует натуральное число j такое, что: 1) $(j-1)\varepsilon<\tau_2\le j\varepsilon$; 2) по известной функции $v(s)$, $0\le s\le\tau_2$, где $v(s)$, $0\le s\le\tau_2$, — сужение функции $v(s)$, $0\le s<\infty$, на отрезок $[0,\tau_2]$, найдется измеримая функция $u(s)$, $(j-1)\varepsilon\le s\le\tau_2$, $u(s)\in P$, удовлетворяющая условию (см. (16))

$$-\int_0^{(j-1)\varepsilon}\pi K(\tau_2-s)f(u(s),v(s))ds-\int_{(j-1)\varepsilon}^{\tau_2}\pi K(\tau_2-s)f(u(s),v(s))ds\in W_2(\Omega,0). \qquad (17)$$

Однако имеет место равенство

$$-\int_0^{(j-1)\varepsilon}\pi K(\tau_2-s)f(u(s),v(s))ds-\int_{(j-1)\varepsilon}^{\tau_2}\pi K(\tau_2-s)f(u(s),v(s))ds=$$
$$=-\int_0^{\tau_2}\pi K(\tau_2-s)f(u(s),v(s))ds,$$

$$W_2(\Omega,0)=\Omega,\ \Omega\subset M_1 \overset{*}{-} H[\tau_2,N(R(\cdot))]. \qquad (18)$$

С учетом (17) и (18) получаем

$$H[\tau_2,N(R(\cdot))]-\int_0^{\tau_2}\pi K(\tau_2-s)f(u(s),v(s))ds\subset M_1.$$

Это означает, что весь пучок траекторий, выходящих из точек множества $N(R(\cdot))$, в момент времени $t=\tau_2$ оказывается на множестве M. Теорема 2 доказана.

Замечание. Как видно из (15)–(17), значения параметра u выбираются в моменты времени $0, \varepsilon, \dots, (j-1)\varepsilon$. В момент времени $t=0$ строится функция $u[t]$, $0 \le t \le \varepsilon$, при этом используются значения $v(s), 0 \le s \le \varepsilon$. В момент времени $t=\varepsilon$ строится функция $u[t], \varepsilon \le t \le 2\varepsilon$, при этом используются ε, значения $u[s]$, $0 \le s \le \varepsilon$, и $v(s), 0 \le s \le 2\varepsilon$, и т. д. В момент времени $t=(j-1)\varepsilon$ конструируется функция $u[t], (j-1)\varepsilon \le t \le \tau_2$, при этом используются момент $(j-1)\varepsilon$, значения $u[s]$, $0 \le s \le (j-1)\varepsilon$, и $v(s)$, $0 \le s \le \tau_2$.

Пусть $M(r)$, $0 \le r \le \tau$, — произвольное компактнозначное многозначное отображение, удовлетворяющее условию $\int\limits_0^\tau M(r)dr \subset M_1$.

Введем множества

$$\overline{w}(M(r), r) = \bigcap_{v \in Q} [M(r) + F(r, v)], \; W(r) = \int\limits_0^\tau \overline{w}(M(r), r)dr, \;\; W(0) = M_1.$$

Положим

$$\xi[\tau, z_0(\cdot)] = \pi K(r) z_0(0) + \int\limits_{-h}^{0} \pi K(\tau - r - h) B z_0(r) dr - \int\limits_0^\tau w(r)dr,$$

где $w(r)$, $0 \le r \le \tau$, — произвольная суммируемая функция, $w(r) \in \overline{w}(M(r), r)$ для всех $r \in [0, \tau]$. Пусть

$$\eta[\tau, z_0(\cdot)] = \begin{cases} \dfrac{\xi[\tau, z_0(\cdot)]}{|\xi[\tau, z_0(\cdot)]|}, & \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] \ne 0, \\ \eta^0, & \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0, \end{cases}$$

где η^0 — произвольный единичный вектор из L.

