СИСТЕМНЫЙ
АНАЛИЗ

А.А. ЧИКРИЙ, И.С. РАППОПОРТ

УДК 517.977

МЕТОД РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ КОНФЛИКТНО-УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Ключевые слова: *конфликтно-управляемый процесс, многозначное отображение, условие Понтрягина, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор, стробоскопическая стратегия, опорная функция, гарантированное время, суперпозиционная измеримость, функция Минковского.*

ВВЕДЕНИЕ

Методы исследования конфликтно-управляемых процессов можно условно разделить на два типа. Один посвящен конструкциям, для которых характерна попытка построить оптимальные стратегии игроков относительно заданного критерия. Это методики, связанные с альтернативами Н.Н. Красовского [1, 2], попятные процедуры Понтрягина–Пшеничного [3, 4] и метод Р. Айзекса [5], касающийся основного уравнения теории динамических игр — уравнения типа Гамильтона–Якоби. Каждый из этих методов идеологически связан с динамическим программированием и в различных формах воспроизводит его суть. Другой тип обеспечивает гарантированный результат. Вопрос об оптимальности здесь не поднимается, а главная задача состоит в достижении цели, т.е. в выиграше, что вполне согласуется с естественными представлениями об играх. К таким методам относятся правило экстремального прицеливания Н.Н. Красовского при завершении игры за время первого поглощения [1], первый прямой метод Л.С. Понтрягина [3, 6] и метод разрешающих функций [7–9]. Все они являются теоретическим обоснованием хорошо известных проектировщикам ракетной и космической техники методов погонной кривой Л. Эйлера, метода преследования по лучу и, в частности, параллельного сближения.

Данная работа посвящена углубленному исследованию метода разрешающих функций в ситуации «один на один». Заметим, что если в основе правила экстремального прицеливания для линейных систем лежит аппарат опорных функций, то в методе разрешающих функций ключевую роль играют обратные функционалы Минковского [7, 10–12], с помощью которых образуются специальные многозначные отображения и соответствующие разрешающие функции, тесно связанные с параметрами исходного конфликтно-управляемого процесса.

Техника разрешающих функций, являющихся в примерах, как правило, большими положительными корнями квадратных уравнений, оказалась удобным и универсальным средством при решении конкретных задач.

Привлекательность метода разрешающих функций состоит в том, что он позволяет эффективно использовать современную технику многозначных отображений и их селекторов [13–19] в обоснованиях игровых конструкций и получении на их основе содержательных результатов. Кроме того, метод позволяет в единой схеме исследовать следующие задачи:

- группового [7, 8, 20–22] и поочередного преследований [7, 8];
- преследования–убегания при взаимодействии группировок;
- с интегральными и фазовыми ограничениями;
- с колебательной и вращательной динамикой;
- с терминальным функционалом [23–25];
- о многократной поимке;
- о преследовании строя.

Методика распространена на динамические процессы, описываемые нестационарными, дифференциально-разностными и импульсными системами, а также системами интегральных, интегро-дифференциальных, обыкновенных дифференциальных, разностных уравнений, уравнений с дробными производными различных типов [26–28] и их комбинациями, которые называют гибридными системами.

В любых формах метода разрешающих функций главным является накопительный принцип, который используется в текущем суммировании разрешающей функции, для оценки качества игры первого игрока вплоть до достижения некоторого порогового значения.

Ниже рассмотрены проблемы, связаные со свойствами специальных многозначных отображений и их селекторов, играющие ключевую роль при доказательстве утверждений. В частности, при обосновании схемы метода и построении управлений первого игрока определяющей является $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримость [29] замкнутозначных отображений [15, 19, 30–35], связанных с конфликтно-управляемым процессом, а также суперпозиционная измеримость их селекторов. Приведены достаточные условия завершения игры, а также сравнение гарантированных времен различных схем метода. Статья примыкает к работам [1–7, 16, 20, 21, 36–41] и продолжает исследования [8, 28, 42–44].

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И СВОЙСТВА МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Для любого замкнутого множества Ω евклидового пространства $\mathbb{R}^k$ обозначим $\mathfrak{L}$ множество всех его измеримых по Лебегу подмножеств [30]. Пусть $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$ — σ-алгебра борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^l$. Обозначим $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$ σ-алгебру, порожденную произведением множеств $L\otimes B$, где $L\in\mathfrak{L}$, $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$. Множества, принадлежащие этой σ-алгебре, будем называть $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримыми (более точно $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримыми). Аналогично определяются $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{B}$-измеримые множества.

Вектор-функцию $f(\omega, x)$, $f:\Omega\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^m$, будем называть $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой, если для любого борелевского множества $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ его обратный образ $f^{-1}(B)=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l : f(\omega,x)\in B\}$ будет $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым.

Многозначное отображение $F(\omega, x)$, $F:\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^m}$, будем называть $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым, если для любого открытого множества $A\subset\mathbb{R}^m$ его обратный образ $F^{-1}(A)=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l : F(\omega,x)\cap A\neq\varnothing\}$ будет $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым. Разумеется, если вместо $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый будем употреблять $\mathfrak{L}$-измеримый или $\mathfrak{B}$-измеримый, то определения останутся в силе. Это касается и всех последующих утверждений в аналогичной ситуации.

Каждому многозначному отображению $F(\omega,x)$, $F:\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^m}$, можно сопоставить его график $\operatorname{gr}F=\{(\omega,x,z)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^m: z\in F(\omega,x)\}$ и эффективное множество $\operatorname{dom}F=\{(\omega,x)\in\Omega\in\mathbb{R}^l: F(\omega,x)\neq\varnothing\}$. Обозначим $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ σ-алгебру, порожденную множествами $L\times B_1\times B_2$, где $L\in\mathfrak{L}$, $B_1\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$, $B_2\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$.

Лемма 1. Пусть для многозначного отображения $F(\omega,x)$, $F:\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^m}$, $\operatorname{gr}F\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$. Тогда для всякой $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой вектор-функции $f(\omega,x)$, $f:\Omega\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^m$, множество

$$\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l: f(\omega,x)\in F(\omega,x)\} \tag{1}$$

будет $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым.

Доказательство. Выберем произвольную $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримую вектор-функцию $f(\omega,x)$, $f:\Omega\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^m$, и положим $\varphi(\omega,x)=(\omega,x,f(\omega,x))$. Покажем, что

$$\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l: f(\omega,x)\in F(\omega,x)\}=\varphi^{-1}(\operatorname{gr}F). \tag{2}$$

Действительно, имеем

$$\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l: f(\omega,x)\in F(\omega,x)\}=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l:(\omega,x,f(\omega,x))\in\operatorname{gr}F\}=$$

$$=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l:\varphi(\omega,x)\in\operatorname{gr}F\}=\varphi^{-1}(\operatorname{gr}F).$$

Для каждого $L\times B_1\times B_2\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ получим

$$\varphi^{-1}(L\times B_1\times B_2)=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l: \varphi(\omega,x)\in L\times B_1\times B_2\}=$$

$$=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l:(\omega,x,f(\omega,x))\in L\times B_1\times B_2\}=$$

$$=(L\times B_1)\cap\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l: f(\omega,x)\in B_2\}=(L\times B_1)\cap f^{-1}(B_2).$$

Здесь $L\times B_1\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$, $f^{-1}(B_2)\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$, так как $f(\omega,x)$, $f:\Omega\times\mathbb{R}^l\to$ $\to\mathbb{R}^m$, — по предположению $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримая вектор-функция.

Поэтому для всех $C\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ имеем $\varphi^{-1}(C)\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$. Таким образом, поскольку $\operatorname{gr}F\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$, с учетом соотношения (2) множество (1) $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо.

Будем называть многозначное отображение $F(\omega,x,y)$, $F:\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^m}$, суперпозиционно $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым, если для каждой $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой вектор-функции $f(\omega,x)$, $f:\Omega\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^n$, многозначное отображение $\Gamma(\omega,x)=F(\omega,x,f(\omega,x))$, $\Gamma:\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^m}$, является $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым.

Лемма 2. Если многозначное отображение $F(\omega,x,y)$, $F:\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^n}$, $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$-измеримо, то оно суперпозиционно $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо.

Доказательство. Зафиксируем произвольное открытое множество $A\subset\mathbb{R}^m$ и рассмотрим многозначное отображение $H(\omega,x)$, $H:\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^n}$, где

$H(\omega,x)=\{y\in\mathbb{R}^n : F(\omega,x,y)\cap A\neq\varnothing\}$. Тогда имеем

$$\mathrm{gr}H=\{(\omega,x,y)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n : y\in H(\omega,x))\}=$$

$$=\{(\omega,x,y)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n : F(\omega,x,y)\cap A\neq\varnothing\}=F^{-1}(A)\,.$$

Но по условию $F^{-1}(A)\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ и поэтому в силу леммы 1 для всякой $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой функции $f(\omega,x)$, $f:\Omega\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^n$, множество

$$\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l : F(\omega,x,f(\omega,x))\cap A\}=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l : f(\omega,x)\in H(\omega,x)\}$$

является $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым, что и требовалось доказать.

Далее, говоря о непрерывности вектор-функций и многозначных отображений, используем общепринятые определения [30].

Вектор-функцию $f(\omega,x,y)$, $f:\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, будем называть функцией Каратеодори, если для каждого $y\in\mathbb{R}^n$ функция $f(\cdot,\cdot,y)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измерима и при каждом $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$ функция $f(\omega,x,\cdot)$ непрерывна. Аналогично, многозначное отображение $F(\omega,x,y)$, $F:\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^m}$, будем называть отображением Каратеодори, если для каждого $y\in\mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot,\cdot,y)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо и при каждом $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$ отображение $F(\omega,x,\cdot)$ непрерывно.

