УДК 519.14

А.Д. ПЛОТНИКОВ

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ПОИСКА НАИБОЛЬШЕГО НЕЗАВИСИМОГО МНОЖЕСТВА

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Множество всех неориентированных n-вершинных графов без петель и кратных ребер обозначим L_n. Пусть имеется граф $G=(V,\Gamma)\in L_n$, где V — множество графовых вершин, Γ — отображение V в V. Любой подграф $Q_1=(V_1,\Gamma_1)$ графа G называется кликой, порожденной V_1, если $\Gamma_1(v)=V_1\setminus\{v\}$ для всех $v\in V_1$. В частном случае, когда $\mathrm{Card}(V_1)=1$, одновершинный подграф $Q_1=(V_1,\Gamma_1)$ называется одновершинной кликой.

Клика Q_1 называется максимальной, если к ней нельзя присоединить никакой вершины $v\in V$ так, чтобы новое множество вершин также образовывало клику графа G. Клика $\hat{Q}$ называется наибольшей, если граф G не имеет клики большего размера, чем $\hat{Q}$.

Пусть требуется найти наибольшую клику графа G. Сформулирована известная задача поиска наибольшей клики.

Множество вершин $U\subseteq V$ графа G называется независимым, если $U\cap\Gamma(U)=\varnothing$. Независимое множество U графовых вершин называется максимальным (МНМ), если $U\cup\Gamma(U)=V$, и МНМ U называется наибольшим (НБНМ), если $\mathrm{Card}\,(U) > \mathrm{Card}\,(U)$ для любого МНМ U графа G.

Пусть требуется найти НБНМ графа G. Снова сформулирована известная задача поиска наибольшего независимого множества вершин графа G. Обе сформулированные выше задачи являются NP-полными [1, 2]. Они тесно связаны: решение одной из них влечет решение другой.

Граф $\overline{G}$ называют дополнительным к графу G, если он имеет такое же множество вершин, что и граф G, а ребра соединяют две вершины графа $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда эти вершины несмежные в G.

Нетрудно видеть, что всякая клика графа G соответствует независимому множеству вершин дополнительного графа $\overline{G}$ и наоборот. Поэтому нахождение НБНМ вершин в одном графе эквивалентно нахождению наибольшей клики в его дополнительном графе и наоборот.

В настоящей статье на основе гипотезы о свойствах специального орграфа разработан полиномиально-временной решающий алгоритм для нахождения НБНМ вершин графа.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть имеется граф $G=(V,\Gamma)\in L_n$. Разобьем множество графовых вершин V на подмножества

$$V^0, V^1, \ldots, V^m \tag{1}$$

так, что подмножество V^k, $k=0,1,2,\ldots,m$, есть МНМ подграфа $G_k=(V\setminus(V^0\cup \cup V^1\cup\ldots\cup V^{k-1}),\Gamma_k)=(V^k\cup\ldots\cup V^m,\Gamma_k)$. Ясно, что $G_0=(V^0\cup\ldots\cup V^m,\Gamma_0)=G$.

По данному неориентированному графу G и разбиению (1) можно построить ациклический орграф $\vec{G}(V^0)=(V,\vec{\Gamma})$ следующим образом. Если ребро из G связывает вершину $v_i\in V^{k_1}$ с вершиной $v_j\in V^{k_2}$, то оно заменяется дугой (v_i,v_j) при $k_1<k_2$. В этом случае вершина v_i называется началом дуги (v_i,v_j), а вершина

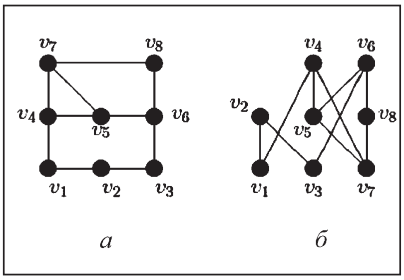

Рис. 1. Построение орграфа

v_j — ее концом; подмножество вершин V^k, $k=0,1,2,\ldots,m$, называется k-м слоем вершин орграфа, а множество V^0 — инициирующим.

