КИБЕРНЕТИКА

Ю.Н. СОТСКОВ, Н.М. МАТВЕЙЧУК

УДК 519.8

МЕРА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЗАДАЧИ БЕЛЛМАНА–ДЖОНСОНА С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ

Ключевые слова: *двустадийная система обслуживания, интервальные длительности, мера неопределенности.*

ВВЕДЕНИЕ

При оперативно-календарном планировании (ОКП) длительность операции может оставаться неизвестной вплоть до момента ее завершения, поэтому применение детерминированного метода [1, 2] для построения оптимальных расписаний выполнения множества операций малоэффективно. В научной литературе представлены различные методы решения оптимизационных задач с неопределенными параметрами [2–6]. Широкое распространение в теории расписаний получил стохастический метод [2, 7–12], использующий представление длительностей операций случайными величинами с известными законами распределения вероятностей. Если не удается определить распределения вероятностей длительностей операций, то для построения оптимальных (в том или ином смысле) расписаний применяются иные методы. В частности, в робастном методе [13–15] предпочтение отдается расписанию, исключающему потери при наихудшем сценарии. Метод, разработанный в [16–20], сочетает анализ устойчивости оптимальных расписаний (решений) [21–30] с уточнением реализуемого расписания по мере получения информации о выполненных на данный момент операциях [4, 18]. Известные методы решения неопределенных задач ОКП имеют различные области применения. Методы, эффективные для одного класса задач, могут оказаться малоэффективными для решения задач иного класса. От того, какой из методов выбран для решения задачи ОКП, зависят как качество построенного расписания, так и время, необходимое для его построения.

В настоящей статье предлагается использовать меру неопределенности задачи для выбора метода ее решения. В качестве примера рассматривается задача Беллмана–Джонсона [31] с длительностями операций, заданными интервалами возможных значений. Мера неопределенности задачи Беллмана–Джонсона основана на мощности минимального доминирующего множества перестановок обслуживаемых требований.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Каждое требование J_i из множества $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$, $n \geq 2$, необходимо обслужить вначале на приборе M_1, а затем — на приборе M_2. Длительность p_{ij} обслуживания требования $J_i \in \mathcal{J}$ на приборе $M_j \in \mathcal{M} = \{M_1, M_2\}$ может оставаться неизвестной вплоть до момента завершения обслуживания требования J_i на приборе M_j и может оказаться равной любому действительному числу из заданного отрезка $[p_{ij}^L, p_{ij}^U]$, $0 < p_{ij}^L \leq p_{ij}^U$. В задаче требуется найти перестановку π_k обслуживания требований $\mathcal{J}$, минимизирующую длину расписания (общее время обслуживания требований $\mathcal{J}$):

$$C_{\max} = \min_{\pi_k \in S} C_{\max}(\pi_k) = \min_{\pi_k \in S} \{\max\{C_i(\pi_k) \mid J_i \in \mathcal{J}\}\}.$$

Здесь и далее $C_i(\pi_k)$ обозначает момент завершения обслуживания требования $J_i \in \mathcal{J}$ при расписании π_k обслуживания требований $\mathcal{J}$, а $S = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n!}\}$ — множество всех перестановок $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n})$ обслуживания требований $\mathcal{J} = \{J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n}\}$. В трехпозиционной классификации $\alpha \mid \beta \mid \gamma$ задач теории расписаний [32] для сформулированной задачи используется обозначение $F2 \mid p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \mid C_{\max}$.

Пусть T — множество $2n$-мерных неотрицательных действительных векторов $p = (p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{n,1}, p_{n,2}) \in R_+^{2n}$ возможных длительностей операций (сценариев):

$$T = \{p \mid p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U,\ J_i \in \mathcal{J},\ M_j \in \mathcal{M}\}. \tag{1}$$

Поскольку фактически реализуемый сценарий $p \in T$ может быть неизвестным вплоть до момента завершения обслуживания требований $\mathcal{J}$, то и моменты $C_i = C_i(\pi_k)$ завершения обслуживания всех требований $J_i \in \mathcal{J}$ нельзя определить до реализации расписания π_k. Однако, прежде чем реализовать расписание, его надо как-то построить. Поэтому задача $F2 \mid p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \mid C_{\max}$ поиска перестановки π_k с минимальным общим временем обслуживания требований $\mathcal{J}$ является неопределенной (значение целевой функции $\gamma = \min_{\pi_k \in S} C_{\max}(\pi_k)$ для перестановки $\pi_k \in S$ нельзя определить на этапе построения расписания).

Если сценарий $p \in T$ зафиксирован для неопределенной задачи $F2 \mid p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \mid C_{\max}$, то получается детерминированная задача Беллмана–Джонсона, обозначаемая $F2 \| C_{\max}$. Оптимальную перестановку $\pi_i = (J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_n}) \in S$ для задачи $F2 \| C_{\max}$ можно построить за время $O(n \log n)$, используя соотношения Джонсона (2). Если для пары требований J_k и J_m, $1 \le k < m \le n$, выполняется соотношение

$$\min\{p_{i_k 1}, p_{i_m 2}\} \le \min\{p_{i_m 1}, p_{i_k 2}\}, \tag{2}$$

то перестановка π_i является оптимальной для задачи $F2 \| C_{\max}$ [31]. Перестановку π_i называют перестановкой Джонсона.

ОБЗОР МЕТОДОВ И РЕЗУЛЬТАТОВ

Для неопределенной задачи $\alpha \mid p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \mid \gamma$ в общем случае не существует расписания, которое оставалось бы оптимальным для всех сценариев из множества T. Поэтому вводится дополнительный критерий, позволяющий определить, что следует понимать под решением неопределенной задачи $\alpha \mid p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \mid \gamma$. Например, в [13–15] исследовалось робастное расписание, которое минимизирует абсолютное или относительное отклонение от оптимума при наихудшем из возможных сценариев. Предполагается, что множество T содержит либо континуум сценариев (согласно равенству (1)), либо конечное число r сценариев:

$$T = \{p^j = (p_{1,1}^j, p_{1,2}^j, \dots, p_{n,1}^j, p_{n,2}^j) \mid p^j \in R_+^{2n},\ j \in \{1, 2, \dots, r\}\}.$$

Для сценария $p \in T$ пусть γ_p^t обозначает оптимальное значение целевой функции $\gamma = f(C_1, C_2, \dots, C_n)$, которое получается для детерминированной задачи $\alpha \| \gamma$ в результате фиксации сценария p. Перестановка $\pi_t \in S$ оптимальна для задачи $\alpha \| \gamma$, если

$$f(C_1(\pi_t, p), \dots, C_n(\pi_t, p)) = \gamma_p^t = \min_{\pi_k \in S} \gamma_p^k = \min_{\pi_k \in S} f(C_1(\pi_k, p), \dots, C_n(\pi_k, p)).$$

Для перестановки $\pi_k \in S$ и сценария $p \in T$ разность $\gamma_p^k - \gamma_p^t = r(\pi_k, p)$ определяет потери целевой функции при обслуживании требований в соответствии с перестановкой π_k. Величина $Z(\pi_k) = \max \{r(\pi_k, p) \mid p \in T\}$ определяет абсолютные потери при наихудшем сценарии для перестановки π_k. Относительные потери при наихудшем сценарии определяются как $Z'(\pi_k) = \max \{r(\pi_k, p) / \gamma_p^t \mid p \in T\}$, $\gamma_p^t \neq 0$. В [13, 15] исследовалась задача $1 \mid p_i^L \leq p_i \leq p_i^U \mid \sum C_i$ минимизации суммарного времени обслуживания n требований на одном приборе. При фиксированном сценарии $p \in T$ возникает детерминированная задача $1 \| \sum C_i$, которая решается за время $O(n \log n)$ согласно следующему правилу кратчайшей операции [33]: требования множества $\mathcal{J}$ должны обслуживаться в порядке неубывания своих длительностей. В [13] (а также в [15]) установлено, что задача нахождения перестановки $\pi_t \in S$, минимизирующей абсолютные потери $Z(\pi_t)$ (относительные потери $Z'(\pi_k)$) для задачи $1 \mid p_i^L \leq p_i \leq p_i^U \mid \sum C_i$, является NP-трудной даже для двух сценариев, $r = 2$.