Следствие 1. Если многозначное отображение $F(\omega,x)$, $F:\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^m}$, $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо, то оно суперпозиционно $\mathfrak{L}$-измеримо. При этом, если вектор-функция $f(\omega,x)$, $f:\Omega\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измерима, то она суперпозиционно $\mathfrak{L}$-измерима.

Лемма 3. Пусть многозначное отображение $F(\omega,x,y)$, $F:\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\to 2^{\mathbb{R}^m}$, имеет замкнутые значения и является отображением Каратеодори. Тогда отображение $F(\omega,x,y)$ будет $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$-измеримым.

Доказательство. При каждом $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$ многозначное отображение $F(\omega,x,\cdot)$ непрерывно и поэтому полунепрерывно сверху. Следовательно, для любого замкнутого множества $C\subset\mathbb{R}^m$ многозначное отображение $\Gamma(\omega,x)$, $\Gamma:\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^n}$, где $\Gamma(\omega,x)=\{y\in\mathbb{R}^n : F(\omega,x,y)\cap C\neq\varnothing\}$, имеет замкнутые значения. Покажем, что для всякого $y\in\mathbb{R}^n$ скалярная функция $\rho(y,\Gamma(\omega,x))=$ $=\inf\{\|y-z\| : z\in\Gamma(\omega,x)\}$ будет $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой.

Положим $\varepsilon>0$ и рассмотрим многозначное отображение $\Gamma_\varepsilon(\omega,x)=$ $=\{y\in\mathbb{R}^n : F(\omega,x,y)\cap C_\varepsilon\neq\varnothing\}$, $\Gamma_\varepsilon:\Omega\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^n$, где $C_\varepsilon=\{z\in\mathbb{R}^m : \rho(z,C)<\varepsilon\}$.

Все множества $\Gamma_\varepsilon(\omega,x)$, $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l$, открыты, поскольку многозначное отображение $F(\omega,x,\cdot)$ полунепрерывно снизу. При этом для каждого $y\in\mathbb{R}^n$ множества

$$\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l : y\in\Gamma_\varepsilon(\omega,x)\}=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l : F(\omega,x,y)\cap C_\varepsilon\neq\varnothing\}$$

являются $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримыми. Поэтому в силу предложения 4 [17, с. 340] с учетом теоремы 2 [17, с. 342] функция $\rho(y,\Gamma_\varepsilon(\omega,x))$ будет $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой при всех $y\in\mathbb{R}^n$.

Если теперь устремить ε к 0, то функция $\rho(y, \Gamma_\varepsilon(\omega, x))$ будет стремиться к функции $\rho(y, \Gamma(\omega, x))$ и, следовательно, при каждом $y \in \mathbb{R}^n$ функция $\rho(y, \Gamma(\omega, x))$ будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой как предел последовательности $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримых функций.

В силу теоремы о характеризации [30, с. 310] $\mathrm{gr}\Gamma \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ и поэтому множество $F^{-1}(C)$ будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$-измеримым, так как

$$F^{-1}(C) = \{(\omega, x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n : F(\omega, x, y) \cap C \neq \varnothing\} =$$

$$= \{(\omega, x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n : y \in H(\omega, x))\} = \mathrm{gr}\Gamma.$$

Обратившись снова к теореме о характеризации, получим, что отображение $F(\omega, x, y)$ является $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$-измеримым.

Следствие 2. Пусть многозначное отображение $F(\omega, x)$, $F: \Omega \times \mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^m}$, имеет замкнутые значения и является отображением Каратеодори. Тогда отображение $F(\omega, x)$ будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым. При этом, если вектор-функция $f(\omega, x)$, $f: \Omega \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$, является функцией Каратеодори, то она будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой.

Лемма 4. Пусть многозначное отображение $F(\omega, x, y)$, $F: \Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$, имеет замкнутые значения и является отображением Каратеодори, а многозначные отображения $H(\omega, x)$, $H: \Omega \times \mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^n}$, и $G(\omega, x)$, $G: \Omega \times \mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^m}$, имеют замкнутые значения и $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримы. Тогда многозначное отображение $\Phi(\omega, x)$, $\Phi: \Omega \times \mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^n}$, где $\Phi(\omega, x) = \{y \in \mathbb{R}^n : y \in H(\omega, x), F(\omega, x, y) \cap G(\omega, x) \neq \varnothing\}$, имеет замкнутые значения и $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение $\Psi(\omega, x)$, $\Psi: \Omega \times \mathbb{R}^l \to 2^{\mathbb{R}^n}$, где $\Psi(\omega, x) = \{y \in \mathbb{R}^n : F(\omega, x, y) \cap G(\omega, x) \neq \varnothing\}$. При каждом $(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^l$ многозначное отображение $F(\omega, x, \cdot)$ полунепрерывно сверху и поэтому для каждого замкнутого множества $C \subset \mathbb{R}^m$ множество $\{y \in \mathbb{R}^n : F(\omega, x, y) \cap C \neq \varnothing\}$ замкнуто при всех $(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^l$. Это значит, что $\Psi(\omega, x)$ замкнутозначно и, следовательно, $\Phi(\omega, x) = H(\omega, x) \cap \Psi(\omega, x)$ имеет замкнутые значения при каждом $(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^l$, так как $H(\omega, x)$ замкнутозначно по условию. Таким образом, в силу теоремы о характеризации для доказательства достаточно проверить, что для всякого $y \in \mathbb{R}^n$ функция $\rho(y, \Phi(\omega, x))$ является $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой.

Положим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $G_\varepsilon(\omega, x) = \{z \in \mathbb{R}^n : \rho(z, G(\omega, x)) < \varepsilon\}$ как открытую ε-окрестность образов многозначного отображения $G(\omega, x)$, учитывая непрерывность скалярной функции $\rho(z, G(\omega, x))$ по z. С ее помощью введем многозначные отображения $\Psi_\varepsilon(\omega, x) = \{y \in \mathbb{R}^n : F(\omega, x, y) \cap G_\varepsilon(\omega, x) \neq \varnothing\}$ и $\Phi_\varepsilon(\omega, x) = H(\omega, x) \cap \Psi_\varepsilon(\omega, x)$.

Заметим, что многозначное отображение $H(\omega, x)$ имеет замкнутые значения и $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо, а все множества $\Psi_\varepsilon(\omega, x)$ открыты в силу полунепрерывности снизу многозначного отображения $F(\omega, x, y)$ по y. Следовательно, для того чтобы показать $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримость функции $\rho(y, \Phi_\varepsilon(\omega, x))$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$ на основании предположения 5 [7, с. 340] и теоремы 2 [7, с. 342] достаточно проверить $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримость множества

$$\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l: y(\omega,x)\in\Psi_\varepsilon(\omega,x)\} \tag{3}$$

для каждой $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой вектор-функции $y(\omega,x)$, $y:\Omega\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^n$. Имеем

$$\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l: y(\omega,x)\in\Psi_\varepsilon(\omega,x)\}=$$
$$=\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l: F(\omega,x,y(\omega,x))\cap G_\varepsilon(\omega,x)\neq\varnothing\}=$$
$$=\mathrm{dom}\,[F(\omega,x,y(\omega,x))\cap G_\varepsilon(\omega,x)]. \tag{4}$$

Многозначное отображение $F(\omega,x,y)$ является отображением Каратеодори и поэтому оно суперпозиционно $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо в силу лемм 2 и 3. Многозначное отображение $G_\varepsilon(\omega,x)$ открытозначно. Покажем, что если $z(\omega,x)$, $z:\Omega\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^m$, — произвольная $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримая вектор-функция, то множество

$$\{(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^l: z(\omega,x)\in G_\varepsilon(\omega,x)\} \tag{5}$$

будет $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым. Действительно, имеем $\mathrm{gr}\,G_\varepsilon=\{(\omega,x,y)\in\Omega\times\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^m: y\in G_\varepsilon(\omega,x)\}=\{(\omega,x,y)\in\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^m: \rho(y,G(\omega,x)<\varepsilon\}$. Но скалярная функция $(\omega,x,y)\to\rho(y,G(\omega,x))$ является функцией Каратеодори и в силу леммы 3 она $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$-измерима. Поэтому $\mathrm{gr}G_\varepsilon\in\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ и на основании леммы 1 заключаем, что множество (5) $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо. Поэтому в силу предложений 1 и 5 [17, с. 340] множество $\mathrm{dom}[F(\omega,x,y(\omega,x))\cap G_\varepsilon(\omega,x)]$ является $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым. Тогда из равенства (4) следует, что множество (3) $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо и, следовательно, функция $\rho(y,\Phi_\varepsilon(\omega,x))$ также $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измерима для всех $y\in\mathbb{R}^n$. Но при $\varepsilon\to 0$ $\rho(y,\Phi_\varepsilon(\omega,x))\to\rho(y,\Phi(\omega,x))$ и поэтому при каждом $y\in\mathbb{R}^n$ функция $\rho(y,\Phi(\omega,x))$ будет $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой как предел последовательности $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримых функций.

Следствие 3. Пусть вектор-функция $f(\omega,x,y)$, $f:\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, является функцией Каратеодори, а многозначные отображения $H(\omega,x)$, $H:\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^n}$, и $G(\omega,x)$, $G:\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^m}$, имеют замкнутые значения и $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримы. Тогда многозначное отображение $\Phi(\omega,x)$, $\Phi:\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^n}$, где $\Phi(\omega,x)=\{y\in\mathbb{R}^n: y\in H(\omega,x), f(\omega,x,y)\in G(\omega,x)\}$, имеет замкнутые значения и $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо.