Пример построения орграфа по данному неориентированному графу представлен на рис. 1. Последовательно в исходном графе (см. рис. 1, *а*) выбраны следующие МНМ: $V^0=\{v_1, v_3, v_7\}$, $V^1=\{v_2, v_5, v_8\}$ и $V^2=\{v_4, v_6\}$.

Обозначим $D(G)$ множество различных ациклических орграфов, соответствующих графу $G \in L_n$, каждый из которых порожден некоторой ориентацией его ребер. Далее будем рассматривать только орграфы из $D(G)$.

Максимальная длина $\rho(v)$ ориентированной цепи, соединяющей вершину $v \in V$ и инициирующее множество V^0, называется рангом *v*. Ясно, что если $v \in V^0$, то $\rho(v)=0$. По построению каждая вершина k-го слоя V^k орграфа содержит графовые вершины, имеющие один и тот же ранг $\rho(v)=k$.

Чтобы использовать подход, разработанный для частично упорядоченных множеств, каждому орграфу $\vec{G}(V^0) \in D(G)$ ставится в соответствие граф транзитивного замыкания (ГТЗ) $\vec{G}_t(V^0)=(V, \vec{\Gamma}_t)$ [3, 4]. Так как орграф $\vec{G}(V^0)$ ациклический и не имеет петель, его транзитивное замыкание $\vec{G}_t(V^0)$ есть граф строгого частичного порядка $(V,>)$. Далее не будем различать граф транзитивного замыкания $\vec{G}_t(V^0)$ и частично упорядоченное множество $(V,>)$. Поэтому рассмотрим, например, антицепи графа $\vec{G}_t(V^0)$.

Существует эффективный алгоритм для построения ГТЗ. Время работы такого алгоритма равно $O(n^3)$ [3, 5].

Дугу (v_i, v_j) графа $\vec{G}_t(V^0)$ будем называть существенной, если существует дуга (v_i, v_j) орграфа $\vec{G}(V^0)$. В противном случае дугу (v_i, v_j) будем называть фиктивной. Обозначим $v_i > v_j$ существенную дугу, а $v_i \gg v_j$ фиктивную дугу. Очевидно, что всякая фиктивная дуга графа $\vec{G}_t(V^0)$ определяет две независимые вершины орграфа $\vec{G}(V^0)$.

Пусть имеется частично упорядоченное множество $(A, \ge)$. Если $a \ge b$ или $b \ge a$, то элементы *a* и *b* из *A* называются сравнимыми. Если $a \ge b$ и $b \ge a$ не выполняются, то такая пара элементов называется несравнимой. Если $A_1 \subseteq A$ и каждая пара элементов из A_1 сравнима, то принято считать, что A_1 определяет цепь из $(A, \ge)$. Если $A_1 \subseteq A$ и каждая пара элементов из A_1 несравнима, то полагаем, что A_1 есть антицепь из $(A, \ge)$. Антицепь A_1 называется наибольшей в $(A, \ge)$, если $\mathrm{Card}(A_1) \ge \mathrm{Card}(A^*)$ для любой антицепи $A^* \subseteq A$ в $(A, \ge)$.

Частично упорядоченное множество $(A, \ge)$ разбито на цепи $A_1, \ldots, A_m$, если каждое A_i ($A_i \ne \varnothing$, $i=1,2,\ldots,m$) есть цепь, $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i = A$, и $A_i \cap A_j = \varnothing$, когда $i \ne j$ ($i, j \in \{1, \ldots, m\}$).

Разбиение множества $(A, \ge)$ на цепи называется наименьшим, если оно имеет наименьшее число элементов *m* по сравнению с другими разбиениями $(A, \ge)$ на цепи. Такое разбиение также называется минимальным цепным разбиением (МЦР) множества $(A, \ge)$.

Поскольку $\vec{G}_t(V^0)$ — граф строгого частичного порядка, можно найти МЦР $P = \{S_1, \ldots, S_p\}$. В общем случае это разбиение неоднозначно.

На рис. 2 представлен орграф, в котором показаны различные МЦР соответствующего ГТЗ. Дуги орграфа, принадлежащие цепям из МЦР, выделены жирными линиями. Здесь и далее полагаем, что дуги орграфа направлены снизу вверх.