Аналогично различаются по сложности детерминированная и неопределенная задачи Беллмана–Джонсона. Задача $F2 \| C_{\max}$ решается за время $O(n \log n)$, а задача минимизации абсолютных потерь $Z(\pi_t)$ для задачи $F2 \mid p_{ij}^L \leq p_{ij} \leq p_{ij}^U \mid C_{\max}$ является NP-трудной для двух сценариев [14].

Вторая часть работы [2] посвящена стохастическому методу, позволяющему минимизировать математическое ожидание целевой функции при обслуживании требований со случайными длительностями операций. Для задачи Беллмана–Джонсона в стохастической постановке известен следующий результат [12]. Если длительность p_{i1} обслуживания требования $J_i \in \mathcal{J}$ на приборе M_1 задана случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с интенсивностью λ_i, а длительность p_{i2} обслуживания требования J_i на приборе M_2 — случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с интенсивностью μ_i, то для минимизации математического ожидания $C_{\max}$ достаточно обслуживать требования $J_i \in \mathcal{J}$ в порядке невозрастания разностей $\lambda_i - \mu_i$.

В [11] доказано следующее утверждение. Если длительность p_{ij} обслуживания требования $J_i \in \mathcal{J}$ на приборе $M_j \in \mathcal{M}$ задана случайной величиной, распределенной по геометрическому закону с параметром τ_{ij}, $0 < \tau_{ij} < 1$, то для минимизации математического ожидания $C_{\max}$ достаточно обслуживать требования $J_i \in \mathcal{J}$ в порядке невозрастания отношений $\dfrac{1-\tau_{i1}}{1-\tau_{i2}}$.

Если длительности операций по обслуживанию требований $\mathcal{J}$ представляются нечеткими интервалами с заданными функциями принадлежности, то для решения неопределенной задачи $\alpha \mid p_{ij}^L \leq p_{ij} \leq p_{ij}^U \mid \gamma$ используется метод нечеткой логики. Для задачи Беллмана–Джонсона с нечеткими длительностями операций установлено [34], что оптимальное упорядочение требований множества $\mathcal{J}$ может быть основано на нечетком аналоге соотношений Джонсона (2).

Если не вводится дополнительный критерий, определяющий решение неопределенной задачи (как в робастном методе), причем неизвестен закон распределения вероятностей длительностей операций на отрезке $[p_{ij}^L, p_{ij}^U]$ (стохастический метод) и не известна функция принадлежности длительностей операций на нечетком отрезке $[p_{ij}^L, p_{ij}^U]$ (метод нечеткой логики), то для решения задачи $\alpha \mid p_{ij}^L \leq p_{ij} \leq p_{ij}^U \mid \gamma$ можно использовать метод, основанный на устойчивости оптимальных расписаний [4, 16, 17]. Этот метод включает построение минимального доминирующего множества $S(T)$ перестановок обслуживаемых требований [4, 16, 17, 19, 20] и поэтапное выделение расписания из множества $S(T)$ по мере получения информации о длительностях обслуженных требований [4, 18].

Минимальное доминирующее множество $S(T)$ исследовалось в работах [4, 16, 17, 35, 36] для критерия $C_{\max}$ и в работах [4, 20, 35, 37] для критерия $\sum C_i$. В [37] для задачи $Fm|\, p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \,|\sum C_i$ найдены достаточные условия, при выполнении которых перестановка требований $\mathcal{J}$ минимизирует суммарное время их обслуживания на двух ($m=2$) или трех ($m=3$) приборах. В [35] аналогичные условия получены для задачи $F2|\, p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \,|\gamma$ с критериями $\gamma = C_{\max}$ и $\gamma = \sum C_i$ в предположении, что длительности операций заранее известны, а длительности переналадок приборов заданы интервалами возможных значений. В [36] для задачи $F2|\, p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \,|C_{\max}$ установлены достаточные условия, при выполнении которых можно зафиксировать порядок пары требований во множестве $S(T)$. Для задачи $Jm|\, p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \,|\sum C_i$ с различными технологическими маршрутами в [20] разработаны точные и приближенные алгоритмы на основе смешанных графов.

Определение 1. Множество $S(T) \subseteq S$ называется минимальным доминирующим множеством для задачи $F2|\, p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \,|C_{\max}$, если для любого сценария $p \in T$ во множестве $S(T)$ содержится перестановка Джонсона для детерминированной задачи $F2||C_{\max}$ со сценарием p, причем ни одно собственное подмножество множества $S(T)$ таким свойством не обладает.

Для введения меры неопределенности задачи $F2|\, p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \,|C_{\max}$ потребуются результаты, доказанные в [36]. Рассмотрим разбиение $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \cup \mathcal{J}_1 \cup \cup \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}^*$, определяющее следующие подмножества множества $\mathcal{J}$:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{J}_0 = \{J_i \in \mathcal{J} \mid p_{i1}^U \le p_{i2}^L,\, p_{i2}^U \le p_{i1}^L\} = \{J_i \in \mathcal{J} \mid p_{i1}^U = p_{i2}^L = p_{i2}^U = p_{i1}^L = p_i\},\\
\mathcal{J}_1 = \{J_i \in \mathcal{J} \mid p_{i1}^U \le p_{i2}^L,\, p_{i2}^U > p_{i1}^L\} = \{J_i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0 \mid p_{i1}^U \le p_{i2}^L\},\\
\mathcal{J}_2 = \{J_i \in \mathcal{J} \mid p_{i1}^U > p_{i2}^L,\, p_{i2}^U \le p_{i1}^L\} = \{J_i \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0 \mid p_{i2}^U \le p_{i1}^L\},\\
\mathcal{J}^* = \{J_i \in \mathcal{J} \mid p_{i1}^U > p_{i2}^L,\, p_{i2}^U > p_{i1}^L\}.
\end{gathered} \tag{3}
$$

Теорема 1 [36]. Одноэлементное доминирующее множество $S(T)$, $|S(T)|=1$, существует для задачи $F2|\, p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \,|C_{\max}$ тогда и только тогда, когда для любой пары требований J_i и J_j из множества $\mathcal{J}_1$ (из множества $\mathcal{J}_2$) выполняется неравенство $p_{i1}^U \le p_{j1}^L$ или $p_{j1}^U \le p_{i1}^L$ (неравенство $p_{i2}^U \le p_{j2}^L$ или $p_{j2}^U \le p_{i2}^L$); выполняется неравенство $|\mathcal{J}^*| \le 1$; для любого требования $J_{i^*} \in \mathcal{J}^*$ (если $\mathcal{J}^* \ne \varnothing$) выполняются неравенства $p_{i^*1}^L \ge \max\{p_{i1}^U \mid J_i \in \mathcal{J}_1\}$, $p_{i^*2}^L \ge \max\{p_{j2}^U \mid J_j \in \mathcal{J}_2\}$ и неравенство $\max\{p_{i^*1}^L, p_{i^*2}^L\} \ge p_k$ для любого требования $J_k \in \mathcal{J}_0$.

Теорема 2 [36]. Для существования минимального доминирующего множества $S(T)$ для задачи $F2|\, p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \,|C_{\max}$, во всех перестановках которого порядок требований $J_v \in \mathcal{J}$ и $J_w \in \mathcal{J}$ одинаковый (J_v предшествует J_w), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$p_{v1}^U \le p_{v2}^L \quad \text{и} \quad p_{v1}^U \le p_{w1}^L \tag{4}$$

или

$$p_{w2}^U \le p_{w1}^L \quad \text{и} \quad p_{w2}^U \le p_{v2}^L. \tag{5}$$

Теорема 3 [36]. Выполняется $S(T) = S$, если

$$\max\{p_{ik}^L \mid J_i \in \mathcal{J},\, M_k \in \mathcal{M}\} < \min\{p_{ik}^U \mid J_i \in \mathcal{J},\, M_k \in \mathcal{M}\}. \tag{6}$$

Теорема 4 [36]. Если (6) выполняется, то для каждой перестановки $\pi_k \in S$ найдется сценарий $p \in T$, при котором π_k — единственная перестановка Джонсона.