Заметим, что следствие 3 непосредственно следует из леммы 4 и является аналогом теоремы об обратном образе [30, с. 315] и теоремы 3 [17, с. 346].

Далее используются некоторые понятия и результаты [33].

Лемма 5. Пусть многозначное отображение $F(\omega,x)$, $F:\Omega\times\mathbb{R}^l\to 2^{\mathbb{R}^m}$, имеет замкнутые значения и $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримо. Тогда многозначное отображение $G(\omega)=\bigcap_{x\in X}F(\omega,x)$, $G:\Omega\to 2^{\mathbb{R}^m}$, где X — компакт в $\mathbb{R}^l$, имеет замкнутые значения и $\mathfrak{L}$-измеримо на множестве $\mathrm{dom}\,G$.

Доказательство. В силу леммы 1.3 [33, с. 111] для любого $\varepsilon>0$ существует компактное множество $D_\varepsilon\subset\mathrm{dom}\,F$, $\mu(\mathrm{dom}\,F\setminus D_\varepsilon)<\varepsilon$, такое, что $F_{D_\varepsilon}(\omega,x)$ — сужение отображения $F(\omega,x)$ на множество D_ε имеет замкнутый график в $\Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$. Ясно, что если ε стремится к 0, то найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ справедливо условие $D_\varepsilon^* = D_\varepsilon \cap (\Omega \times X) \neq \varnothing$. Обозначим $X_\varepsilon = \pi_{\mathbb{R}^l} D_\varepsilon^*$, $\Omega_\varepsilon = \pi_\Omega D_\varepsilon^*$, где $\pi_\Omega : \Omega \times \mathbb{R}^l \to \Omega$, $\pi_{\mathbb{R}^l} : \Omega \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ — естественные проекции.

Рассмотрим для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ многозначное отображение

$$G_\varepsilon(\omega) = \bigcap_{x \in X_\varepsilon} F_{D_\varepsilon^*}(\omega, x),\ G_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to 2^{\mathbb{R}^m}.$$

Очевидно, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ $G_\varepsilon(\omega) \neq \varnothing$ на множестве $\operatorname{dom} G$. Поэтому при $\varepsilon \to 0$ для каждого $y \in \mathbb{R}^m$ скалярная функция $\rho(y, G_\varepsilon(\omega))$ сходится к функции $\rho(y, G(\omega))$ на множестве $\operatorname{dom} G$. Заметим, что $\operatorname{gr} G_\varepsilon = \bigcap_{x \in X_\varepsilon} \operatorname{gr} F_{D_\varepsilon^*}$ — замкнутое множество в $\Omega \times \mathbb{R}^m$. Значит, для любого замкнутого множество $C \subset \mathbb{R}^m$ множество $G_\varepsilon^{-1}(C) = \{\omega \in \Omega_\varepsilon : G_\varepsilon(\omega) \cap C \neq \varnothing\}$ замкнуто в Ω и, следовательно, $\mathfrak{L}$-измеримо. Поэтому функция $\rho(y, G(\omega))$ будет $\mathfrak{L}$-измеримой при всех $y \in \mathbb{R}^m$ на $\operatorname{dom} G$ как предел последовательности $\mathfrak{L}$-измеримых функций. По теореме о характеризации многозначное отображение $G(\omega) = \bigcap_{x \in X} F(\omega, x)$, $G : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^m}$, $\mathfrak{L}$-измеримо на множестве $\operatorname{dom} G$.

СХЕМА МЕТОДА РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описана равенством

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t, \tau) \varphi(u(\tau), \upsilon(\tau)) d\tau,\ t \geq 0. \tag{6}$$

Здесь $z(t) \in \mathbb{R}^n$, функция $g(t)$, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+ = \{t : t \geq 0\}$, $\mathfrak{L}$-измерима и ограничена при $t > 0$. Далее для краткости вместо $\mathfrak{L}$-измеримости будем писать измеримость. Матричная функция $\Omega(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, измерима по t и суммируема по τ для каждого $t \in \mathbb{R}_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u, \upsilon)$, $\varphi : U \times V \to \mathbb{R}^n$, которая предполагается непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V, т.е. $U \in K(\mathbb{R}^m)$, $V \in K(\mathbb{R}^l)$, m, l, n — натуральные числа. Управления игроков $u(\tau)$, $u : \mathbb{R}_+ \to U$, и $\upsilon(\tau)$, $\upsilon : \mathbb{R}_+ \to V$, — измеримые функции времени.

Кроме процесса (6), задано терминальное множество M^*, имеющее цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \tag{7}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а $M \in K(L)$, где L — ортогональное дополнение к M_0 в $\mathbb{R}^n$.

Цели первого u и второго υ игроков противоположны. Первый старается вывести траекторию процесса (6) на терминальное множество за кратчайшее время, а второй — максимально оттянуть момент попадания траектории на множество M^* или вообще избежать встречи.

Представление решения динамической системы в виде (6) позволяет в единой схеме рассмотреть широкий круг функционально-дифференциальных систем, функционирующих в условиях конфликта, в частности, систем уравнений с классическими дробными производными Римана–Лиувилля, регуляризованными дробными производными Капуто, секвенциальными дробными производными Миллера–Росса [26]. Аналогичное представление в дискретной ситуации дает возможность исследовать многошаговые процессы и импульсные системы [26].

Конкретный вид функций $g(t)$ и матричной функции $\Omega(t,\tau)$ определяет тип конфликтно-управляемого процесса [27].

Примем сторону первого игрока и будем ориентироваться на выбор противником в качестве управления произвольной измеримой функции, которая принимает значения из V. Если игра (6), (7) происходит на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока в момент t выбираем на основании информации о $g(T)$ и $v_t(\cdot)$, т.е. в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \quad t \in [0, T], \quad u(t) \in U, \tag{8}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t]\}$ — предыстория управления второго игрока до момента t, или в виде контруправления

$$u(t) = u(g(T), v(t)), \quad t \in [0, T], \quad u(t) \in U. \tag{9}$$

Если, в частности, $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матричная экспонента, то формула (6) является известной формулой Коши для квазилинейного конфликтно-управляемого процесса. Управление $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реализует квазистратегию [41], а контруправление [2] $u(t) = u(z_0, v(t))$ предписано стробоскопической стратегией Хайека [39].

Цель работы — установить для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) достаточные условия окончания игры сближения за гарантированное время (аналога метода разрешающих функций [7–9] в классе стробоскопических стратегий) и сравнить их с первым прямым методом Л.С. Понтрягина [3, 6].

Обозначим π ортопроектор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в L. Положив $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v): u \in U\}$, рассмотрим многозначные отображения

$$W(t,\tau,v) = \pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,v), \quad W(t,\tau) = \bigcap_{v \in V} W(t,\tau,v)$$

на множествах $\Delta \times V$ и Δ соответственно, где конус $\Delta = \{(t,\tau): 0 \le \tau \le t < \infty\}$. Предположим, что многозначное отображение $W(t,\tau,v)$ имеет замкнутые значения на множестве $\Delta \times V$.

Условие Понтрягина. Многозначное отображение $W(t,\tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

С учетом предположений о матричной функции $\Omega(t,\tau)$ и следствия 2 можно сделать вывод, что при любом фиксированном $t > 0$ вектор-функция $\pi\Omega(t,\tau)\varphi(u,v)$ будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримой по $(\tau, v) \in [0, t] \times V$ и непрерывной по $u \in U$. Поэтому на основании теоремы о прямом образе [30, с. 314] при любом фиксированном $t > 0$ многозначное отображение $W(t,\tau,v)$ имеет замкнутые значения и является $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$-измеримым по $(\tau, v) \in [0, t] \times V$. Тогда в силу леммы 5 многозначное отображение $W(t,\tau)$ будет измеримым по $\tau \in [0, t]$ замкнутозначным отображением.

Обозначим $P(\mathbb{R}^n)$ совокупность непустых замкнутых множеств пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда, очевидно, $W(t,\tau,v): \Delta \times V \to P(R^n)$, $W(t,\tau): \Delta \to P(R^n)$. В этом случае принято считать, что измеримые по τ многозначные отображения $W(t,\tau,v)$ и $W(t,\tau)$ являются нормальными [17].

Из условия Понтрягина и теоремы об измеримом селекторе [17, 30] вытекает, что при любом $t \ge 0$ существует хотя бы один измеримый по τ селектор $\gamma(t,\tau)$ такой, что $\gamma(t,\tau) \in W(t,\tau)$, $(t,\tau) \in \Delta$. Обозначим множество таких селекторов Γ_t и введем функцию

$$\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t,\tau) d\tau, \tag{10}$$

где $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma = \bigcup_{t \ge 0} \Gamma_t$. В силу предположений селектор $\gamma(t,\tau)$ является суммируемой по τ, $\tau \in [0,t]$, функцией при любом $t > 0$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v) = \{\alpha \ge 0\colon\ [W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)] \bigcap \alpha[M - \xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))] \ne \varnothing\},$$
$$\mathfrak{A}\colon \Delta \times V \to 2^{\mathbb{R}_+}, \tag{11}$$

и его опорную функцию в направлении $+1$ $\alpha(t,\tau,v) = \sup\{\alpha\colon\ \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,v)\}$, $(t,\tau) \in \Delta$, $v \in V$. Данную функцию называют разрешающей [7].