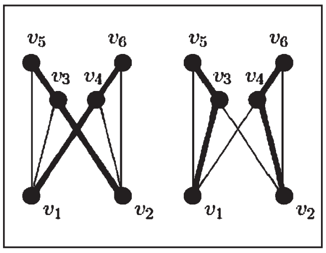

Рис. 2. Различные МЦР графа транзитивного замыкания

Пусть $V(S_q)$, $q = 1, 2, \ldots, p$, — множество вершин, принадлежащих цепи S_q МЦР P. Если вершины $v_i, v_j \in V(S_q)$ конечные для фиктивной дуги $v_i \gg v_j$, принадлежат одной и той же цепи S_q, то вершина v_j называется отмеченной. Множество всех отмеченных вершин из $\vec{G}_t(V^0)$ определяется найденным МЦР P (обозначим его $B(P)$) и будет различным для различных МЦР. Например, для МЦР P_1(см. рис. 2, *а*) имеем $B(P_1) = \{v_5, v_6\}$, а для МЦР P_2 (см. рис. 2, *б*) имеем $B(P_2) = \varnothing$.

Лемма 1. Пусть $\vec{G}(V^0)$ — орграф и $\vec{G}_t(V^0)$ — его граф транзитивного замыкания. Если $B(P) = \varnothing$, где P есть МЦР графа $\vec{G}_t(V^0)$, то наибольшая антицепь $\hat{U}$ является НБНМ графа $G \in L_n$ и МЦР определяет наименьшее кликовое разбиение G.

Если условия леммы 1 выполняются, то каждая цепь $S_q \in P$ есть клика орграфа $\vec{G}(V^0)$. Поэтому МЦР P — наименьшее кликовое разбиение.

С другой стороны, вершины наибольшей антицепи $\hat{U}$ графа $\vec{G}_t(V^0)$ принадлежат различным кликам, т.е. число вершин в НБНМ равно числу вершин во множестве $\hat{U}$. ■

Заметим, что лемма 1 может выполняться, если орграф $\vec{G}(V^0)$ не является транзитивно ориентируемым.

Очевидно, что любая антицепь $U \subset V$ графа транзитивного замыкания $\vec{G}_t(V^0)$ определяет множество независимых вершин орграфа $\vec{G}(V^0)$ и множество независимых вершин $U \subset V$ орграфа $\vec{G}(V^0)$ определяет антицепь графа $\vec{G}_t(V^0)$, если и только если никакие две вершины из U не принадлежат одной и той же ориентированной цепи $\vec{G}(V^0)$.

Множество независимых вершин $U \subset V$ называется распознаваемым орграфом $\vec{G}(V^0)$, если оно соответствует антицепи графа $\vec{G}_t(V^0)$.

НАСЫЩЕННЫЙ ОРГРАФ

Пусть имеется ациклический орграф $\vec{G}(V^0) = (V, \vec{\Gamma})$, $W \subset V$ — некоторое независимое множество вершин. Для орграфа $\vec{G}(V^0)$ определим унарную операцию сечения $\sigma_W(\vec{G}(V^0))$, которая состоит в переориентации всех дуг из $\vec{G}(V^0)$, входящих в вершины множества W. Результатом этой операции является также орграф $\vec{G}(Y^0)$, где $Y^0 = (V^0 \setminus \vec{\Gamma}^{-1}(W)) \cup W$. Здесь $\vec{\Gamma}^{-1}$ — отображение, обратное $\vec{\Gamma}$.

Теорема 1. Пусть имеется орграф $\vec{G}(V^0) \in D(G)$ и $W \subset V$ — некоторое его независимое множество вершин. Тогда орграф $\vec{G}(Y^0) = \sigma_W(\vec{G}(V^0))$ является также ациклическим, т.е. $\vec{G}(Y^0) \in D(G)$.

В самом деле, так как орграф $\vec{G}(V^0) = (V, \vec{\Gamma})$ ациклический, любая его часть — также ациклический орграф. Таким образом, ориентированный подграф $\vec{G}_1 = (V \setminus W, \vec{\Gamma}_1)$ ациклический.