Мощность $|S(T)|$ минимального доминирующего множества характеризует неопределенность задачи $F2|p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U|C_{\max}$. В частности если $|S(T)|=1$, то неопределенность задачи не влияет на ее решение, поскольку такая задача $F2|p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U|C_{\max}$ может быть решена точно, как и ее детерминированный аналог — задача $F2||C_{\max}$. Действительно, пусть $S(T)=\{\pi_k\}$, тогда решением задачи $F2|p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U|C_{\max}$ является перестановка π_k, оптимальная при любом сценарии $p \in T$. Перестановку π_k можно построить за $O(n \log n)$ элементарных действий, используя приведенное в [36] конструктивное доказательство теоремы 1. Наибольшая неопределенность задачи $F2|p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U|C_{\max}$ достигается, когда $|S(T)|=n!$. В силу теорем 3 и 4 в таком случае любая перестановка $\pi_k \in S = S(T)$ может оказаться единственной перестановкой Джонсона для детерминированной задачи $F2||C_{\max}$, порожденной неопределенной задачей $F2|p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U|C_{\max}$ в результате фиксации сценария $p \in T$.

Пусть Ω — множество всех индивидуальных задач $F2|p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U|C_{\max}$. Рассмотрим отображение $\varphi:\Omega \to R_+^1$, где

$$\varphi(z) = 1 - \frac{n! - |S(T)|}{n! - 1}, \quad z \in \Omega. \tag{7}$$

Для того чтобы величину $\varphi(z)$ можно было называть мерой неопределенности задачи $z \in \Omega$, необходимо, чтобы отображение $\varphi:\Omega \to R_+^1$ было вполне аддитивной неотрицательной функцией. Нетрудно видеть, что неравенство $\varphi(z) \ge 0$ выполняется для всех задач $z \in \Omega$. Аддитивность отображения $\varphi:\Omega \to R_+^1$ можно обеспечить, полагая, что если в последовательности задач

$$z_1 \in \Omega, z_2 \in \Omega, \ldots, z_k \in \Omega, \ldots, \tag{8}$$

отрезки $[p_{ij}^L, p_{ij}^U]$ возможных длительностей операций разных задач попарно не пересекаются, то мера неопределенности задач последовательности (8) равна сумме $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(z_i)$.

Остается проверить однозначность отображения $\varphi:\Omega \to R_+^1$, заданного в (7). К сожалению, на всем множестве Ω отображение $\varphi:\Omega \to R_+^1$ функцией не является, поскольку для задачи $F2|p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U|C_{\max}$ может существовать несколько минимальных (по включению) доминирующих множеств. Поэтому $\varphi(z)$ можно рассматривать как меру неопределенности задачи $z \in \Omega$, если мощность минимального доминирующего множества для задачи z определена однозначно. Наименьшее значение такой меры, $\varphi(z)=0$, достигается, когда для задачи $z \in \Omega$ имеет место равенство $|S(T)|=1$, т.е. $\{\pi_k\}=S(T)$. В этом случае перестановка π_k является решением детерминированного аналога задачи $z \in \Omega$ при любом сценарии $p \in T$. Характеризация задач $F2|p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U|C_{\max}$ с нулевой мерой $\varphi(z)$ дана в теореме 1.

Для индивидуальной задачи $z \in \Omega$ наибольшее значение $\varphi(z)=1$ достигается, когда для этой задачи имеет место равенство $|S(T)|=n!$. Характеризация задач $F2|p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U|C_{\max}$ с единичной мерой $\varphi(z)$ дана в теореме 3.

Кроме того, что отображение $\varphi:\Omega \to R_+^1$ является функцией не на всем множестве задач Ω, для вычисления значения $\varphi(z)$ может потребоваться большой объем времени. Действительно, поскольку мощность множества $S(T)$ для различных задач $z \in \Omega$ может принимать натуральные значения от 1 (теорема 1) до $n!$ (теорема 3), то за полиномиальное время невозможно перечислить все перестановки множества $S(T)$.

В следующем разделе вводится мера неопределенности задачи $F2 \,|\, p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \,|\, C_{\max}$, использующая представление минимальных доминирующих множеств в виде орграфа отношения доминирования на множестве $\mathcal{J}$. Такая мера характеризует как неопределенность, так и сложность задачи $z \in \Omega$. Она вычисляется за полиномиальное время, и область ее определения совпадает со всем множеством задач Ω.

МЕРА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ

Используя теорему 2, можно получить компактное представление минимальных доминирующих множеств для задачи $F2 \,|\, p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \,|\, C_{\max}$ в виде орграфа $\mathcal{G} = (\mathcal{J}, \mathcal{A})$ с множеством вершин $\mathcal{J}$ и множеством дуг $\mathcal{A}$. Для этого достаточно проверить выполнение условий (4) и (5) теоремы 2 для каждой пары требований J_u и J_v из множества $\mathcal{J}$ и построить орграф $\mathcal{G} = (\mathcal{J}, \mathcal{A})$ отношения доминирования на множестве $\mathcal{J}$, полагая, что дуга (J_u, J_v) принадлежит множеству $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (4) или (5). В отличие от минимального доминирующего множества $S(T)$ орграф $\mathcal{G}$ определен однозначно для любой задачи $z \in \Omega$, причем для построения орграфа $\mathcal{G}$ требуется $O(n^2)$ элементарных действий.

Рассмотрим отображение $\mu : \Omega \to R_+^1$, где

$$\mu(z) = 1 - \frac{|\mathcal{A}|}{n(n-1)}, \quad z \in \Omega. \tag{9}$$

Из единственности орграфа $\mathcal{G} = (\mathcal{J}, \mathcal{A})$ для любой задачи $z \in \Omega$ следует, что отображение $\mu : \Omega \to R_+^1$ является функцией. Нетрудно убедиться и в том, что эта функция неотрицательная и вполне аддитивная (аддитивность обеспечивается так же, как и аддитивность отображения $\varphi(z)$, определенного в (7)). Таким образом, функцию $\mu(z)$ можно рассматривать как меру неопределенности задачи $F2 \,|\, p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \,|\, C_{\max}$. Величина $\mu(z)$ характеризует не только неопределенность задачи $z \in \Omega$, но и сложность ее решения методом, основанным на устойчивости оптимальных расписаний [18]. Для задачи $z \in \Omega$ наибольшего значения $\mu(z) = 1$ мера $\mu(z)$ достигает, когда для задачи z имеет место равенство $|S(T)| = n!$, т.е. когда множество дуг орграфа $\mathcal{G}$ пусто: $|\mathcal{A}| = 0$. В таком случае минимальное доминирующее множество задачи $z \in \Omega$ имеет максимальную мощность и, следовательно, $\mu(z) = 1 = \varphi(z)$.

Нулевому значению отображения $\varphi(z)$ соответствует значение $\mu(z) = 0.5$ меры неопределенности $\mu(z)$. В этом случае для индивидуальной задачи $z \in \Omega$ выполняется равенство $|S(T)| = 1$, т.е. минимальное доминирующее множество для задачи $z \in \Omega$ содержит точно один элемент: $\{\pi_k\} = S(T)$, а перестановка π_k является решением детерминированного аналога $F2 \,||\, C_{\max}$ задачи $z \in \Omega$ при любом сценарии $p \in T$. Для задачи $z \in \Omega$ нулевое значение меры $\mu(z)$ достигается при максимальной мощности множества дуг $\mathcal{A}$: $|\mathcal{A}| = n(n-1)$, т.е. когда орграф $\mathcal{G}$ является полным. Для такой задачи $z \in \Omega$ любая перестановка $\pi_k \in S$ оптимальная, что имеет место, например, при равенстве $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0$.

МЕРА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЗАДАЧИ ПРИ УСЛОВИИ $\mathcal{J}_0 = \varnothing$

В общем случае бинарное отношение $\mathcal{A}$, заданное на множестве $\mathcal{J}$ орграфом $\mathcal{G} = (\mathcal{J}, \mathcal{A})$, не является транзитивным, причем орграф $\mathcal{G}$ может содержать контуры. В [38] доказаны следующие утверждения.

Теорема 5 [38]. Если $\mathcal{J}_0 = \varnothing$, то отношение $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{J} \times \mathcal{J}$ транзитивно.