Для того чтобы подчеркнуть роль функционалов Минковского и обратных к нему отображений в схеме метода, выразим функцию $\alpha(t,\tau,v)$ по-другому. Для этого введем функцию

$$\alpha_X(p) = \sup\{\alpha \ge 0\colon \alpha p \in X\},\ p \in \mathbb{R}^n,\ X \in P(\mathbb{R}^n),\ \ 0 \in X.$$

Тогда

$$\alpha(t,\tau,v) = \sup_{m \in M} \alpha_{W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)}(m - \xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))).$$

Поскольку выполнено условие Понтрягина, многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ на множестве $\Delta \times V$ имеет непустой замкнутый образ. Следует также заметить, что при $\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) \in M$ имеем $\mathfrak{A}(t,\tau,v) = [0,+\infty)$ и соответственно $\alpha(t,\tau,v) = +\infty$ при любых $\tau \in [0,t]$ и $v \in V$.

Учитывая, что многозначное отображение $G(\tau,v) = W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)$ имеет замкнутые значения и $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримо по совокупности $(\tau,v) \in [0,t] \times V$, а многозначное отображение $F(\tau,v,\alpha) = \alpha[M - \xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))]$ имеет замкнутые значения и является отображением Каратеодори, на основании леммы 4 можно заключить, что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ имеет замкнутые значения и $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримо по совокупности $(\tau,v) \in [0,t] \times V$ при каждом фиксированном $t > 0$. При этом, если $\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) \notin M$, то разрешающая функция $\alpha(t,\tau,v)$ будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримой по совокупности $(\tau,v) \in [0,t] \times V$ при каждом фиксированном $t > 0$ в силу теоремы об опорной функции [30, с. 317].

Рассмотрим множество

$$T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \ge 0\colon\ \inf_{v(\cdot)} \int_0^t \alpha(t,\tau,v(\tau))\, d\tau \ge 1 \right\}. \tag{12}$$

Поскольку функция $\alpha(t,\tau,v)$ является $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримой по τ, v, она суперпозиционно измерима, т.е. $\alpha(t,\tau,v(\tau))$ — измеримая функция при любой измеримой функции $v(\tau)$, $v(\tau) \in V$.

Если $\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) \in M$, то $\alpha(t,\tau,v) = +\infty$ для $\tau \in [0,t]$, $v \in V$ и в этом случае значение интеграла в соотношении (12) естественно положить равным $+\infty$, а соответствующее неравенство будет выполнено автоматически. В случае, когда неравенство в фигурных скобках в (12) не выполняется при всех $t > 0$, полагаем, что $T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина, множество M — выпуклое и для заданной функции $g(\cdot)$ и некоторого селектора $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma$, $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\neq\varnothing$. Тогда траекторию процесса (6) можно привести на терминальное множество (7) в момент T с помощью управления вида (8).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$, $\upsilon\colon[0,T]\to V$, — произвольная измеримая функция.

Рассмотрим случай $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\notin M$. Введем контрольную функцию $h(t)=1-\int\limits_0^t\alpha(T,\tau,\upsilon(\tau))d\tau,\ t\in[0,T]$. Функция $\alpha(T,\tau,\upsilon)$, как было отмечено ранее, $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измерима по (τ,υ), $\tau\in[0,T]$, $\upsilon\in V$, а значит, она суперпозиционно измерима (следствие 1) и $\alpha(T,\tau,\upsilon(\tau))$ — измеримая функция τ. Отсюда вытекает, что $h(t)$ является абсолютно непрерывной, а значит, непрерывной, она не возрастает ($\alpha(T,\tau,\upsilon)\geq0$ по определению) и $h(0)=1$. Поскольку $h(T)\leq0$, существует такой момент времени t_*, $t_*=t(\upsilon(\cdot))$, $t_*\in(0,T]$, что $h(t_*)=0$.

Интервалы времени $[0,t_*)$ и $[t_*,T]$ в дальнейшем будем называть активным и пассивным соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначное отображение

$$U(\tau,\upsilon)=\{u\in U:\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,\upsilon)-\gamma(T,\tau)\in$$
$$\in\alpha(T,\tau,\upsilon)[M-\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))]\},\ \tau\in[0,T],\ \upsilon\in V. \quad (13)$$

В силу следствия 3 оно $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо, а значит, согласно теореме об измеримом селекторе [30, с. 308] в многозначном отображении $U(\tau,\upsilon)$ существует хотя бы один $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $u(\tau,\upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Обозначим $u(\tau)=u(\tau,\upsilon(\tau))$. Управление первого игрока на активном интервале положим равным $u(\tau)$.

Рассмотрим пассивный интервал $[t_*,T]$. Положим в выражении (13) при $\tau\in[t_*,T]$, $\upsilon\in V$, разрешающую функцию $\alpha(T,\tau,\upsilon)\equiv0$. Получим многозначное отображение

$$U_0(\tau,\upsilon)=\{u\in U:\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,\upsilon)-\gamma(T,\tau)=0\}. \quad (14)$$

Как и в предыдущем случае, из следствия 3 и теоремы об измеримом селекторе вытекает, что в $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримом замкнутозначном отображении $U_0(\tau,\upsilon)$ существует $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор. Обозначим его $u_0(\tau,\upsilon)$ и управление преследователя на пассивном интервале выберем равным $u_0(\tau)=u_0(\tau,\upsilon(\tau))$.

В случае $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\in M$ управление первого игрока выберем на всем интервале $[0,T]$ в виде $u_0(\tau)=u_0(\tau,\upsilon(\tau))$, где $u_0(\tau,\upsilon)$ — измеримый селектор многозначного отображения $U_0(\tau,\upsilon)$. Покажем, что при выборе управлений первым игроком на активном и пассивном интервалах по указанным правилам траектория системы (6) будет приведена на терминальное множество в момент T при любых допустимых управлениях второго игрока.

Рассмотрим сначала случай $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\notin M$. Из формулы (6) имеем

$$\pi z(T)=\pi g(T)+\int\limits_0^T\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u(\tau),\upsilon(\tau))d\tau. \quad (15)$$

Используя соотношения (13), (14), из (15) получаем включение

$$\pi z(T)\in\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))[1-\int\limits_0^{t_*}\alpha(T,\tau,\upsilon(\tau))d\tau]+\int\limits_0^{t_*}\alpha(T,\tau,\upsilon(\tau))Md\tau. \quad (16)$$

Поскольку M — выпуклый компакт, а $\alpha(T,\tau,\upsilon(\tau))$ — неотрицательная функция для $\tau\in[0,\ t_*)$ и $\int\limits_0^{t_*}\alpha(T,\tau,\upsilon(\tau))d\tau=1$, то $\int\limits_0^{t_*}\alpha(T,\tau,\upsilon(\tau))\ M\ d\tau=M$. Учитывая описанное выше, из (16) получаем $\pi z(T)\in M$ или $z(T)\in M^*$.

Пусть $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\in M$. Тогда из равенства (15) с учетом соотношения (14) получим $\pi z(T)=\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\in M$.

Теорема доказана.

Замечание 1. При $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\in M$ управление первого игрока можно выбрать в виде $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримого селектора отображения $U(\tau,\upsilon)$, где в (13) вместо $\alpha(T,\tau,\upsilon)$ стоит произвольная неотрицательная измеримая функция $\alpha(T,\tau)$ такая, что $\int\limits_0^T \alpha(T,\tau)\,d\tau=1$, т.е. $1/T,\ 2\tau/T^2,\ 3\tau^2/T^3,\ e^\tau/e^T-1$ и т.д., поскольку $\mathfrak{A}(T,\tau,\upsilon)=[0,\infty]$ для $\tau\in[0,T],\ \upsilon\in V$.

Замечание 2. Отметим, что точки множества M, которые принимают участие в реализации процесса сближения при формировании управления как селектора отображения (13), являются селекторами многозначного отображения

$$\mathfrak{M}(T,\tau,\upsilon)=\{m\in M:\alpha(T,\tau,\upsilon)[m-\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))]\in$$
$$\in W(T,\tau,\upsilon)-\gamma(T,\tau)\},\tau\in[0,T],\upsilon\in V.$$

Согласно следствию 3 это отображение $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо, что позволяет выбирать подходящий селектор.

УСЛОВИЯ ЗАВЕРШЕНИЯ ИГРЫ В КЛАССЕ СТРОБОСКОПИЧЕСКИХ СТРАТЕГИЙ

Из доказательства теоремы 1 видно, что преследователь в момент t использует информацию о $\upsilon_t(\cdot)$, причем она необходима лишь для определения момента переключения t_*, который разделяет активный и пассивный интервалы. На самих интервалах преследователь применяет контруправление, которое определяется стробоскопической стратегией. В этих условиях представляет интерес вопрос, когда в теореме 1 для реализации гарантированного времени можно ограничиться контруправлениями. Чтобы дать ответ, необходимо сформулировать определенные условия.

Условие 1. При $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\notin M$ отображение $\mathfrak{A}(T,\tau,\upsilon)$, $T\ge\tau\ge0$, $\upsilon\in V$, выпуклозначно, т.е. $\mathfrak{A}(T,\tau,\upsilon)=[0,\alpha(T,\tau,\upsilon)]$.

Условие 2. При $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\notin M$ функция $\inf\limits_{\upsilon\in V}\alpha(T,\tau,\upsilon)$ измерима по $\tau,\tau\in[0,T]$, и имеет место соотношение

$$\inf_{\upsilon(\cdot)}\int\limits_0^T\alpha(T,\tau,\upsilon(\tau))\,d\tau=\int\limits_0^T\inf_{\upsilon\in V}\alpha(T,\tau,\upsilon)\,d\tau.$$

Достаточные условия перестановочности инфимума и интеграла содержатся, например, в [17] и выполнены для достаточно широких классов функций.