Определим числовую функцию $\lambda(z_0(\cdot), \tau, r, v)$ следующим образом:

$$\lambda(z_0(\cdot), \tau, r, v) =$$
$$= \begin{cases} \sup\{\lambda > 0 \colon \lambda\eta[\tau, z_0(\cdot)] \in [M(\tau - r) + F(r, v)] - w(\tau - r)\}, & \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] \ne 0, \\ \tau^{-1}, & \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0, \end{cases}$$

$\lambda(z_0(\cdot), \tau, r) = \inf\{\lambda(z_0(\cdot), \tau, r, v) \colon v \in Q\}$, а если $\xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0$, то считаем, что $\eta[\tau, z_0(\cdot)] = 0$, $\lambda(z_0(\cdot), \tau, r, v) \equiv \lambda(z_0(\cdot), \tau, r) \equiv 0$.

Предположение 2. Существуют положительное число $\tau = \tau_3(z_0(\cdot)) > 0$, многозначное отображение $M(r), 0 \le r \le \tau_3$, суммируемая функция $w(r)$, $0 \le r \le \tau_3$, $w(r) \in \overline{w}(M(r), r)$, такие, что:

а) функция $\lambda(z_0(\cdot), \tau_3, r), 0 \le r \le \tau_3$, а также суперпозиция $\lambda(z_0(\cdot), \tau_3, r, v(r))$, $0 \le r \le \tau_3$, функции $\lambda(z_0(\cdot), \tau_3, r, v), 0 \le r \le \tau_3$, $v \in Q$, при произвольной суммируемой функции $v(r), 0 \le r \le \tau_3$, являются суммируемыми;

б) выполнено неравенство

$$|\xi[\tau_3, z_0(\cdot)]| - \int\limits_0^{\tau_3} \lambda(z_0(\cdot), \tau_3, r)dr \le 0. \tag{19}$$

Теорема 3. Если выполнено предположение 2, то в игре (1) можно перевести пучок траекторий из множества $N(R(\cdot))$ на множество M за время $T = \tau_3$. При этом для конструирования $u[t]$ используются t, значения $u(s), 0 \le s \le t$, $z(s)$ при $t - h \le s \le t$.

Доказательство. Пусть для начального положения $z_0(\cdot) \in N(R(\cdot))$ выполнены условия предположения 2 и $v = v(t), 0 \le t \le \tau_3$, $v(r) \in Q$, — произвольная измеримая функция. Введем функцию $\rho(t; v(r), 0 \le r \le t), 0 \le t \le \tau_3$, определенную в виде (см. [6])

$$\rho(t; v(r), 0 \le r \le t) = |\xi[t, z_0(\cdot)]| - \int\limits_0^t \lambda(z_0(\cdot), t, r, v(r))dr.$$

Покажем, как и в теореме 1, что для некоторого момента времени $t=t'\in[0,\tau_3]$ функция $\rho(t;v(r),0\le r\le t),0\le t\le\tau_3$, обращается в нуль. С учетом этого факта, если в момент времени $t\in[0,\tau_3]$ $\rho(t;v(r),0\le r\le t)>0$, то значения функций $u[t]\in P$, $m(t)\in M(t)$ в момент времени t представляют лексикографический минимум решений уравнения

$$m(t)+\pi K(\tau_3-t)f(u(t),v(t))=w(\tau_3-t)+\lambda(z_0(\cdot),\tau_3,t,v(t))\eta[\tau_3,z_0(\cdot)]. \quad (20)$$

Если t' — первое значение параметра $t\in[0,\tau_3]$, для которого $\rho(t';v(r),0\le r\le t')=0$, то для $t\in(t,\tau_3]$ значения функций $u[t]\in P$, $m(t)\in M(t)$ в момент времени t представляют лексикографический минимум решений уравнения

$$m(t)+\pi K(\tau_3-t)f(u(t),v(t))=w(\tau_3-t). \quad (21)$$

Управление $u[t]$, выбранное в соответствии с правилами (20) и (21), далее обозначим $u[t]=u(t,v(t))$. Покажем, что в этом случае выбранное управление $u[t]$ будет гарантировать перевод пучка траекторий из множества $N(R(\cdot))$ на множество M к моменту τ_3. Функция $\lambda(z_0(\cdot),\tau_3,t,v(t))$ согласно утверждению П.2 из [8] измерима по t, поэтому из предположения 2 в силу теоремы Филиппова-Кастена [9] следует разрешимость уравнений (20), (21) в классе измеримых функций $u[t]\in P$, $m(t)\in M(t),0\le t\le\tau_3$. Действительно, в силу уравнений (20), (21) имеем