Теорема 6 [38]. Орграф $\mathcal{G}=(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ не содержит контуров тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{J}=\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}^*$ не содержит требований $J_i \in \mathcal{J}_k$ и $J_j \in \mathcal{J}_k$, $k \in \{1, 2\}$, для которых

$$p_{ik}^L = p_{ik}^U = p_{jk}^L = p_{jk}^U. \qquad (10)$$

Пусть $\mathcal{J}=\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}^*$. Определим отношение $\mathcal{A}_{\prec} \subseteq \mathcal{J} \times \mathcal{J}$ на множестве $\mathcal{J}$.

Определение 2. Если $(J_v, J_w) \in \mathcal{A}$ и $(J_w, J_v) \notin \mathcal{A}$, то $J_v \prec J_w$. Если $(J_v, J_w) \in \mathcal{A}$, $(J_w, J_v) \in \mathcal{A}$ и $v < w$, то $J_v \prec J_w$ и $J_w \not\prec J_v$.

Если $\mathcal{J}_0 = \varnothing$, то отношение $\mathcal{A}_{\prec}$ является отношением строгого порядка на множестве $\mathcal{J}$. Строгий порядок $\mathcal{A}_{\prec}$ определяет орграф доминирования $\mathcal{G}=(\mathcal{J}, \mathcal{A}_{\prec})$ с множеством вершин $\mathcal{J}$ и множеством дуг $\mathcal{A}_{\prec}$. Если выполняются равенства (10), то определим следующую меру неопределенности $\eta : \Omega \to R_+^1$ задачи $F2 \,|\, p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U \,|\, C_{\max}$:

$$\eta(z) = 1 - \frac{2\,|\,\mathcal{A}_{\prec}\,|}{n(n-1)}, \quad z \in \Omega. \qquad (11)$$

Требования $J_i \in \mathcal{J}$ и $J_j \in \mathcal{J}$ будем называть конфликтными, если ни одно из отношений $J_i \preceq J_j$ или $J_j \preceq J_i$ для требований J_i и J_j не выполняется. Орграф доминирования $\mathcal{G}=(\mathcal{J}, \mathcal{A}_{\prec})$ определяет множество всех перестановок $\Pi(G)$ требований $\mathcal{J}$, удовлетворяющих строгому порядку $\mathcal{A}_{\prec}$.

Теорема 7 [38]. Пусть $\mathcal{J}=\mathcal{J}^* \cup \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$. Для любого вектора $p \in T$ множество $\Pi(\mathcal{G})$ содержит перестановку Джонсона для задачи $F2\,||\,C_{\max}$ со сценарием p.

Лемма 1 [38]. Пусть $\mathcal{J}=\mathcal{J}^* \cup \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$. Перестановка вида $\pi_g = (\ldots, J_i, \ldots \ldots, J_r, \ldots, J_j, \ldots) \in \Pi(\mathcal{G})$ является избыточной перестановкой типа I (см. [38]), если для пары требований $J_i \in \mathcal{J}_k$ и $J_j \in \mathcal{J}_k$, $k \in \{1, 2\}$, выполняются равенства (10) и требование J_r составляет конфликтные пары как с требованием J_i, так и с требованием J_j.

Пусть $J_j \in \mathcal{J}^*$. Определим следующие подмножества множества $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J}'_j = \{J_q \in \mathcal{J}_2 \mid \min\{p_{j1}^U, p_{j2}^U\} < p_{q2}^U\} \cup \{J_r \in \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}^* \mid \min\{p_{j1}^U, p_{j2}^U\} \le p_{r1}^L\}; \qquad (12)$$

$$\mathcal{J}''_j = \{J_w \in \mathcal{J}_1 \mid \min\{p_{j1}^U, p_{j2}^U\} < p_{w1}^U\} \cup$$
$$\cup \{J_u \in \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}^* \mid \min\{p_{j1}^U, p_{j2}^U\} \le p_{u2}^L\}. \qquad (13)$$

Лемма 2 [38]. Пусть $\mathcal{J}=\mathcal{J}^* \cup \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$. Если $J_j \in \mathcal{J}^*$, $J_q \in \mathcal{J}'_j$, $J_w \in \mathcal{J}''_j$, то перестановка вида $\pi_g = (\ldots, J_q, \ldots, J_j, \ldots, J_w, \ldots) \in \Pi(\mathcal{G})$ является избыточной перестановкой типа II.

Лемма 3 [38]. Пусть $\mathcal{J}=\mathcal{J}^* \cup \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$. Если перестановка $\pi_t \in \Pi(\mathcal{G})$ является избыточной, то π_t — избыточная перестановка либо типа I, либо типа II (см. [38]).

В результате удаления из множества $\Pi(G)$ избыточных перестановок типа I и типа II получается множество неизбыточных перестановок $\Pi^*(G) \subseteq \Pi(G)$.

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ МИНИМАЛЬНОГО ДОМИНИРУЮЩЕГО МНОЖЕСТВА

Докажем необходимое и достаточное условие единственности множества $S(T)$ в случае пустого подмножества $\mathcal{J}_0$.

Теорема 8. Пусть $\mathcal{J}=\mathcal{J}^* \cup \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$. Множество $\Pi(\mathcal{G})$ содержит единственное минимальное доминирующее множество $S(T) = \Pi^*(\mathcal{G})$ тогда и только тогда, когда не существует требований $J_i \in \mathcal{J}^*$, $J_j \in \mathcal{J}^*$ и $J_k \in \mathcal{J}$, для которых выполняется хотя бы одно из условий:

$$\max\{p_{i2}^L, p_{j2}^L\} < p_{i1}^L = p_{i1}^U = p_{j1}^L = p_{j1}^U < \min\{p_{i2}^U, p_{j2}^U\}, \tag{14}$$

$$J_k \in \{J_w \in \mathcal{J}_1 \mid p_{j1}^U < p_{w1}^U\} \cup \{J_w \in \mathcal{J}^* \cup \mathcal{J}_2 \mid p_{j1}^U \le p_{w2}^L\};$$

$$\max\{p_{i1}^L, p_{j1}^L\} < p_{i2}^L = p_{i2}^U = p_{j2}^L = p_{j2}^U < \min\{p_{i1}^U, p_{j1}^U\}, \tag{15}$$

$$J_k \in \{J_q \in \mathcal{J}_2 \mid p_{j2}^U < p_{q2}^U\} \cup \{J_q \in \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}^* \mid p_{j2}^U \le p_{q1}^L\}.$$

Доказательство. Необходимость условия теоремы докажем методом от противного. Пусть $S(T) = \Pi^*(G)$, однако существуют требования $J_i \in \mathcal{J}^*$, $J_j \in \mathcal{J}^*$ и $J_k \in \mathcal{J}$, для которых выполняется условие (14). (Случай, когда для требований $J_i \in \mathcal{J}^*$, $J_j \in \mathcal{J}^*$ и $J_k \in \mathcal{J}$ выполняется условие (15), рассматривается аналогично.)

Из условия (14) с учетом определений (12) и (13) следуют включения $J_i \in \mathcal{J}'_i$, $J_j \in \mathcal{J}'_i$, $J_k \in \mathcal{J}''_i$ и $J_k \in \mathcal{J}''_j$. Согласно лемме 2 как перестановки вида $\pi_u = (\ldots, J_i, \ldots, J_j, \ldots, J_k, \ldots)$, так и перестановки вида $\pi_v = (\ldots, J_j, \ldots, J_i, \ldots$ $\ldots, J_k, \ldots)$ являются избыточными перестановками типа II: $\pi_u \notin \Pi^*(G)$, $\pi_v \notin \Pi^*(G)$. Для любого минимального доминирующего множества $S(T) \subseteq \Pi(G)$ имеет место включение $\Pi^*(G) \subseteq S(T)$ (поскольку все неизбыточные перестановки с необходимостью входят в любое минимальное доминирующее множество).