Очевидно, что $\vec{G}_1 \subset \vec{G}(Y^0)$. Присоединим независимое множество вершин W к подграфу $\vec{G}_1$. Соединим каждую вершину $v \in W$ с вершиной y из $\vec{G}_1$ дугой (v, y), если и только если существует дуга (y, v) орграфа $\vec{G}(V^0)$. Очевидно, что полученный в результате орграф $\vec{G}(Y^0)$ будет также ациклическим.

Наконец, получим $\vec{G}(Y^0) \in D(G)$, так как любая переориентация дуг орграфа $\vec{G}(V^0)$ не изменяет независимости его вершин. ■

Пусть имеется орграф $\vec{G}(V^0) \in D(G)$ и его ГТЗ $\vec{G}_t(V^0)$. Найдем МЦР P этого графа с одновременным нахождением наибольшей антицепи $\hat{U}$, как это описано в [6]. В общем случае можем найти несколько различных наибольших антицепей.

Предположим, что антицепь $\hat{U}_1$ предшествует антицепи $\hat{U}_2$ в графе $\vec{G}_t(V^0)$ и обозначим $\hat{U}_1 \prec \hat{U}_2$, если для всех вершин $v \in \hat{U}_1 \setminus \hat{U}_2$ имеется вершина $y \in \hat{U}_2 \setminus \hat{U}_1$ такая, что $v < y$.

По методологии Форда и Фалкерсона, изложенной в [6], в ГТЗ $\vec{G}_t(V^0)$ можно найти наибольшую антицепь $\hat{U}$ такую, для которой любая другая наибольшая антицепь $\hat{U}_1$ является предшествующей, т.е. $\hat{U}_1 \prec \hat{U}_2$ для любой антицепи $\hat{U}_1$ графа $\vec{G}_t(V^0)$. Антицепь $\hat{U}$ графа $\vec{G}_t(V^0)$ будем называть генеральной.

В дополнение к генеральной антицепи можно найти другие наибольшие антицепи ГТЗ $\vec{G}_t(V^0)$, если они существуют. Так, для вершины $v \in V$ графа $\vec{G}_t(V^0)$ можно найти наибольшую антицепь $\hat{U}(v)$ такую, что $v \in \hat{U}(v)$. Чтобы найти антицепь $\hat{U}(v)$, достаточно в матрице смежности ГТЗ $\vec{G}_t(V^0)$, в которой найдено наибольшее число единиц в допустимых клетках (и расставлены метки согласно алгоритму Форда–Фалкерсона), к существующим меткам добавить метку * для строки, соответствующей вершине v, и выполнить цикл расстановки меток. В этом случае на первом шаге этого цикла отмечаются все столбцы, которые в строке, соответствующей вершине v, содержат единицы (в том числе и выбранную единицу). Ясно, что антицепь $\hat{U}(v)$ будет генеральной для вершины v, т.е. любая другая антицепь, содержащая вершину v, будет предшествовать этой антицепи.

Заметим, что в общем случае не для всякой вершины $v \in V$ графа $\vec{G}_t(V^0)$ существует наибольшая антицепь $\hat{U}(v)$. Например, пусть орграф, представленный на рис. 3, задает частично упорядоченное множество (как указано выше). Легко видеть, что вершины a_3, a_4, a_5 образуют наибольшую антицепь и в нем не существует наибольших антицепей $\hat{U}(a_1)$ и $\hat{U}(a_2)$.

Орграф $\vec{G}(V^0)$ будем называть насыщенным относительно инициирующего множества V^0, если в его графе $\vec{G}_t(V^0)$ любая существующая наибольшая антицепь $\hat{U}(v) \subset V$ есть МНМ орграфа $\vec{G}(V^0)$ и удовлетворяет соотношению $\mathrm{Card}\,(\hat{U}(v)) = \mathrm{Card}\,(V^0)$.