$$\psi(\tau_3)z_0(\cdot)=\xi[\tau_3,z_0(\cdot)]+\int_0^{\tau_3}w(\tau_3-t)dt=\xi[\tau_3,z_0(\cdot)]+$$

$$+\int_0^{t'}\{m(t)+\pi K(\tau_3-t)f(u[t],v(t))-\lambda(z_0(\cdot),\tau_3,t,v(t))\eta[\tau_3,z_0(\cdot)]\}dt+$$

$$+\int_{t'}^{\tau_3}[m(t)+\pi K(\tau_3-t)f(u[t],v(t))]dt=\xi[\tau_3,z_0(\cdot)]-$$

$$-\int_0^{t'}\lambda(z_0(\cdot),\tau_3,t,v(t))\,\eta\,[\tau_3,z_0(\cdot)]\,dt+\int_0^{\tau_3}m(t)dt+\int_0^{\tau_3}\pi K(\tau_3-t)f(u[t],v(t))dt=$$

$$=\int_0^{\tau_3}m(t)dt+\int_0^{\tau_3}\pi K(\tau_3-t)f(u[t],v(t))dt, \quad (22)$$

поскольку

$$-\xi[\tau_3,z_0(\cdot)]+\int_0^{t'}\lambda(z_0(\cdot),\tau_3,t,v(t))\,\eta\,[\tau_3,z_0(\cdot)]dt=$$

$$=-\left|\xi[\tau_3,z_0(\cdot)]\right|\eta\,[\tau_3,z_0(\cdot)]+\int_0^{t'}\lambda(z_0(\cdot),\tau_3,t,v(t))\eta[\tau_3,z_0(\cdot)]dt=$$

$$=\left[-\left|\xi[\tau_3,z_0(\cdot)]\right|+\int_0^{t'}\lambda(z_0(\cdot),\tau_3,t,v(t))dt\right]\eta[\tau_3,z_0(\cdot)]=0$$

в силу установленного выше равенства $\rho(t';v(r),0\le t\le t')=0$, где

$$\psi(\tau_3)z_0(\cdot)=\pi K(\tau_3)z_0(0)+\int_{-h}^{0}\pi K(\tau_3-t-h)Bz_0(t)dt.$$

Следовательно (см. (22)), имеем

$$\psi(\tau_3)z_0(\cdot)-\int_0^{\tau_3}\pi K(\tau_3-t)f(u[t],v(t))dt=\int_0^{\tau_3}m(t)dt.$$

Поскольку $m(t) \in M(t)$ на отрезке $[0, \tau_3]$ и $\int\limits_0^{\tau_3} m(t)dt \in \int\limits_0^{\tau_3} M(t)dt$, то получаем

$$\psi(\tau_3) z_0(\cdot) - \int\limits_0^{\tau_3} \pi K(\tau_3 - t) f(u[t], v(t))dt \in H[\tau_3, N(R(\cdot))] -$$
$$- \int\limits_0^{\tau_3} \pi K(\tau_3 - t) f(u[t], v(t))dt = \int\limits_0^{\tau_3} M(t)dt \subset M_1 .$$

Таким образом, пучок траекторий из множества $N(R(\cdot))$ можно перевести на множество M за время τ_3 . Теорема 3 доказана.

Пусть, как и ранее, $i = 1, 2, \ldots, k$, а (см. [6])

$$M^{(i)} = \bigcup_{M_{i-1}(\cdot)} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \bigcap_{v \in Q} [M_{i-1}(r) + \pi K(r) f(P, v)] dr, \tag{23}$$

где $M_0(r), t_0 \le r \le t_1$, — произвольная измеримая замкнутозначная многозначная функция, удовлетворяющая условию $\int\limits_{t_0}^{t_1} M_0(r)dr \subset M^{(0)}$, $M^{(0)} = M_1 \underline{*} H[\tau, N(R(\cdot))]$; $M_{i-1}(r)$, $t_{i-1} \le r \le t_i$, $i > 1$, — произвольная измеримая замкнутозначная многозначная функция, для которой $\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} M_{i-1}(r)dr \subset M^{(i-1)}$.