Рассмотрим сценарий $p \in T$ со следующими длительностями операций: $p_{i1} = p_{j1} = p_{j1}^U$, $p_{i2} = p_{i2}^U$, $p_{j2} = p_{j2}^U$, $p_{k1} = p_{k1}^U$, $p_{k2} = p_{k2}^U$. Остальные компоненты вектора p могут принимать любые допустимые значения. Нетрудно видеть, что для такого сценария p все перестановки Джонсона во множестве $\Pi(G)$ имеют вид π_u или π_v, а множество $\Pi^*(G)$ не содержит перестановок Джонсона для такого сценария. Следовательно, кроме множества $\Pi^*(G)$, любое минимальное доминирующее множество $S(T) \subseteq \Pi(G)$ должно содержать перестановки вида π_u и (или) π_v, т.е. $\Pi^*(G) \subseteq S(T)$. Покажем, что множество $\Pi(G)$ должно содержать несколько минимальных доминирующих множеств. Рассмотрим произвольное множество $S(T) \subseteq \Pi(G)$ (такое множество существует в силу теоремы 7). Множество $S(T)$ содержит перестановки вида π_u и (или) π_v. Пусть оно содержит хотя бы одну перестановку вида π_v, а именно перестановку $\pi'_v = (s_1, J_j, s_2, J_i, s_3) \in S(T)$, где $J_k \in \{s_3\}$. Поместив в этой перестановке требование $J_i \in \mathcal{J}^*$ непосредственно перед требованием $J_j \in \mathcal{J}^*$, получим перестановку $\pi''_v = (s_1, J_i, J_j, s_2, s_3)$ вида π_u. Докажем включение $\pi''_v \in \Pi(G)$. Действительно, если существует требование $J_s \in \{s_2\}$, для которого $J_s \prec J_i$, то в силу (14) должны выполняться неравенства $p_{s1}^U \le p_{s2}^L$ и $p_{s1}^U \le p_{i1}^L$. Поскольку $p_{i1}^L = p_{j1}^L$, то $J_s \prec J_j$. Следовательно, $\pi'_v \notin \Pi(G)$.

Рассмотрим произвольный сценарий $p' \in T$, при котором перестановка π'_j является перестановкой Джонсона. Для компонент вектора p' для любого требования $J_q \in \{s_1\}$ и любого требования $J_w \in \{s_3\}$ соотношение Джонсона (2) должно выполняться, если либо $i_k = q$, $i_m = i$, либо $i_k = q$, $i_m = j$, либо $i_k = i$, $i_m = w$, либо $i_k = j$, $i_m = w$. Также должно выполняться соотношение $p'_{i1} = p'_{j1} \le \min\{p'_{i2}, p'_{j2}\}$ (в противном случае имело бы место одно из неравенств: $\min\{p'_{i1}, p'_{k2}\} >$ $> \min\{p'_{k1}, p'_{i2}\}$или $\min\{p'_{j1}, p'_{k2}\} > \min\{p'_{k1}, p'_{j2}\}$, и перестановка π'_v не являлась бы перестановкой Джонсона для сценария $p' \in T$). Следовательно, для компонент вектора $p' \in T$ для любого требования $J_t \in \{s_2\}$ неравенство Джонсона (2) выполняется как равенство при $i_k = t$, $i_m = i$ и при $i_k = t$, $i_m = j$. Поскольку порядок требований в перестановках s_1, s_2 и s_3 не менялся, то перестановка π''_v является перестановкой Джонсона для сценария $p' \in T$. Поскольку вектор $p' \in T$ был выбран произвольно, последнее утверждение справедливо для всех сценариев, при которых перестановка π'_v является перестановкой Джонсона.

Поскольку $S(T) \subset \Pi(G)$ — минимальное доминирующее множество, то множество $S'(T) \subset \Pi(G)$, отличающееся от $S(T)$ заменой перестановки π'_v на перестановку π''_v, содержит хотя бы одну перестановку Джонсона для любого сценария $p \in T$. Проверив множество $S'(T)$ на минимальность по включению и удалив из него избыточные перестановки, получим минимальное доминирующее множество $S''(T) \subset \Pi(G)$, которое отличается от множества $S(T)$. Таким образом, $\Pi(G)$ содержит больше одного минимального доминирующего множества, что противоречит предположению.

Если множество $S(T)$ не содержит перестановок вида π_v, то возьмем произвольную перестановку вида π_u из множества $S(T)$ и приведем ее к виду π_v, поместив требование J_j непосредственно перед требованием J_i. Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и для перестановки π_v. Необходимость доказана.

Достаточность. Покажем, что при выполнении условия теоремы 8 множество $\Pi^*(G)$ является единственным минимальным доминирующим множеством для задачи $F2 | p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U | C_{\max}$. Для этого достаточно показать, что во множестве $\Pi^*(G)$ для любого сценария $p \in T$ найдется перестановка Джонсона.

Пусть $\Pi^*(G) = \Pi(G)$. В силу теоремы 7 множество $\Pi(G)$ содержит хотя бы одну перестановку Джонсона для каждого сценария $p \in T$. Согласно лемме 3 для каждой перестановки $\pi_i \in \Pi^*(G)$ найдется сценарий $p \in T$, для которого перестановка π_i является единственной во множестве $\Pi(G)$ перестановкой Джонсона. Следовательно, множество $\Pi(G) = \Pi^*(G)$ — минимальное доминирующее множество для задачи $F2 | p_{ij}^L \le p_{ij} \le p_{ij}^U | C_{\max}: \Pi^*(G) = \Pi(G) = S(T)$.

Пусть $\Pi^*(G) \ne \Pi(G)$. Тогда найдется хотя бы два конфликтных требования: $J_i \in \mathcal{J}$ и $J_j \in \mathcal{J}$. Пусть p — произвольный вектор из множества T. Рассмотрим возможные случаи: (i) и (ii).

(i) Пусть для любой пары конфликтных требований J_i и J_j соотношение Джонсона (2) выполняется как строгое неравенство либо при $i_k = i$ и $i_m = j$, либо при $i_k = j$ и $i_m = i$. Пусть $\pi_k \in \Pi(G)$ — перестановка Джонсона для сценария $p \in T$ (она существует согласно теореме 7). По построению множества $\Pi(G)$ для любой другой перестановки $\pi_l \in \Pi(G)$ найдутся конфликтные требования J_x и J_y такие, что перестановка π_k имеет вид $\pi_k = (\dots, J_x, \dots, J_y, \dots)$, а перестановка π_l — вид $\pi_l = (\dots, J_y, \dots, J_x, \dots)$. Соотношение (2) при $i_k = x$ и $i_m = y$ выполняется как строгое неравенство; следовательно, перестановка $\pi_l \in \Pi(G)$ не является перестановкой Джонсона для сценария $p \in T$. Поскольку π_l — любая отличная от π_k перестановка из множества $\Pi(G)$, то π_k — единственная во множестве $\Pi(G)$ перестановка Джонсона для сценария $p \in T$. Следовательно, перестановка π_k не является избыточной: $\pi_k \in \Pi^*(G)$.

(ii) Пусть существуют конфликтные требования $J_i \in \mathcal{J}$ и $J_j \in \mathcal{J}$ такие, что для компонент p_{i1}, p_{i2}, p_{j1}, p_{j2} вектора p имеет место равенство

$$\min\{p_{i1}, p_{j2}\} = \min\{p_{j1}, p_{i2}\}. \tag{16}$$

Далее на основании вектора $p \in T$ будем строить вектор $p' \in T$ в результате изменения длительностей операций по обслуживанию требований J_i и J_j таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\min\{p'_{i1}, p'_{j2}\} \ne \min\{p'_{j1}, p'_{i2}\}. \tag{17}$$

Поскольку требования J_i и J_j являются конфликтными, то указанные в соотношении (17) допустимые длительности операций существуют. Остальные компоненты вектора $p \in T$ оставим без изменения: $p'_{w1} = p_{w1}$ и $p'_{w2} = p_{w2}$, если $J_w \neq J_i$ и $J_w \neq J_j$.

Обозначим $\varepsilon = \min_{x,\, t\in\{1,\,\ldots,\,n\};\; y,\, t\in\{1,\,2\}} \{|\, p_{xy} - p_{ts}\,| > 0\}$ $(\varepsilon > 0)$, $\varepsilon_{i1} = \min\{\varepsilon, p_{i1} - p^L_{i1}\}$, $\varepsilon_{i2} = \min\{\varepsilon, p^U_{i2} - p_{i2}\}$, $\varepsilon_{j1} = \min\{\varepsilon, p^U_{j1} - p_{j1}\}$ и $\varepsilon_{j2} = \min\{\varepsilon, p_{j2} - p^L_{j2}\}$.