Теорема 2. Пусть для игровой задачи (6), (7) выполнено условие Понтрягина и множество M выпукло, причем для заданной функции $g(\cdot)$ и селектора $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma$ для некоторого $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\neq\varnothing$ выполнены условия 1, 2. Тогда траекторию процесса (6) можно привести на терминальное множество (7) в момент T с помощью определенного контруправления (9).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau),\ \upsilon:[0,T]\to V$, — произвольная измеримая функция. Рассмотрим сначала случай $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\notin M$. Для этого с учетом условия 2 обозначим $\alpha(T)=\int\limits_0^T \inf\limits_{v\in V}\alpha(T,\tau,v)\,d\tau$ и положим $\alpha^*(T,\tau)=[1/\alpha(T)]\inf\limits_{v\in V}\alpha(T,\tau,v)$. Поскольку $\alpha(T)\geq 1$ согласно формуле (12) и выполнено условие 1, функция $\alpha^*(T,\tau)$, $\alpha^*(T,\tau)\leq\alpha(T,\tau,v)$, $\tau\in[0,T]$, $v\in V$, является измеримым селектором для каждого из многозначных отображений $\mathfrak{A}(T,\tau,v)$, $v\in V$, т.е. $\alpha^*(T,\tau)\in\mathfrak{A}(T,\tau,v)$, $\tau\in[0,T]$, $v\in V$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U^*(\tau,v)=\{u\in U:\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(T,\tau)\in\alpha^*(T,\tau)[M-\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))]\}. \quad (17)$$

Из выражения (17) вытекает, что $U^*(\tau,v)$ компактнозначно и $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо, поэтому согласно теореме об измеримом селекторе в нем существует $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $u^*(\tau,v)$, который, в свою очередь, является суперпозиционно измеримой функцией. Положим управление преследователя равным $u^*(\tau)=u^*(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,T]$.

В случае $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\in M$ выберем управление первого игрока на интервале $[0,T]$ в виде $u_0(\tau)=u_0(\tau,v(\tau))$, где $u_0(\tau,v)$ — некоторый измеримый селектор отображения $U_0(\tau,v)$, которое задается выражением (14) и фигурирует в доказательстве теоремы 1.

Покажем, что в каждом из случаев траектория процесса (6) будет приведена на терминальное множество в момент T.

Если $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\notin M$, то из соотношения (15), учитывая включение в (17), получим

$$\pi z(T)\in\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\left[1-\int\limits_0^T\alpha^*(T,\tau)d\tau\right]+\int\limits_0^T\alpha^*(T,\tau)Md\tau. \quad (18)$$

Так как M — выпуклый компакт, а $\alpha^*(T,\tau)$ — неотрицательная функция для $\tau\in[0,T]$ и $\int\limits_0^T\alpha^*(T,\tau)d\tau=1$, то $\int\limits_0^T\alpha^*(T,\tau)Md\tau=M$. Учитывая это, из включения (18) получим $\pi z(T)\in M$.

В случае $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\in M$ с учетом закона выбора управления первым игроком и формулы (15) непосредственно имеем $\pi z(T)\in M$.

Замечание 3. Условие 1 выполнено автоматически, например, если отображение $W(T,\tau,v)$ выпуклозначно для $\tau\in[0,T]$, $v\in V$, а множество M — выпуклый компакт [45].

Ослабим еще условие 1 с сохранением утверждения теоремы 2.

Условие 3. В ситуации $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\notin M$ существует такой измеримый селектор $\alpha(T,\tau)$, $\alpha(T,\tau)\in\mathfrak{A}(T,\tau,v)$, $T\geq\tau\geq 0$, $v\in V$, который не зависит от v и удовлетворяет условию $\int\limits_0^T\alpha(T,\tau)d\tau=1$.

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau)=\bigcap_{v\in V}\mathfrak{A}(t,\tau,v),\quad t\geq\tau\geq 0,$$

которое имеет непустой образ, поскольку по крайней мере $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)$ для $t \geq \tau \geq 0,\ v \in V$, и его опорную функцию в направлении $+1$

$$\alpha(t, \tau) = \sup\{\alpha \geq 0 : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau)\}.$$

Если $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \notin M$, то отображение $\mathfrak{A}(t, \tau)$ замкнутозначно и в силу леммы 5 измеримо по τ, $\tau \in [0, t]$, а значит, согласно теореме об опорной функции измеримой по τ является и функция $\alpha(t, \tau)$.

Введем множество

$$\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \alpha(t, \tau) d\tau \geq 1 \right\}. \tag{19}$$

Если при некотором $t > 0$ $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \in M$, то, очевидно, $\mathfrak{A}(t, \tau) = [0, +\infty)$, а $\alpha(t, \tau) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, и в этом случае естественно положить значение интеграла в (19) равным $+\infty$, а соответствующее неравенство будет выполнено автоматически. Если неравенство в (19) не выполняется для всех $t > 0$, то положим $\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина и $M = \operatorname{co} M$, причем для заданной функции $g(\cdot)$ и некоторого селектора $\gamma(\cdot, \cdot) \in \Gamma$ $\Theta \in \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \neq \varnothing$. Тогда траекторию процесса (6) можно привести на терминальное множество (7) в момент Θ с помощью управления вида (9).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v : [0, \Theta] \to V$, — произвольная измеримая функция. Рассмотрим случай $\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta, \cdot)) \notin M$. Введем контрольную функцию $h(t) = 1 - \int_0^t \alpha(\Theta, \tau) d\tau$, $t \in [0, \Theta]$. Функция $h(t)$ является абсолютно непрерывной на $[0, \Theta]$. Она не возрастает, причем $h(0) = 1$, а $h(\Theta) \leq 0$. Поэтому существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, \Theta]$, что $h(t_*) = 0$. Опишем способ управления первым игроком на интервале $[0, t_*)$. Для этого рассмотрим многозначное отображение

$$\widetilde{U}(\tau, v) = \{u \in U : \pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(\Theta, \tau) \in$$

$$\in \alpha(\Theta, \tau)[M - \xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta, \cdot))]\}, \tau \in [0, \Theta], v \in V. \tag{20}$$

Отображение $\widetilde{U}(\tau, v)$ компактнозначно и в силу следствия 3 является $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримым. Поэтому согласно теореме об измеримом селекторе у него существует $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор $\widetilde{u}(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Положим $\widetilde{u}(\tau) = \widetilde{u}(\tau, v(\tau))$ и выберем его в качестве управления первого игрока на интервале $[0, t_*)$.

Положив в (20) $\alpha(\Theta, \tau) = 0$, выберем управление преследователя на интервале $[t_*, \Theta]$ в виде измеримого селектора $\widetilde{u}(\tau)$ компактнозначного измеримого многозначного отображения:

$$\widetilde{U}_0(\tau) = \{u \in U : \pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(u, v(\tau)) - \gamma(\Theta, \tau) = 0\}. \tag{21}$$

В случае $\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta, \cdot)) \in M$ в качестве управления первого игрока $\widetilde{u}(\tau)$ на всем интервале $[0, \Theta]$ выберем произвольный измеримый селектор отображения $\widetilde{U}_0(\tau)$.

Учитывая законы выбора управления преследователем, проследим за соответствующей траекторией $z(t)$, $t \in [0, \Theta]$, процесса (6).

При $\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta, \cdot)) \notin M$ из формулы (15) и соотношений (20), (21) имеем

$$\pi z(\Theta) \in \xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta, \cdot))[1 - \int_0^{t_*} \alpha(\Theta, \tau) d\tau] + \int_0^{t_*} \alpha(\Theta, \tau) M d\tau. \qquad (22)$$

Поскольку $\alpha(\Theta, \tau) \geq 0$ для $\tau \in [0, t_*)$ и $\int_0^{t_*} \alpha(\Theta, \tau) d\tau = 1$, а $M \in \operatorname{co} K(\mathbb{R}^n)$, то $\int_0^{t_*} \alpha(\Theta, \tau) M d\tau = M$. Далее, из формулы (22) получим включение $\pi z(\Theta) \in M$.

Пусть $\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta, \cdot)) \in M$. Тогда из формулы (15) с учетом равенства в (21) имеем $\pi z(\Theta) = \xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta, \cdot)) \in M$.

Следствие 4. Если для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина, $M = \operatorname{co} M$, для заданной функции $g(\cdot)$ и некоторого селектора $\gamma(\cdot, \cdot) \in \Gamma$ множества $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \neq \varnothing$, $\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \neq \varnothing$ и выполнены условия 1, 2, то $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$.

В общем случае всегда имеет место включение $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \supset \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$.

В дальнейшем будем предполагать, что в числовых множествах $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$, $\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ существуют минимальные элементы $T_0(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ и $\Theta_0(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$.

СВЯЗЬ С ПЕРВЫМ ПРЯМЫМ МЕТОДОМ ПОНТРЯГИНА

Из публикаций, посвященных теории дифференциальных игр [3, 6, 7], хорошо известен первый прямой метод Понтрягина, который дает достаточные условия окончания дифференциальной игры сближения за определенное гарантированное время в классе стробоскопических стратегий. Имеется ввиду доказательство П.Б. Гусятникова и М.С. Никольского, использующее для построения управления теорему измеримого выбора Филиппова–Кастена. Полученные выше результаты целесообразно сравнить с первым прямым методом Понтрягина.