Ориентированный подграф $\vec{G}(V^k)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, орграфа $\vec{G}(V^0)$ будем называть насыщенным относительно инициирующего множества V^k, если в ГТЗ $\vec{G}_t(V^k)$ любая существующая наибольшая антицепь $\hat{U}(v) \subset V$ есть МНМ подграфа $\vec{G}(V^k)$ и удовлетворяет соотношению $\mathrm{Card}\,(\hat{U}(v)) = \mathrm{Card}\,(V^k)$. Очевидно, подграф $\vec{G}(V^m)$ не имеет дуг и поэтому всегда является насыщенным относительно инициирующего множества V^m.

Орграф $\vec{G}(V^0)$ называется вершинно-насыщенным (ВН-орграфом), если любой ориентированный подграф $\vec{G}(V^k)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, порожденный слоем V^k, является насыщенным относительно инициирующего множества V^k.

Заметим, что орграф, представленный на рис. 3, не является вершинно-насыщенным. В то же время орграф, представленный на рис. 4, вершинно-насыщенный и имеет НБНМ $\{v_1, v_2, v_7, v_8\}$.

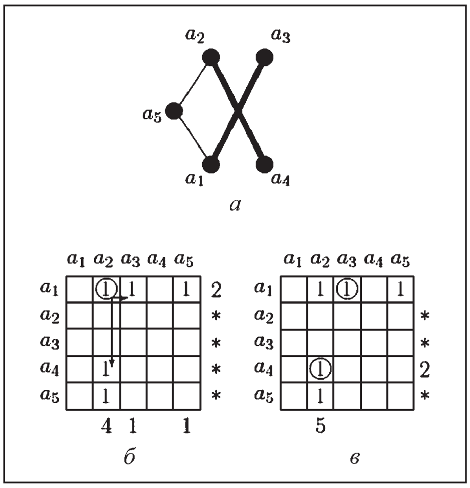

Рис. 3. Упорядоченное множество: орфграф *(а)*; матрицы смежности *(б, в)*

Пусть имеется некоторый орграф $\vec{G}(V^0)$. Чтобы построить ВН-орграф, используем следующий алгоритм.

Вход алгоритма — некоторый орграф $\vec{G}(V^0)$, а выход — орграф $\vec{G}(Y^0)$, насыщенный относительно каждого слоя Y^k, $k = 0, 1, \ldots, m$, и ГТЗ $\vec{G}_t(Y^0)$.

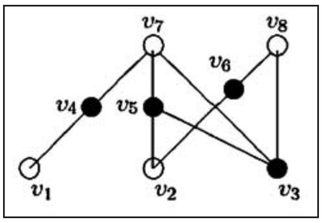

Рис. 4. Пример построения вершинно-насыщенного орграфа

Алгоритм построения ВН-орграфа

Шаг 1. Положить $k := 0$ и α:=false.

Шаг 2. Найти ГТЗ $\vec{G}_t(V^k)$.

Шаг 3. Построить МЦР графа $\vec{G}_t(V^k)$.

Шаг 4. Найти максимальную антицепь графа $\vec{G}_t(V^k)$ для каждой вершины $v \in V^k \cup \ldots \cup V^m$.

Шаг 5. Проверить, является ли каждая из найденных наибольших антицепей $\hat{U}(v)$ графа $\vec{G}_t(V^k)$ МНМ орграфа $\vec{G}(V^k)$ и $\mathrm{Card}(\hat{U}(v)) = \mathrm{Card}(V^k)$. Если это так, закончить построение орграфа $\vec{G}(V^k)$, насыщенного относительно инициирующего множества V^k. Перейти к шагу 6. В противном случае, если необходимо, дополнить найденную антицепь $\hat{U}(v)$ до МНМ W и построить новый ациклический орграф $\vec{G}(V^k)$ операцией сечения $\sigma_W(\vec{G}(V^0))$, положить α: = true и построить новый орграф $\vec{G}(V^0)$. Вернуться к шагу 2.

Шаг 6. Вычислить $k := k + 1$. Если $k < m$, то выделить ГТЗ $\vec{G}_t(V^k)$ из $\vec{G}_t(V^{k-1})$, сохраняя все цепи МЦР графа $\vec{G}_t(V^{k-1})$, которые инцидентны вершинам нового графа. Перейти к шагу 4. Если $k = m$ и α = true, то перейти к шагу 1. Если $k = m$ и α = false, то перейти к шагу 7.