Очевидно, $\varepsilon_{i1} \geq 0$, $\varepsilon_{i2} \geq 0$, $\varepsilon_{j1} \geq 0$, $\varepsilon_{j2} \geq 0$, причем величина ε_{tm}, $t \in \{i, j\}$, $m \in \{1, 2\}$, равна нулю лишь тогда, когда выполняется либо $p_{tm} = p^L_{tm}$, либо $p_{tm} = p^U_{tm}$. Новые длительности операций по обслуживанию требований J_i и J_j определим следующим образом: $p'_{i1} = p_{i1} - i\cdot\varepsilon_{i1} / n^2$, $p'_{i2} = p_{i2} + i\cdot\varepsilon_{i2} / n^2$, $p'_{j1} = p_{j1} + j\cdot\varepsilon_{j1} / n^2$, $p'_{j2} = p_{j2} - j\cdot\varepsilon_{j2} / n^2$. Нетрудно видеть, что построенный вектор p' принадлежит множеству T. Покажем, что для длительностей операций по обслуживанию требований $J_i \in \mathcal{J}$ и $J_j \in \mathcal{J}$, определяемых вектором $p' \in T$, должно выполняться (17) (случай (ii) сводится к случаю (i)).

Если неравенство $\varepsilon_{tm} > 0$ справедливо для всех $t \in \{i, j\}$ и $m \in \{1, 2\}$ (за исключением величины $\varepsilon_{t'm'}$, равной нулю), то должно выполняться неравенство

$$\min\{p'_{i1}, p'_{j2}\} < \min\{p'_{j1}, p'_{i2}\}. \tag{18}$$

Следовательно, имеет место (17). Если равенство $\varepsilon_{tm} = 0$ справедливо для всех $t \in \{i, j\}$ и $m \in \{1, 2\}$ или только одна из величин $\varepsilon_{t'm'}$ отлична от нуля, то требования $J_i \in \mathcal{J}$ и $J_j \in \mathcal{J}$ не являются конфликтными, что противоречит их выбору.

Пусть точно две из величин $\varepsilon_{t'm'}$ и $\varepsilon_{t''m''}$ отличны от нуля. Если эти величины относятся к длительностям операций, расположенным по одну сторону от знака равенства в (16), то должно выполняться неравенство (18). Если они относятся к длительностям операций, расположенным в соотношении (16) по разные стороны от знака равенства, то возникает один из четырех возможных случаев: а) $\varepsilon_{i1} = \varepsilon_{i2} = 0$; б) $\varepsilon_{j1} = \varepsilon_{j2} = 0$; в) $\varepsilon_{i1} = \varepsilon_{j1} = 0$ или г) $\varepsilon_{i2} = \varepsilon_{j2} = 0$.

Рассмотрим случай а). Из равенств $\varepsilon_{i1} = \varepsilon_{i2} = 0$ следует

$$p_{i1} = p^L_{i1} = p_{i2} = p^U_{i2}. \tag{19}$$

Если $\min\{p_{i1}, p_{j2}\} = p_{j2}$, то неравенство (18) выполняется. Пусть имеет место неравенство $p_{i1} < p_{j2}$. Если $\min\{p_{j1}, p_{i2}\} = p_{j1} < p_{i2}$, то справедливо неравенство (18). Пусть выполняется противоположное соотношение $p_{j1} \geq p_{i2}$. Тогда вычислим $\varepsilon'_{i1} \geq 0$ и $\varepsilon'_{i2} \geq 0$ по формулам $\varepsilon'_{i1} = \min\{\varepsilon, p^U_{i1} - p_{i1}\}$ и $\varepsilon'_{i2} = \min\{\varepsilon, p_{i2} - p^L_{i2}\}$.

Если $\varepsilon'_{i1} = \varepsilon'_{i2} = 0$, то выполняются равенства $p_{i1} = p^U_{i1} = p_{i2} = p^L_{i2}$, что вместе с равенством (19) влечет включение $J_i \in \mathcal{J}_0$, противоречащее условию $\mathcal{J}_0 = \varnothing$.

Пусть $\varepsilon'_{i1} + \varepsilon'_{i2} \neq 0$. Новые значения длительностей операций по обслуживанию требований J_i и J_j вычислим по формулам: $p'_{i1} = p_{i1} + i\cdot\varepsilon'_{i1} / n^2$, $p'_{i2} = p_{i2} - i\cdot\varepsilon'_{i2} / n^2$, $p'_{j1} = p_{j1}$, $p'_{j2} = p_{j2}$. Очевидно, что в этом случае для компонент $p'_{i1}, p'_{i2}, p'_{j1}, p'_{j2}$ вектора $p' \in T$ выполняется неравенство

$$\min\{p'_{i1}, p'_{j2}\} > \min\{p'_{j1}, p'_{i2}\}. \tag{20}$$

Следовательно, имеет место (17).

Случай б) рассматривается аналогично случаю а).

Рассмотрим случай в). Из равенств $\varepsilon_{i1} = \varepsilon_{j1} = 0$ следуют равенства

$$p_{i1} = p^L_{i1} = p_{j1} = p^U_{j1}. \tag{21}$$

Если $\min\{p_{i1}, p_{j2}\} = p_{j2}$, то имеет место неравенство (18). Пусть справедливо неравенство

$$p_{i1} < p_{j2}. \tag{22}$$

Тогда выполняется соотношение $p_{i1}^L = p_{i1} < p_{j2} \le p_{j2}^U$. Если при этом $p_{i2} < p_{j1}$, то имеет место неравенство (18). Пусть выполняется противоположное соотношение

$$p_{j1} \le p_{i2}. \tag{23}$$

Вычислим $\varepsilon'_{i1} \ge 0$ и $\varepsilon'_{j1} \ge 0$ по формулам $\varepsilon'_{i1} = \min\{\varepsilon, p_{i1}^U - p_{i1}\}$ и $\varepsilon'_{j1} = \min\{\varepsilon, p_{j1} - p_{j1}^L\}$. Если $\varepsilon'_{i1} + \varepsilon'_{j1} \ne 0$, то новые значения длительностей операций по обслуживанию требований J_i и J_j вычислим по формулам $p'_{i1} = p_{i1} + i \cdot \varepsilon'_{i1} / n^2$, $p'_{i2} = p_{i2}$, $p'_{j1} = p_{j1} - j \cdot \varepsilon'_{j1} / n^2$, $p'_{j2} = p_{j2}$. Очевидно, что для соответствующих компонент вектора $p' \in T$ выполняется неравенство (20); следовательно, справедливо (17). В противном случае из равенств $\varepsilon'_{i1} = \varepsilon'_{j1} = 0$ вытекает

$$p_{i1} = p_{i1}^U = p_{j1} = p_{j1}^L. \tag{24}$$

Если $p_{j2}^L \ge p_{i1}$ или $p_{i2}^L \ge p_{j1}$, то из соотношений (21) и (24) получаем условие теоремы 2 и требования J_i и J_j не являются конфликтными, что противоречит нашему предположению. Следовательно, выполняются оба неравенства: $p_{j2}^L < p_{i1}^L$ и $p_{i2}^L < p_{j1}^L$. Из соотношений (22) и (23) вытекают неравенства $p_{i1}^U < p_{j2}^U$ и $p_{j1}^U < p_{i2}^U$ (вообще говоря, из (23) следует возможность равенства $p_{j1}^U = p_{i2}^U$, однако в этом случае также выполняются условия теоремы 2 и требования J_i и J_j не являются конфликтными). Итак, для границ возможных длительностей операций по обслуживанию требований J_i и J_j выполняется первое соотношение из условия (14), причем $p_{i1} = p_{j1} \le \min\{p_{i2}, p_{j2}\}$.

Обозначим $\varepsilon_j = \min_{x \in \{1, \dots, n\}} \{p_{j1} - p_{x2}^L \mid p_{j1} - p_{x2}^L > 0\}$. Новые значения длительностей операций по обслуживанию требований J_i и J_j вычислим по формулам $p'_{i1} = p_{i1}$, $p'_{i2} = p_{i2}$, $p'_{j1} = p_{j1}$, $p'_{j2} = p_{j1} - \min\{\varepsilon, \varepsilon_j\} \cdot j / n^2$. Тогда для компонент вектора $p' \in T$ имеет место неравенство (18) и, следовательно, соотношение (17).