Рассмотрим функцию Понтрягина для конфликтно-управляемого процесса (6), (7)

$$P(g(\cdot)) = \inf \left\{ t \geq 0 \colon \pi g(t) \in M - \int_0^t W(t, \tau) d\tau \right\}. \qquad (23)$$

Здесь, как и раньше, интеграл от многозначного отображения — интеграл Аумана [46]. Если включение в фигурных скобках не выполняется ни для каких $t \geq 0$, то положим $P(g(\cdot)) = +\infty$.

Теорема 4. Пусть для конфликтно-управляеого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина, точная нижняя грань в (23) достигается и $P = P(g(\cdot)) < +\infty$. Тогда траекторию процесса (6) можно привести на терминальное множество (7) в момент P с помощью управления вида (9).

Доказательсво. Из включения в (23) и предположения теоремы вытекает $\pi g(P) \in M - \int_0^P W(P, \tau) d\tau$. Последнее включение означает, что существует такая точка $m \in M$ и по определению интеграла Аумана такой измеримый селектор $\gamma(P, \cdot) \in \Gamma_P$, что

$$\pi g(P) = m - \int_0^P \gamma(P, \tau) d\tau. \qquad (24)$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$U_0(\tau, v) = \{u \in U\colon \pi\Omega(P, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(P, \tau) = 0\},$$
$$\tau \in [0, P], v \in V, \gamma(P, \tau) \in W(P, \tau). \tag{25}$$

Пусть $v(\tau)$, $v\colon [0, P] \to V$, — произвольная измеримая функция. Тогда из соотношения (25) вытекает, что отображение $U_0(\tau) = U_0(\tau, v(\tau))$ — компактнозначное измеримое многозначное отображение на интревале $[0, P]$. Согласно теореме измеримого выбора в нем существует измеримый селектор $u_0(\tau)$, который и выберем в качестве управления первого игрока на интервале $[0, P]$.

Из формулы (6) и равенств (24), (25) получим $\pi z(P) = m \in M$.

Теорема доказана.

Из теоремы 4, которая обобщает первый прямой метод Понтрягина на конфликтно-управляемые процессы вида (6), вытекают следствия.

Следствие 5. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина. Тогда для того чтобы $\pi g(t) \in M - \int_0^t W(t, \tau) d\tau$, $t \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой селектор $\gamma(t, \cdot) \in \Gamma_t$, что

$$\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \in M. \tag{26}$$

Заметим, что в схеме метода разрешающих функций выполнение включения (26) приводит к вырождению упомянутых выше функций, т.е. их значения становятся равными $+\infty$. Эта ситуация полностью соответствует первому прямому методу Понтрягина, и игра в этом случае может быть окончена за время Понтрягина в классе стробоскопических стратегий без каких-либо предположений относительно параметров конфликтно-управляемого процесса (6), (7), кроме, естественно, условия Понтрягина.

Следствие 6. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина. Тогда существует такой селектор $\gamma(\cdot, \cdot)$, что $T_0(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \leq P(g(\cdot))$ для любых измеримых ограниченных для $t > 0$ функций $g(t)$.

Следствие 7. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина. Тогда существует такой селектор $\gamma(\cdot, \cdot) \in \Gamma$, что $\Theta_0(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \leq P(g(\cdot))$ для любых измеримых ограниченных для $t > 0$ функций $g(t)$.

СРАВНЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННЫХ ВРЕМЕН

Выразим время окончания игры (6), (7) по первому прямому методу Понтрягина (23) в форме разрешающих функций. Для этого рассмотрим многозначное отображение

$$B(t, \tau) = \{\beta \geq 0\colon [W(t, \tau) - \gamma(t, \tau)] \bigcap \beta[M - \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))] \neq \varnothing\} \tag{27}$$

и его опорную функцию в направлении $+1$

$$\beta(t, \tau) = \sup\{\beta\colon \beta \in B(t, \tau)\}, \ t \geq \tau \geq 0. \tag{28}$$

Здесь $\gamma(t, \tau)$ — измеримый по τ селектор введенного ранее многозначного отображения $W(t, \tau)$, а функция $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))$ задается выражением (10).

Если $\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \overline{\in} M$, то согласно лемме 4 отображение $B(t, \tau)$ измеримо и замкнутозначно по τ, $\tau \in [0, t]$. Соответственно на основании теоремы об опорной функции [30] измеримой по τ является функция $\beta(t,\tau)$. Если $\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))\in M$, то $B(t,\tau)=[0,+\infty)$, а $\beta(t,\tau)=+\infty$ для всех $\tau\in[0,t]$.

Введем функцию времени

$$P(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\inf\{t\geq 0\colon \int_0^t \beta(t,\tau)d\tau\geq 1\}, \qquad (29)$$

которую положим равной $+\infty$, если неравенство в фигурных скобках не имеет места при всех $t\geq 0$.

Теорема 5. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина, $M=\mathrm{co}M$ и для заданной функции $g(\cdot)$, селектора $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma$ точная нижняя грань в (29) достигается, причем $P=P(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))<+\infty$. Тогда траекторию процесса (6) можно привести на терминальное множество (7) в момент P с помощью определенного контруправления.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 с той лишь разницей, что вместо Θ будет момент P, а вместо функции $\alpha(\Theta,\tau)$ — функция $\beta(P,\tau)$.

Теорема 6. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина, $M=\mathrm{co}\,M$ и точная нижняя грань в (29) достигается. Тогда для любой функции $g(t)$ при $t>0$ измеримой и ограниченной $\min\limits_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma} P(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=P(g(\cdot))$.

Для более простой динамики этот результат доказан в [7]. Доказательство теоремы 6 аналогично этому доказательству.

Установим соотношения между функциями времени $T_0(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ и $P(g(\cdot))$ для метода разрешающих функций и первого прямого метода Понтрягина.

Теорема 7. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина и условие 1, терминальное множество M^* является аффинным многообразием, т.е. $M=\{m\}$ — точка, и точные нижние грани по t в (12), (29) достигаются. Тогда

$$\min_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma} T_0(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=P(g(\cdot))$$

для всех измеримых ограниченных при $t>0$ функций $g(t)$.

Доказательство. В силу следствий 5, 6 достаточно доказать неравенство

$$P(g(\cdot))\leq T_0(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\quad \forall\,\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma, g(\cdot) \qquad (30)$$

в случае $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\,\overline{\in}\, M$, где $T=T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))<+\infty$.

Пусть игру (6), (7) можно закончить в момент $T_0(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ в классе квазистратегий. Тогда, учитывая условие 1, в силу теоремы 2 игру можно закончить в момент T в классе стробоскопических стратегий, причем для $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\,\overline{\in}\, M$ этот процесс реализуется с помощью разрешающей функции $\alpha^*(T,\tau)=1/\alpha(T)\inf\limits_{v\in V}\alpha(T,\tau,v)$, где $\alpha(T)=\int_0^T \inf\limits_{v\in V}\alpha(T,\tau,v)\,d\tau$. Поскольку $\alpha^*(T,\tau)\in\mathfrak{A}(T,\tau,v)$, $\tau\in[0,T]$, для произвольного $v\in V$, то

$$\alpha^*(T,\tau)[m-\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))]\in W(T,\tau)-\gamma(T,\tau). \qquad (31)$$

Проинтегрируем по τ от 0 до T включение (31). Тогда получим

$$\int_0^T \alpha^*(T,\tau)\,d\tau\,[m-\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))]\in\int_0^T W(T,\tau)d\tau-\int_0^T \gamma(T,\tau)d\tau.$$

С учетом выражения для $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))$ и соотношения $\int\limits_0^T \alpha^*(T,\tau)d\tau = 1$ имеем $\pi g(T) \in m - \int\limits_0^T W(T,\tau)d\tau$. Последнее включение согласно формуле (23) дает нам неравенство (30).

Следствие 8. Пусть для кофликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина, терминальное множество M^* является аффинным многообразием ($M = \{m\}$) и точные нижние грани по t в (19), (29) достигаются. Тогда для всех измеримых ограниченных при $t > 0$ функций $g(t)$ справедливо

$$\min_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma} \Theta_0(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = P(g(\cdot)).$$

СЛУЧАЙ ФИКСИРОВАННЫХ ТОЧЕК ПРИЦЕЛИВАНИЯ НА ТЕРМИНАЛЬНОМ МНОЖЕСТВЕ

Как видно из определения многозначного отображения $\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)$ в (11), при $\alpha = \alpha(t,\tau,\upsilon)$ касание множеств, участвующих в пересечении, происходит, вообще говоря, в различных точках при разных значениях аргументов. При этом точки касания левого множества определяют управление преследователя, а точки касания правого множества — точки из M, куда прицеливается движение. В общей схеме метода предполагается, что $M = \operatorname{co} M$.

Установим еще одну форму метода разрешающих функций с фиксированными точками (не изменяющимися со временем) множества M, которое, вообще говоря, не является выпуклым.

Пусть $m \in M$ и $\eta(t,m) = \xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) - m$, $\gamma(t,\cdot) \in \Gamma_t$, $t \ge 0$. Введем многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon,m) = \{\alpha \ge 0 : -\alpha\eta(t,m) \in W(t,\tau,\upsilon) - \gamma(t,\tau)\}$$

и его опорную функцию в направлении $+1$

$$\alpha(t,\tau,\upsilon,m) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon,m)\},\ t \ge \tau \ge 0,\ \upsilon \in V.$$

Поскольку предполагается, что выполнено условие Понтрягина, то $\operatorname{dom}\mathfrak{A} = \Delta \times V \times M$. Заметим, что при $\eta(t,m) = 0$ $\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon,m) = [0,+\infty)$ для $\tau \in [0,t]$, $\upsilon \in V$, $m \in M$ и соответственно $\alpha(t,\tau,\upsilon,m) \equiv +\infty$.