Положим $M^{(k)}(\omega) = M^{(k)}$; $W_3[M_1 \underline{*} H[\tau, N(R(\cdot))], \tau] = \bigcup\limits_{\omega} M^{(k)}(\omega), \tau > 0$.

Теорема 4. Предположим, что при некотором $\tau = \tau_4(z_0(\cdot)) > 0$ имеет место включение

$$0 \in W_3[M_1 \underline{*} H[\tau, N(R(\cdot))], \tau]. \tag{24}$$

Тогда в игре (1) пучок траекторий можно перевести из множества $N(R(\cdot))$ на множество M за время $T = \tau_4$. При этом для конструирования $u[t]$ используются t, значения $u(s), 0 \le s < t$, и $v(s), 0 \le s < t$.

Доказательство. Из условия $0 \in W_3[M_1 \underline{*} H[\tau_4, N(R(\cdot))], \tau_4]$ следует, что существует разбиение ω_0 отрезка $[0, \tau_4]$ такое, что $0 \in W_3^{(k)}(\omega_0)$ (см. (24)). Пусть $\omega_0 = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \tau_4\}$, $\delta_1 = t_k - t_{k-1}$, $\delta_2 = t_{k-1} - t_{k-2}, \ldots, \delta_k = t_1 - t_0$. В силу (23) существует измеримая замкнутозначная функция $M_{k-1}^{(0)}(r)$, $t_{k-1} \le r \le t_k$, такая, что

$$M^{(k)}(\omega_0) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \bigcap_{v \in Q} [M_{k-1}^{(0)}(r) + \pi K(r) f(P, v)] \right\} dr, \quad \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} M_{k-1}^{(0)}(r)dr \subset M^{(k-1)}.$$

Следовательно, существует суммируемая функция $w_{k-1}(r)$, $t_{k-1} \le r \le t_k$, такая, что для всех $r \in [t_{k-1}, t_k]$

$$w_{k-1}(r) \in \bigcap_{v \in Q} [M_{k-1}^{(0)}(r) + \pi K(r) f(P, v)], \quad 0 = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} w_{k-1}(r)dr. \tag{25}$$

Из включения (25) следует, что для любых $t \in [0, \delta_1]$, $v \in Q$ уравнение

$$m_{k-1} + \pi K(t_k - t) f(u, v) = w_{k-1}(t_k - t) \tag{26}$$

относительно $m_{k-1} \in M_{k-1}^{(0)}(t_k - t)$, $u \in P$ имеет решение. Среди всех решений уравнения (26) выберем то, у которого компонент u является наименьшим в лексикографическом смысле. (Основываясь на замкнутозначности $M_{k-1}^{(0)}(t_k - t)$ и непрерывности $\pi K(t_k - t) f(u, v)$ по u, v, легко доказать существование такого решения; далее, как видно из (26), компонент m_{k-1} решения находится однозначно после выбора компонента u.) Можно показать, что (см. [9]) компонент $u=u(t,v)$, $0\le t\le\delta_1$, $v\in Q$, будет измерим по Борелю, а $m_{k-1}=$ $=m_{k-1}(t,v)$, $0\le t\le\delta_1$, $v\in Q$, может быть также борелевски измеримой функцией, однако для произвольной измеримой функции $v_0(t)$, $0\le t\le\delta_1$, $v_0(t)\in Q$, функция $m_{k-1}(t,v_0(t)), 0\le t\le\delta_1$, будет лебеговски суммируемой функцией (это очевидным образом следует из (26)).