Для всех требований $J_l \in \mathcal{J}$, для которых справедливо неравенство $\min\{p_{j1}, p_{l2}\} > \min\{p_{l1}, p_{j2}\}$, должно выполняться и неравенство $\min\{p'_{j1}, p_{l2}\} > \min\{p_{l1}, p'_{j2}\}$.

Пусть существует требование $J_l \in \mathcal{J}$ (конфликтное с требованием $J_j \in \mathcal{J}$) такое, что $\min\{p_{j1}, p_{l2}\} < \min\{p_{l1}, p_{j2}\}$ и $\min\{p'_{j1}, p_{l2}\} > \min\{p_{l1}, p'_{j2}\}$. В этом случае выполняются неравенства $p_{j1} \le p_{l2}$ и $p_{j1} < p_{l1}$, откуда следует неравенство $p_{j1}^U < p_{l1}^U$. Для всех таких требований положим $p'_{l1} = p_{l1}$, $p'_{l2} = p_{j1} - \min\{\varepsilon, \varepsilon_j\} \cdot (j + l) / n^2$. Значит, выполняется неравенство $\min\{p'_{j1}, p'_{l2}\} < \min\{p'_{l1}, p'_{j2}\}$. Если $p'_{l2} < p_{l2}^L$, то в силу выбора ε и ε_j получаем $p_{j1} \le p_{l2}^L$, причем справедливо $p_{j1}^U \le p_{l2}^L$. Таким образом, $p'_{l2} \ge p_{l2}^L$ (иначе имело бы место противоречие: для требования $J_l \in \mathcal{J}$ выполнялось бы второе соотношение из условия (14)). Если оказалось, что для требований J'_l и J''_l справедливы оба неравенства: $\min\{p_{l'1}, p_{l''2}\} < \min\{p_{l''1}, p_{l'2}\}$ и $\min\{p'_{l'1}, p'_{l''2}\} > \min\{p'_{l''1}, p'_{l'2}\}$, то значения $p'_{l'2}$ и $p'_{l''2}$ поменяем местами.

Для каждого из рассмотренных требований $J_l \in \mathcal{J}$, если найдется требование $J_t \in \mathcal{J}$ (конфликтное с требованием $J_l \in \mathcal{J}$) такое, что справедливы оба соотношения $\min\{p_{l1}, p_{t2}\} < \min\{p_{t1}, p_{l2}\}$ и $\min\{p'_{l1}, p_{t2}\} > \min\{p_{t1}, p'_{l2}\}$, то положим $p'_{t1}=p_{t1}$, $p'_{t2}=p_{j1}-\min\{\varepsilon,\varepsilon_j\}\cdot(j+l+t)/n^2$. Если получим неравенство $p'_{t2}<p^L_{t2}$, то для требования $J_t\in\mathcal{J}$ выполняется второе соотношение из условия (14), что противоречит предположению. Заметим, что $J_t\neq J_i$ и $J_t\neq J_j$. Если оказалось, что для требований J'_t и J''_t выполняются неравенства $\min\{p_{t'1},p_{t''2}\}<\min\{p_{t''1},p_{t'2}\}$ и $\min\{p'_{t'1},p'_{t''2}\}>\min\{p'_{t''1},p'_{t'2}\}$, то поменяем местами значения $p'_{t'2}$ и $p'_{t''2}$. Если же для требований J'_t и J''_t выполняется $\min\{p_{t'1},p_{t''2}\}<\min\{p_{t''1},p_{t'2}\}$ и $\min\{p'_{t'1},p'_{t''2}\}=\min\{p'_{t''1},p'_{t'2}\}$ (это возможно в случае $l'+t'=l''+t''$), то в качестве нового значения $p'_{t''2}$ возьмем $p'_{t''2}-\min\{\varepsilon,\varepsilon_j\}\cdot(2t''+1)/2n^2$.

Так будем продолжать до тех пор, пока не убедимся, что для всех пар требований, для которых соотношение Джонсона (2) для компонент исходного вектора выполнялось как строгое неравенство, для компонент построенного вектора соотношение Джонсона (2) также выполняется как строгое неравенство. Таким образом, для длительностей операций по обслуживанию требований $J_i\in\mathcal{J}$ и $J_j\in\mathcal{J}$, определенных вектором $p'\in T$, соблюдение условия теоремы влечет (17). При этом для некоторых пар требований $J_u\in\mathcal{J}$ и $J_v\in\mathcal{J}$, для которых имеет место равенство $\min\{p_{u1},p_{v2}\}=\min\{p_{v1},p_{u2}\}$, может выполняться $\min\{p'_{u1},p'_{v2}\}\neq\min\{p'_{v1},p'_{u2}\}$, а для каждой пары конфликтных требований $J_u\in\mathcal{J}$ и $J_v\in\mathcal{J}$, для которых справедливо неравенство $\min\{p_{u1},p_{v2}\}<$ $<\min\{p_{v1},p_{u2}\}$, из построения вектора $p'\in T$ следует неравенство $\min\{p'_{u1},p'_{v2}\}<\min\{p'_{v1},p'_{u2}\}$. Итак, для вектора $p'\in T$ по сравнению с вектором $p\in T$ количество пар требований, для которых соотношение (2) выполняется со знаком равенства, сократилось по крайней мере на единицу.

Случай г) рассматривается аналогично случаю в) с использованием условия (15).

Продолжим анализ пар конфликтных требований до получения вектора $p^*\in T$ такого, что для любых конфликтных требований J_i и J_j для компонент p^*_{i1}, p^*_{i2}, p^*_{j1}, p^*_{j2} вектора p^* справедливо соотношение $\min\{p^*_{i1},p^*_{j2}\}\neq\min\{p^*_{j1},p^*_{i2}\}$.

По теореме 7 множество $\Pi(G)$ содержит перестановку Джонсона для сценария $p^*\in T$. Аналогично случаю (i) можно показать, что эта перестановка $\pi^*\in\Pi(G)$ является единственной во множестве $\Pi(G)$ перестановкой Джонсона для сценария $p^*\in T$. Следовательно, $\pi^*\in\Pi^*(G)$. При этом перестановка $\pi^*\in\Pi(G)$ является перестановкой Джонсона для сценария $p\in T$. Действительно, если для требований $J_q\in\mathcal{J}$ и $J_w\in\mathcal{J}$ имеет место отношение $J_q\prec J_w$, то из соотношения $\min\{p_{q1},p_{w2}\}\le\{p_{w1},p_{q2}\}$ следует $\min\{p^*_{q1},p^*_{w2}\}\le\{p^*_{w1},p^*_{q2}\}$. Если же требования $J_u\in\mathcal{J}$ и $J_v\in\mathcal{J}$ являются конфликтными, то из неравенства $\min\{p_{u1},p_{v2}\}<$ $<\min\{p_{v1},p_{u2}\}$ вытекает неравенство $\min\{p'_{u1},p'_{v2}\}<\min\{p'_{v1},p'_{u2}\}$ и неравенство $\min\{p^*_{u1},p^*_{v2}\}<\min\{p^*_{v1},p^*_{u2}\}$.

Таким образом, в каждом из случаев (i) и (ii) для сценария $p\in T$ найдется перестановка Джонсона $\pi_i\in\Pi^*(G)$. Поскольку вектор $p\in T$ выбран произвольно, последнее утверждение справедливо для любого вектора $p\in T$. Так как множество $\Pi^*(G)$ получено из множества $\Pi(G)$ в результате удаления всех избыточных перестановок типа I и II, то по лемме 3 множество $\Pi^*(G)$ является минимальным по включению доминирующим множеством и определяет множество $S(T)$ для задачи $F2|\,p^L_{ij}\le p_{ij}\le p^U_{ij}\,|C_{\max}$: $\Pi^*(G)=S(T)$.

Теорема 8 доказана.