Шаг 7. Закончить вычисления. ВН-орграф построен.

Покажем, что данный алгоритм действительно строит ВН-орграф.

Теорема 2. Пусть $\vec{G}(V^0)$ — орграф, построенный алгоритмом ВН-орграфа, $\vec{G}(V^k) = (Y_k, \vec{\Gamma})$, $k = 0, 1, \ldots, m$, — ориентированный подграф, порожденный слоем V^k орграфа $\vec{G}(V^0)$. Тогда для любой антицепи $U \subset Y_k \setminus V^k$ графа $\vec{G}_t(V^k) = (Y_k, \vec{\Gamma}_t)$ выполняется следующее соотношение: $\mathrm{Card}\,(V^k \cap \vec{\Gamma}_t^{-1} U) \geq \mathrm{Card}\,(U)$.

Предположим, что в ориентированном подграфе $\vec{G}(V^k)$ будет найдена антицепь $U \subset Y_k \setminus V^k$ графа $\vec{G}_t(V^k) = (Y_k, \vec{\Gamma}_t)$ такая, что $\mathrm{Card}\,(V^k \cap \vec{\Gamma}_t^{-1} U) < \mathrm{Card}\,(U)$. Построим множество $U^* = (V^k \setminus \vec{\Gamma}_t^{-1}(U)) \cup U$. Ясно, что это множество независимое в ориентированном подграфе $\vec{G}(V^k)$ и $\mathrm{Card}\,(U^*) > \mathrm{Card}\,(V^k)$.

Поскольку множество V^k есть антицепь ГТЗ $\vec{G}_t(V^k) = (Y_k, \vec{\Gamma}_t)$, множество $V^k \setminus \vec{\Gamma}_t^{-1}(U) \subset V$ является антицепью этого графа. Множество $U \subset Y_k \setminus V^k$ есть антицепь ГТЗ $\vec{G}_t(V^k)$ по условиям теоремы 2.

Очевидно, что $U \cap \vec{\Gamma}_t(V^k \setminus \vec{\Gamma}_t^{-1}(U)) = \varnothing$, поэтому множество U^* — антицепь ГТЗ $\vec{G}_t(V^k)$.

Таким образом, получено противоречие, поскольку ориентированный подграф $\vec{G}(V^k)$ построен алгоритмом ВН-орграфа и на шаге 5 антицепь U^* была бы обнаружена. Это доказывает справедливость теоремы 2.

Следствие 1. Орграф $\vec{G}(V^0)$, построенный алгоритмом ВН-орграфа, является вершинно-насыщенным.

Теорема 3. ВН-орграф можно построить за время $O(n^5)$.

Для однократного выполнения шагов 1–6 необходимо время, равное $O(n_k^3)$, где n_k — размер инициирующего множества в $\vec{G}(V^k)$. Полагая, что на каждой итерации указанного выше алгоритма наибольшая антицепь увеличивается на одну вершину, получаем время построения орграфа $\vec{G}(V^k)$ вершинно-насыщенного относительно своего инициирующего множества, равное $O(n_k^4)$.

Следовательно, время построения правильно построенного вершинно-насыщенного орграфа $\vec{G}(V^0)$ равно

$$\sum_{\forall n_k} O(n_k^4) = O(n^5). \ \blacksquare$$

Теорема 4. Пусть орграф $\vec{G}(V^0)$ есть вершинно-насыщенный. Тогда существует МЦР P графа $\vec{G}_t(V^0)$ такое, что его цепи содержат только существенные вершины.

Пусть $\vec{G}(V^0)$ — орграф, построенный алгоритмом ВН-орграфа. Согласно теореме 3 каждый двудольный орграф $G(V^k, V^{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, этого орграфа удовлетворяет теореме Холла и, следовательно, имеет паросочетание, которое насыщает каждую вершину множества V^{k+1}. ■

Следствие 2. Пусть $\vec{G}(V^0)$ есть ВН-орграф. Тогда каждая цепь МЦР P графа $\vec{G}_t(V^0)$ начинается в некоторой вершине v множества V^0.