Пусть, как и ранее, $v(t)$, $0\le t\le\delta_1$, — сужение на отрезок $[0,\delta_1]$ функции $v(t)$, $0\le t<\infty$, $v(t)\in Q$. При выборе значений параметра u на отрезке $[0,\delta_1]$ по правилу $u[t]=u(t,v(t))$ имеем (см. (25), (26))

$$-\int_{t_{k-1}}^{t_k}\pi K(r)f(u[t_k-r],v(t_k-r))dr=\int_{t_{k-1}}^{t_k}m_{k-1}(t_k-r,v(t_k-r))dr. \qquad (27)$$

Сделав замену переменных $s=t_k-r$ в интеграле в левой части (27), получаем

$$-\int_{t_{k-1}}^{t_k}\pi K(t_k-s)f(u[s],v(s))ds=\int_{t_{k-1}}^{t_k}m_{k-1}(t_k-r,v(t_k-r))dr, \qquad (28)$$

однако $m_{k-1}(t_k-r,v(t_k-r))$, $t_{k-1}\le r\le t_k$, является суммируемой ветвью $M_{k-1}^{(0)}(t_k-r)$, $t_{k-1}\le r\le t_k$. Поэтому (см. (28))

$$-\int_0^{\delta_1}\pi K(t_k-s)f(u[s],v(s))ds\in M^{(k-1)}. \qquad (29)$$

Отсюда легко заключить, что если на отрезке $[\delta_1,\delta_1+\delta_2]$ каждое значение $u[t]$ параметра u выбирать как наименьший в лексикографическом смысле компонент решения уравнения (сравнить с (26))

$$m_{k-2}+\pi K(t_k-t)f(u,v(t))=w_{k-2}(t_k-t),$$

где $w_{k-2}(t_k-t)$, $\delta_1\le t\le\delta_1+\delta_2$, имеет аналогичный с $w_{k-1}(t_k-t)$, $0\le t\le\delta_1$, смысл, а $m_{k-2}\in M_{k-2}^{(0)}(t_k-t)$, при этом $M_{k-2}^{(0)}(t_k-t)$, $\delta_1\le t\le\delta_1+\delta_2$, находится из (29) и (23), то элементарные выкладки показывают (здесь опускаются), что

$$-\int_0^{\delta_1}\pi K(t_k-s)f(u[s],v(s))ds-\int_{\delta_1}^{\delta_1+\delta_2}\pi K(t_k-s)f(u[s],v(s))ds\in M^{(k-2)}.$$

Продолжив таким образом вычисления, окончательно получаем

$$-\int_0^{\delta_1}\pi K(t_k-s)f(u[s],v(s))ds-\ldots-\int_{\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{k-1}}^{\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_k}\pi K(t_k-s)f(u[s],v(s))ds\in M^{(0)}, \qquad (30)$$

однако $\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_k=t_k=\tau_4$, $M^{(0)}=M_1 \overset{*}{\_} H[\tau_4,N(R(\cdot))]$. Поэтому (см. (30))

$$-\int_0^{\tau_4}\pi K(\tau_4-s)f(u[s],v(s))ds\in M_1 \overset{*}{\_} H[\tau_4,N(R(\cdot))].$$

Отсюда вытекает, что пучок траекторий из множества $N(R(\cdot))$ в момент времени $t=\tau_4$ попадает на множество M. Теорема 4 доказана.

Таким образом, получены достаточные условия завершения преследования при наличии запаздывания с геометрическими ограничениями на управления игроков. Некоторые теоремы являются модификациями методов теории дифференциальных игр преследования по направлению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Наука, 1967. — 547 с.
2. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. — М.: Наука, 1998. — Т. 2. — 575 с.
3. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. Линейные дифференциально-разностные игры // ДАН СССР. — 1971. — **197**, № 4. — С. 777–780.
4. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний // Там же. — № 5. — С. 1018–1021.
5. Чикрий А.А., Чикрий Г.Ц. Групповое преследование в дифференциально-разностных играх // Дифференц. уравнения. — 1984. — **20**, № 5. — С. 802–810.
6. Сатимов Н.Ю. К методам решения игровых задач управления пучками траекторий // ДАН. СССР. — 1990. — **314**, № 1. — С. 132–134.
7. Тухтасинов М. Управления пучками траекторий при разнотипных ограничениях на управляющие параметры. — М., 1989. — 33 с. Деп. в ВИНИТИ 04.10.89. № 6101–В89.
8. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 197 с.
9. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 624 с.
10. Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками траекторий. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. — 228 с.
11. Куржанский А.Б. Управления и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. — 392 с.

Поступила 19.01.2011