Критерий единственности минимального доминирующего множества для задачи $z\in\Omega$ (теорема 8) доказан в предположении, что множество $\mathcal{J}_0$ пусто. Заметим, однако, что для определения меры неопределенности задачи z такое ограничения несущественно, поскольку $\mathcal{J}_0$ — это множество всех требований с фиксированными (т.е. заранее определенными) длительностями операций, причем одинаковыми для обоих приборов. В общем случае для задачи $z \in \Omega$ нужно проверить наличие требований из множества $\mathcal{J}_0$. Если окажется, что такие требования существуют, т.е. $\mathcal{J}_0 = \varnothing$, то минимальное доминирующее множество и орграф доминирования следует строить на множестве требований, полученном из множества $\mathcal{J}$ в результате удаления всех требований подмножества $\mathcal{J}_0$. Соответственно вместо множества $S(T)$ будет получено некоторое множество $S^0(T)$ перестановок требований множества $\mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0$, а вместо орграфа $\mathcal{G} = (\mathcal{J}, \mathcal{A})$ — орграф $\mathcal{G}^0 = (\mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0, \mathcal{A}^0)$. Для вычисления меры $\varphi(z)$ (меры $\tau(z)$ соответственно) в равенстве (7) (в равенстве (11)) мощность множества $S(T)$ (множества $\mathcal{A}$) необходимо заменить на мощность множества $S^0(T)$ (множества $\mathcal{A}^0$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для обоснованного выбора метода решения задачи Беллмана–Джонсона с интервальными длительностями операций предлагается использовать меру ее неопределенности. Рассмотрено три отображения на множестве задач Ω с интервальными длительностями операций. Для того чтобы отображения $\varphi : \Omega \to R_+^1$ и $\eta : \Omega \to R_+^1$ можно было использовать в качестве меры неопределенности задачи $z \in \Omega$, требуется проверить единственность минимального доминирующего множества для этой задачи. Получен критерий единственности минимального доминирующего множества для задачи Беллмана–Джонсона при условии, что множество требований $\mathcal{J}$ не содержит требований с одинаковыми детерминированными длительностями операций на обоих приборах. В общем случае для вычисления меры неопределенности задачи Беллмана–Джонсона можно использовать и функцию $\mu : \Omega \to R_+^1$, значение которой определяется за $O(n^2)$ элементарных действий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tanaev V.S., Sotskov Yu.N., Strusevich V.A. Scheduling theory: multi-stage systems. — Dordrecht: Kluwer Academ. Publ., 1994. — 404 p.
2. Pinedo M. Scheduling: theory, algorithms, and systems. — New Jersey: Prentice-Hall, 1995. — 378 p.
3. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. — Киев: Наук. думка, 2003. — 261 с.
4. Sotskov Yu.N., Sotskova N.Yu., Lai T.-C., Werner F. Scheduling under uncertainty. Theory and algorithms. — Minsk: Belorusskaya nauka, 2010. — 326 p.
5. Сергиенко И.В., Семенова Н.В. Задачи целочисленного программирования с неоднозначно заданными данными: точные и приближенные решения // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — № 6. — С. 75–86.
6. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации // Там же. — 2000. — № 6. — С. 39–46.
7. Elmaghraby S., Thoney K.A. Two-machine flowshop problem with arbitrary processing time distributions // IIE Transact. — 2000. — **31**. — P. 467–477.
8. Kamburowski J. Stochastically minimizing the makespan in two-machine flow shops without blocking // Europ. Journ. of Oper. Res. — 1999. — **112**. — P. 304–309.
9. Ku P.S., Niu S.C. On Johnson's two-machine flow-shop with random processing times // Oper. Res. — 1986. — **34**. — P. 130–136.
10. Portougal V., Trietsch D. Johnson's problem with stochastic processing times and optimal service level // Europ. Journ. of Oper. Res. — 2006. — **169**. — P. 751–760.
11. Prasal V.R. $n \times 2$ flow shop sequencing problem with random processing times // Oper. Res. — 1981. — **18**. — P. 1–14.
12. Weiss G. Multiserver stochastic scheduling // Deterministic and Stochastic Scheduling / M.A.H. Dempster, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan (Editors). — Dordrecht: Reidel, 1982. — P. 157–179.
13. Daniels R.L., Kouvelis P. Robust scheduling to hedge against processing time uncertainty in single-stage production // Management Sci. — 1995. — **41**, N 2. — P. 363–376.
14. Kouvelis P., Daniels R.L., Vairaktarakis G. Robust scheduling of a two-machine flow shop with uncertain processing times // IIE Transact. — 2000. — **32**. — P. 421–432.

15. Yang J., Yu G. On the robust single machine scheduling problem // J. of Combinat. Opt. — 2002. — **6**. — P. 17–33.
16. Lai T.-C., Sotskov Yu.N., Sotskova N.Yu., Werner F. Optimal makespan scheduling with given bounds of processing times // Mathemat. and Comput. Model. — 1997. — **26**. — P. 67–86.
17. Lai T.-C., Sotskov Yu.N. Sequencing with uncertain numerical data for makespan minimization // Journ. of the Oper. Res. Soc. — 1999. — **50**. — P. 230–243.
18. Matsveichuk N.M., Sotskov Yu.N., Egorova N.G., Lai T.-C. Schedule execution for two-machine flow-shop with interval processing times // Mathemat. and Comput. Model. — 2009. — **49**. — P. 991–1011.
19. Sotskov Yu.N., Egorova N.G., Lai T.-C. Minimizing total weighted flow time of a set of jobs with interval processing times // Ibid. — 2009. — **50**. — P. 556–573.
20. Lai T.-C., Sotskov Yu.N., Sotskova N.Yu., Werner F. Mean flow time minimization with given bounds of processing times // Europ. Journ. of Oper. Res. — 2004. — **159**, N 3. — P. 558–573.
21. Гуревский Е.Е., Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. Критерий устойчивости одной лексикографический булевой задачи оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4. — С. 127–132.
22. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. Критерии устойчивости векторных комбинаторных задач на «узкие места» в терминах бинарных отношений // Там же. — 2008. — № 3. — С. 103–111.
23. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае регулярности нормы в критериальном пространстве // Там же. — 2010. — № 1. — С. 82–89.
24. Emelichev V., Podkopaev D. Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming // Discrete Optim. — 2010. — **7**. — P. 48–63.
25. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 4. — С. 90–100.
26. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования // Там же. — 2006. — № 5. — С. 63–72.
27. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Там же. — 2008. — № 3. — С. 142–148.
28. Sotskov Yu.N., Dolgui A., Portmann M.-C. Stability analysis of optimal balance for assembly line with fixed cycle time // Europ. Journ. of Oper. Res. — 2006. — **168**, N 3. — P. 783–797.
29. Sotskov Yu.N., Sotskova N.Yu., Werner F. Stability of an optimal schedule in a job shop // Omega. Intern. Journ. of Management Sci. — 1997. — **25**, N 4. — P. 397–414.
30. Sotskov Yu.N., Wagelmans A.P.M., Werner F. On the calculation of the stability radius of an optimal or an approximate schedule // Annals of Oper. Res. — 1998. — **83**. — P. 213–252.
31. Johnson S.M. Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included // Naval Research Logistics Quarterly. — 1954. — **1**. — P. 61–68.
32. Graham R.L., Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling. A survey // Annals of Discrete Mathemat. — 1976. — **5**. — P. 287–326.
33. Smith W.E. Various optimizers for single-stage production // Naval Research and Logistics Quarterly. — 1956. — **3**, N 1. — P. 59–66.
34. Stanfield P.M., King R.E., Joines J.A. Scheduling arrivals to a production system in a fuzzy environment // Europ. Journ. of Oper. Res. — 1996. — **93**. — P. 75–87.
35. Allahverdi A., Aldowaisan T., Sotskov Yu.N. Two-machine flowshop scheduling problem to minimize makespan or total completion time with random and bounded setup times // Intern. Journ. of Mathemat. and Mathemat. Sci. — 2003. — **39**. — P. 2475–2486.
36. Ng C.T., Matsveichuk N.M., Sotskov Yu.N., Cheng T.C.E. Two-machine flow-shop minimum-length scheduling with interval processing times // Asia-Pacific Journ. of Oper. Res. — 2009. — **26**, N 6. — P. 715–734.
37. Sotskov Yu.N., Allahverdi A., Lai T.-C. Flowshop scheduling problem to minimize total completion time with random and bounded processing times // Journ. of the Oper. Res. Soc. — 2004. — **55**. — P. 277–286.
38. Matsveichuk N.M., Sotskov Yu.N., Werner F. The dominance digraph as a solution to the two-machine flow-shop problem with interval processing times // Optimization. — 2011. — N 12. — P. 1493–1517.

Поступила 10.11.2010