Полученный результат позволяет в дальнейшем для нахождения МЦР графа $\vec{G}_t(V^0)$ использовать матрицу смежности ВН-орграфа $\vec{G}(V^0)$ как рабочую таблицу. Таким образом, далее полагаем, что цепи МЦР графа транзитивного замыкания ВН-орграфа находятся с использованием матрицы смежности орграфа, т.е. при построении каждого нового МЦР выбираем для его цепей только существенные дуги.

Разумеется, что при отыскании наибольших антицепей $\hat{U}(v)$ такого ГТЗ нужно использовать матрицу его смежности.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ НБНМ ГРАФА

Пусть построен ВН-орграф $\vec{G}(V^0)$, в котором имеется НБНМ $\hat{U}$ такое, что $\mathrm{Card}(\hat{U}) > \mathrm{Card}(V^0)$. Ясно, что тогда хотя бы одна из цепей графа транзитивного замыкания ВН-орграфа $\vec{G}(V^0)$ содержит фиктивную дугу, концевые вершины которой принадлежат НБНМ.

Пусть далее в ГТЗ $\vec{G}_t(V^0)$ найдена некоторая фиктивная дуга $v_i \gg v_j$. Удалим из орграфа $\vec{G}(V^0)$ вершины v_i, v_j, а также все смежные с ними вершины. В результате получим орграф $\vec{G}_1(V_1^0) = (V_1, \vec{\Gamma}_1)$, где $V_1 = V \setminus (\{v_i, v_j\} \cup \Gamma(v_i) \cup \Gamma(v_j))$, $V_1^0 = V^0 \setminus (\vec{\Gamma}^{-1}(v_i) \cup \vec{\Gamma}^{-1}(v_j))$, $\vec{\Gamma}_1 = \vec{\Gamma} \cap V_1$. Здесь $\Gamma(v) = \vec{\Gamma}(v) \cup \vec{\Gamma}^{-1}(v)$.

К орграфу $\vec{G}_1(V_1^0)$ применим алгоритм построения ВН-орграфа, в результате получим орграф $\vec{G}(Z^0)$, который назовем ВН-орграфом, порожденным удалением фиктивной дуги $v_i \gg v_j$.

Алгоритм поиска НБНМ орграфа $\vec{G}(V^0)$ построен на предположении, что справедлива следующая гипотеза.

Гипотеза 1. Пусть ВН-орграф $\vec{G}(V^0)$ имеет независимое множество U такое, что $\mathrm{Card}(U) > \mathrm{Card}(V^0)$. Тогда найдется фиктивная дуга $v_i \gg v_j$ такая, что в ВН-орграфе $\vec{G}(Z^0)$, порожденном удалением этой дуги, выполняется соотношение $\mathrm{Card}\,(Z^0) \geq \mathrm{Card}\,(V^0) - 1$.

Сформулированная гипотеза позволяет предложить разрешающий алгоритм для нахождения НБНМ графа $G \in L_n$. Входом алгоритма является неориентированный граф $G \in L_n$.

Алгоритм нахождения НБНМ

Шаг 1. Выполнить первоначальную ориентацию ребер графа $G \in L_n$ так, чтобы получить ациклический орграф $\vec{G}(V^0)$.

Шаг 2. Для орграфа $\vec{G}(V^0)$ выполнить алгоритм построения ВН-орграфа.

Шаг 3. В графе транзитивного замыкания ВН-орграфа найти неотмеченную фиктивную дугу $v_i \gg v_j$ и отметить ее как рассмотренную. Если все фиктивные дуги отмечены, то перейти к шагу 7.

Шаг 4. Из ВН-орграфа $\vec{G}(V^0)$ удалить вершины v_i, v_j, а также все смежные с ними вершины. В результате будет получен орграф $\vec{G}_1(V_1^0)$.

Шаг 5. Для орграфа $\vec{G}_1(V_1^0)$ выполнить алгоритм простоения ВН-орграфа. В результате будет получен орграф $\vec{G}(Z^0)$.

Шаг 6. Если $\mathrm{Card}\,(Z^0) \geq \mathrm{Card}\,(V^0) - 1$, то построить множество $W = Z^0 \cup \{v_i, v_j\}$ и в насыщенном орграфе $\vec{G}(V^0)$ выполнить операцию сечения $\sigma_W(\vec{G}(V^0))$. Перейти к шагу 2. В противном случае вернуться к шагу 3.

Шаг 7. Положить НБНМ $\hat{U} = V^0$.

Теорема 5. Если гипотеза 1 верна, то сформулированный алгоритм находит НБНМ графа $G \in L_n$.

Доказательство очевидно.

Теорема 6. Время работы алгоритма нахождения НБНМ равно $O(n^8)$.

Действительно, для однократного выполнения шагов 3–6 алгоритма нахождения НБНМ необходимо время, равное $O(n_1^5)$, где n_1 — число вершин в орграфе $\vec{G}(Z^0)$, порожденном удалением фиктивной дуги. Так как общее число фиктивных дуг равно $O(n^2)$, в худшем случае для выполнения шагов 3–6 необходимо время, равное $O(n^7)$. Если предположить, что после выполнения этих шагов найденное независимое множество V^0 увеличится на единицу, то общее время выполнения шагов 2–6 будет равно $O(n^8)$. ■

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для предлагаемого алгоритма автором была написана программа на Паскале, а Томасом Карбе (Thomas Karbe) из Берлинского технического университета — на языке Java (http://www.is.svitonline.com/plot/solver.html или http://www.vinnica.ua/~aplot/solver.html).

Длительное тестирование программ на случайных графах показало, что алгоритм работает стабильно и корректно. Кроме того, осуществлялась отладка программы на языке Java в работе с известными примерами. В табл. 1 приведены некоторые результаты вычислительного эксперимента, который был выполнен на ноутбуке (Toshiba Personal Computer, Intel Celeron M processor, 1.60 GHz, 736 ОЗУ, ОС Microsoft Windows XP Home Edition SP3).

Таблица 1

Название файла	Количество		Время решения, с	Название файла	Количество		Время решения, с
	вершин	ребер			вершин	ребер	
brock200_1.clq	200	14834	172971.438	c-fat500-10.clq	500	46627	2182.938
brock200_2.clq	200	9876	7513.078	hamming6-2.clq	64	1824	0.141
brock200_3.clq	200	12048	29699.031	hamming6-4.clq	64	704	2.375
c-fat200-1.clq	200	1534	23.312	hamming8-2.clq	256	31616	9.266
c-fat200-2.clq	200	3235	17.422	johnson8-2-4.clq	28	210	0.203
c-fat200-5.clq	200	8473	29.609	johnson8-4-4.clq	70	1855	76.421
c-fat500-1.clq	500	4459	29.609	johnson16-2-4.clq	120	5460	4731.469
c-fat500-2.clq	500	9139	711.125	keller4.clq	171	9435	17816.656
c-fat500-5.clq	500	23191	793.656	p_hat500-1.clq	500	31569	81801.313

Таким образом, предложенный алгоритм практически неконкурентен ввиду высокой степени полиномиальной оценки времени выполнения. Однако теоретически он важен, так как существует некоторая вероятность доказательства, что для NP-полных задач можно построить полиномиально-временной решающий алгоритм.

Полученные экспериментальные результаты подтверждают правильность выбранной методологии решения одной из наиболее трудных задач класса NP. Они также являются стимулом для более полного исследования свойств ВН-орграфов для доказательства выдвинутой гипотезы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
2. A compendium of NP optimization problems. — Stocholm: Royal Inst. of Technology, 1998. — 61 p.
3. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 454 с.
4. West D.B. Introduction to graph theory. — Englewood Cliffs (NJ): Prentice Hall, 1996. — 512 p.
5. Рейнгольд Э., Део Н. Комбинаторные алгоритмы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 476 с.
6. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях: Пер. с англ. — М.: Мир, 1966. — 276 с.

Поступила 10.11.2010
После доработки 16.04.2012