В силу следствия 3 многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon,m)$ является $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримым по τ, υ, $\upsilon \in V$, $\tau \in [0,t]$, а согласно теореме об опорной функции разрешающая функция $\alpha(t,\tau,\upsilon,m)$ будет $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримой по τ, υ. Рассмотрим функцию

$$\mathfrak{T}(g(\cdot), m, \gamma(\cdot,\cdot)) = \inf\left\{ t \ge 0 : \inf_{\upsilon(\cdot)} \int\limits_0^t \alpha(t,\tau,\upsilon(\tau),m)d\tau \ge 1 \right\}. \tag{32}$$

Условие 4. Функция $\mathfrak{T}(g(\cdot), m, \gamma(\cdot,\cdot))$ полунепрерывна снизу по m, $m \in M$.

Тогда согласно теореме Вейерштрасса она порождает маргинальную функцию $\mathfrak{T}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \min\limits_{m\in M} \mathfrak{T}(g(\cdot), m, \gamma(\cdot,\cdot))$ и маргинальное многозначное отображение $\mathfrak{M}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \{m \in M : \mathfrak{T}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \mathfrak{T}(g(\cdot), m, \gamma(\cdot,\cdot))\} \subset M$. Заметим [7], что имеют место формулы для представления функций времени

$$T_0(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \inf\left\{ t \ge 0 : \inf_{\upsilon(\cdot)} \int\limits_0^t \max_{m\in M} \alpha(t,\tau,\upsilon(\tau),m)d\tau \ge 1 \right\},$$

$$\mathfrak{T}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\inf\left\{t\ge 0:\ \max_{m\in M}\inf_{v(\cdot)}\int_0^t \alpha(t,\tau,v(\tau),m)d\tau\ge 1\right\},$$

а также справедливо соотношение $\alpha(t,\tau,v)=\max_{m\in M}\alpha(t,\tau,v,m)$ для $t\ge\tau\ge 0$, $v\in V$, $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma$. Если $\eta(t,m)=0$, то $\inf_{v\in V}\alpha(t,\tau,v,m)=+\infty$ для $\tau\in[0,t]$ и значение интеграла в соотношении (32) естественно положить равным $+\infty$, а соответствующее неравенство будет выполнено автоматически. В случае, когда неравенство в (32) не выполняется при всех $t>0$ и $m\in M$, будем предполагать, что $\mathfrak{T}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=+\infty$.

Теорема 8. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина и условие 4, для заданной функции $g(\cdot)$ и некоторого селектора $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma$ внешняя точная нижняя грань достигается в (32) и $\mathfrak{T}=\mathfrak{T}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))<+\infty$. Тогда проекцию траектории процесса (6) $\pi z(t)$ можно привести в любую точку множества $\mathfrak{M}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ в момент $\mathfrak{T}$ с помощью управления первого игрока, назначенного соответствующей квазистратегией.

Доказательство. Пусть $m\in\mathfrak{M}(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$, а $v(\tau)\in V$, $\tau\in[0,\mathfrak{T}]$, — произвольная измеримая функция. Рассмотрим случай $\eta(\mathfrak{T},m)\ne 0$. Контрольную функцию выберем в виде $h(t)=1-\int_0^t\alpha(\mathfrak{T},\tau,v(\tau),m)d\tau$. Функция $\alpha(\mathfrak{T},\tau,v,m)$ является $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримой по (τ,v), $\tau\in[0,\mathfrak{T}]$, $v\in V$, а значит, она суперпозиционно измерима (следствие 1), т.е. $\alpha(\mathfrak{T},\tau,v(\tau),m)$ является измеримой функцией τ. Функция $h(t)$ непрерывна, и существует такой момент t_*, $t_*\in[0,\mathfrak{T}]$, что $h(t_*)=0$. Рассмотрим многозначное отображение

$$U(\tau,v,m)=\{u\in U:\pi\Omega(\mathfrak{T},\tau)\varphi(u,v)-\gamma(\mathfrak{T},\tau)=$$
$$=-\alpha(\mathfrak{T},\tau,v,m)\eta(\mathfrak{T},m)\},\tau\in[0,\mathfrak{T}],v\in V. \qquad (33)$$

В силу следствия 3 данное отображение $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо по (τ,v) и замкнутозначно, а значит, согласно теореме об измеримом селекторе в нем существует $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $u(\tau,v,m)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Обозначим $u(\tau,m)=u(\tau,v(\tau),m)$ и положим управление первого игрока на интервале $[0,t_*)$ равным $u(\tau,m)$. Положив в соотношении (33) $\alpha(\mathfrak{T},\tau,v,m)=0$, $\tau\in[t_*,\mathfrak{T}]$, $v\in V$, получим

$$U_0(\tau,v,m)=\{u\in U:\pi\Omega(\mathfrak{T},\tau)\varphi(u,v)-\gamma(\mathfrak{T},\tau)=0\},\ \tau\in[t_*,\mathfrak{T}],\ v\in V. \qquad (34)$$

Данное отображение компактнозначно и $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо. Как и в предыдущем случае, у него существует $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_0(\tau,v,m)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Положим управление преследователя на интервале $[t_*,\mathfrak{T}]$ равным $u_0(\tau,m)=u_0(\tau,v(\tau),m)$. В случае $\eta(t,m)=0$ управление первого игрока на интервале $[0,\mathfrak{T}]$ выберем в виде измеримой функции, как это было сделано на пассивном промежутке $[t_*,\mathfrak{T}]$. Проследим за соответствующими траекториями процесса (6).

При $\eta(\mathfrak{T},m)\ne 0$ из формулы (6) и соотношений (33), (34) имеем

$$\pi z(\mathfrak{T})=\eta(\mathfrak{T},m)\left[1-\int_0^{t_*}\alpha(\mathfrak{T},\tau,v(\tau),m)d\tau\right]+m.$$

Поскольку $h(t_*) = 0$, то $\pi z(\mathfrak{T}) = m$. При $\eta(\mathfrak{T}, m) = 0$ равенство $\pi z(\mathfrak{T}) = m$ вытекает из соотношений (6) и (34).

Следствие 9. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина. Тогда для того чтобы $\pi g(t) \in M - \int_0^t W(t, \tau) d\tau$, $t \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой измеримый селектор $\gamma(t, \cdot) \in \Gamma_t$ и элемент $m \in M$, что $\eta(t, m) = 0$.

Следствие 10. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина. Тогда

$$\inf_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma} T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \leq \inf_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma} \mathfrak{T}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \leq P(g(\cdot))$$

для любой измеримой ограниченной при $t > 0$ функции $g(t)$.

Следствие 11. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина, терминальное множество M^* — аффинное многообразие, т.е. $M = \{m\}$ — точка, и точные нижние грани по t в (12), (32) достигаются. Тогда для всех измеримых ограниченных при $t > 0$ функций $g(t)$ $\min_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma} T_0(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) =$ $= \min_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma} \mathfrak{T}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$, $t > 0$.

Условие 5. При заданной функции $g(\cdot)$ и выбранном селекторе $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma$ для элементов $\mathfrak{M}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ таких, что $\eta(\mathfrak{T}, m) \neq 0$, отображение $\mathfrak{A}(\mathfrak{T}, \tau, v, m)$, $\tau \in [0, \mathfrak{T}]$, $v \in V$, выпуклозначно, т.е. $\mathfrak{A}(\mathfrak{T}, \tau, v, m) = [0, \alpha(\mathfrak{T}, \tau, v, m)]$.

Условие 6. При $\eta(\mathfrak{T}, m) \neq 0$, $m \in \mathfrak{M}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ функция $\inf_{v\in V} \alpha(\mathfrak{T}, \tau, v, m)$ измерима по τ, $\tau \in [0, T]$, и имеет вид

$$\inf_{v(\cdot)} \int_0^{\mathfrak{T}} \alpha(\mathfrak{T}, \tau, v(\tau), m)\, d\tau = \int_0^{\mathfrak{T}} \inf_{v\in V} \alpha(\mathfrak{T}, \tau, v, m)\, d\tau.$$

Теорема 9. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнены условие Понтрягина и условия 4–6, в формулах (23), (32) точная нижняя грань по t достигается и $\mathfrak{T} < +\infty$. Тогда проекцию траектории процесса (6) на L можно привести в любую точку m, $m \in \mathfrak{M}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$, в момент $\mathfrak{T}$ с помощью контруправления первого игрока, причем

$$\min_{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma} \mathfrak{T}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = P(g(\cdot)).$$

Доказательство аналогично доказательству теорем 7 и 8.

ЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СОВПАДЕНИЯ И ОТЛИЧИЯ ГАРАНТИРОВАННЫХ ВРЕМЕН

Предыдущие утверждения, касающиеся сравнения гарантированных времен, дают достаточные условия их совпадения для любых функций $g(t)$. Рассмотрим ситуацию, когда для одних функций $g(t)$ гарантированные времена метода разрешающих функций и первого прямого метода Понтрягина совпадают, а для других — отличаются. Формально соответствующие условия выражаются в терминах конусов некоторых многозначных отображений. Введем многозначные отображения

$$\Phi(t, \tau, v) = W(t, \tau, v) \overset{*}{-} W(t, \tau),$$

$$K(t, \tau, v) = \mathrm{con}\, \Phi(t, \tau, v), K(t, \tau) = \bigcap_{v\in V} K(t, \tau, v), \quad t \geq \tau \geq 0.$$

Поскольку $W(t,\tau)\subset W(t,\tau,\upsilon)$, $t\ge\tau\ge 0$, $\upsilon\in V$, по построению, то $0\in\Phi(t,\tau,\upsilon)$. Отсюда вытекает, что многозначное отображение

$$\Lambda(t,\tau,\upsilon)=\{\lambda\ge 0\colon \Phi(t,\tau,\upsilon)\bigcap\lambda[M-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))]\ne\varnothing\},\ \ \gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma, \quad (35)$$

принимает значения, которые являются непустыми множествами.

В силу свойств многозначных отображений $W(t,\tau,\upsilon)$ и $W(t,\tau)$, операции геометрической разности Минковского и леммы 4 отображение $\Lambda(t,\tau,\upsilon)$ является $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримым по (τ,υ), $\tau\in[0,t]$, $\upsilon\in V$, и замкнутозначным.

Опорная функция отображения $\Lambda(t,\tau,\upsilon)$ в направлении +1 имеет вид

$$\lambda(t,\tau,\upsilon)=\sup\{\lambda\colon\lambda\in\Lambda(t,\tau,\upsilon)\}. \quad (36)$$

Согласно теореме об опорной функции многозначного отображения $\lambda(t,\tau,\upsilon)$ является $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримой функцией по (τ,υ), $\tau\in[0,t]$, $\upsilon\in V$.

Для заданной функции $g(\cdot)$ рассмотрим отображение $\Gamma(g(\cdot))=\{\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma\colon P(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=P(g(\cdot))\}$. В свою очередь, для $\gamma((\cdot,\cdot))\in\Gamma$ обозначим

$$Q(\gamma(\cdot,\cdot))=\{g(\cdot)\colon\lambda(t,\tau,\upsilon)+\beta(t,\tau)=\alpha(t,\tau,\upsilon)\ \ \forall\, 0\le\tau\le t\le P(g(\cdot)),\upsilon\in V\},$$

$$Q_*(\gamma(\cdot,\cdot))=\{g(\cdot)\colon\lambda(t,\tau,\upsilon)+\beta(t,\tau)\le\alpha(t,\tau,\upsilon)\ \ \forall\, 0\le\tau\le t\le P(g(\cdot)),\upsilon\in V\}.$$

Для фиксированных $g(\cdot)$ и $\gamma((\cdot,\cdot))\in\Gamma$ введем функции $\alpha(t)=\int\limits_0^t\inf\limits_{\upsilon\in V}\alpha(t,\tau,\upsilon)d\tau$ и $\beta(t)=\int\limits_0^t\beta(t,\tau)d\tau$, $t\ge 0$.

Теорема 10. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина, для заданной функции $g(\cdot)$ существует такой селектор $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma(g(\cdot))$, что $g(\cdot)\in Q_*(\gamma(\cdot,\cdot))$, причем $T=T_0(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))<+\infty$, для всех t, τ, υ, $0\le\tau\le t<P(g(\cdot))$, $\upsilon\in V$, выполнено условие

$$[M-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))]\bigcap K(t,\tau,\upsilon)\ne\varnothing, \quad (37)$$

функция $\lambda(t,\tau,\upsilon)$ полунепрерывна снизу по υ для $0\le\tau\le t<P(g(\cdot))$ и момент T — точка непрерывности функции $\alpha(t)$. Тогда

$$T_0(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))<P(g(\cdot)). \quad (38)$$

Доказательство. По условиям теоремы из соотношения (37) с учетом выражений (35), (36) вытекает, что функция $\lambda(t,\tau,\upsilon)$ строго положительна при всех допустимых значениях аргументов.

Поскольку она полунепрерывна сверху по υ [7], а по условию теоремы еще и снизу, то функция $\lambda(t,\tau,\upsilon)$ непрерывна по υ, $\upsilon\in V$, для $0\le\tau\le t<P(g(\cdot))$ и имеет вид

$$\min_{\upsilon\in V}\lambda(t,\tau,\upsilon)>0\ \ \forall\, 0\le\tau\le t<P(g(\cdot)). \quad (39)$$

Это означает в силу $g(\cdot)\in Q_*(\gamma(\cdot,\cdot))$, что $\inf\limits_{\upsilon\in V}\alpha(t,\tau,\upsilon)>\beta(t,\tau)$, $0\le\tau\le t<$ $<P(g(\cdot))$.

Поскольку момент T — точка непрерывности функции $\alpha(t)$, то $\alpha(T)=1>\beta(T)$.

Учитывая, что $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma(g(\cdot))$, из определения времен T и $P(g(\cdot))$ получим неравенство (38).

Замечание 4. Вместо полунепрерывности снизу функции $\lambda(t,\tau,\upsilon)$ по υ достаточно требовать только условие (39), а условие (37) эквивалентно включению

$$-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))\in\bigcap_{\upsilon\in V}[K(t,\tau,\upsilon)-M].$$

Теорема 11. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнено условие Понтрягина, для заданной функции $g(\cdot)$ существует такой селектор $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma(g(\cdot))$, что $g(\cdot)\in Q(\gamma(\cdot,\cdot))$, и для каждого набора t,τ, $0\le\tau\le t< P(g(\cdot))$, существует такое $v\in V$, что выполнено условие

$$[M-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))]\bigcap K(t,\tau,v)=\varnothing. \qquad (40)$$

Тогда

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=P(g(\cdot)). \qquad (41)$$

Доказательство. Из соотношения (40) вытекает, что $\min\limits_{v\in V}\lambda(t,\tau,v)=0$ для $0\le\tau\le t< P(g(\cdot))$, а поскольку $g(\cdot)\in Q(\gamma(\cdot,\cdot))$, то $\inf\limits_{v\in V}\alpha(t,\tau,v)=\beta(t,\tau)$, $0\le\tau\le t< P(g(\cdot))$. Поэтому $\alpha(t)=\beta(t)$, и с учетом $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma(g(\cdot))$ получим равенство (41).

Замечание 5. Условие (40) для удобства использования можно записать в виде $-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))\,\overline{\in}\bigcap_{v\in V}[K(t,\tau,v)-M]$.

Рассмотрим случай, когда терминальное множество является аффинным многообразием.

Условие 7. Отображение $\Lambda(t,\tau,v)$ выпуклозначно для $0\le\tau\le t< P(g(\cdot))$, $v\in V$.

Утверждение 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (6), (7) выполнены условие Понтрягина и условие 7, а $M=\{m\}$. Тогда для всех $0\le\tau\le t< P(g(\cdot))$, $\gamma(\cdot,\cdot)\in\Gamma$ имеем $\inf\limits_{v\in V}\lambda(t,\tau,v)=0.$

Доказательство. Для $0\le t< P(g(\cdot))$ справедливо $m-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))\ne 0$ в силу следствия 6. Поэтому по определению функции $\lambda(t,\tau,v)$, $0\le\tau\le t< P(g(\cdot))$, $v\in V$, имеет место включение

$$\lambda(t,\tau,v)[m-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))]\in\Phi(t,\tau,v),$$

а с учетом условия 7

$$\inf_{v\in V}\lambda(t,\tau,v)[m-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))]\in\bigcap_{v\in V}\Phi(t,\tau,v)\,. \qquad (42)$$

В тоже время для $0\le\tau\le t< P(g(\cdot))$ имеем

$$\bigcap_{v\in V}\Phi(t,\tau,v)=\bigcap_{v\in V}[W(t,\tau,v)\overset{*}{-}W(t,\tau)]=\bigcap_{v\in V}\left[\bigcap_{\gamma(t,\tau)\in W(t,\tau)}(W(t,\tau,v)-\gamma(t,\tau))\right]=$$

$$\bigcap_{\gamma(t,\tau)\in W(t,\tau)}\left[\bigcap_{v\in V}(W(t,\tau,v)-\gamma(t,\tau))\right]=\bigcap_{\gamma(t,\tau)\in W(t,\tau)}[W(t,\tau)-\gamma(t,\tau)]=\{0\}.$$

Таким образом, из включения (42) вытекает, что $\inf\limits_{v\in V}\lambda(t,\tau,v)=0$ для $0\le\tau\le t< P(g(\cdot))$.

ПРОСТОЕ ДВИЖЕНИЕ

Пусть задан конфликтно-управляемый процесс в плоскости

$$z(t)=z_0+\int_0^t(u(\tau)-v(\tau))d\tau,\ z(t)\in R^2,\ \ t\ge 0.$$

Здесь $g(t)=z_0$, $\Omega(t,\tau)=E$ — единичная матрица, $\varphi(u,v)=u-v$. Области управления игроков $V=\{v\in\mathbb{R}^2\colon ||v||\le 1\}=S$ — единичный круг с центром в нуле, а $U=\{u\in\mathbb{R}^2\colon ||u||\le 1\}\bigcup\{u=(u_1,u_2)\colon |u_1|\le u_2\le 2\}$ — объединение единичного круга и треугольника. Терминальное множество $M^*=\{z\in\mathbb{R}^2\colon ||z||\le\varepsilon\}$, причем $M_0=\{z\in\mathbb{R}^2\colon z=0\}$, а $M=\{z\in\mathbb{R}^2\colon ||z||\le\varepsilon\}=\varepsilon S$. Таким образом, $M_0^{\perp}=L=\mathbb{R}^2$, а ортопроектор $\pi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ является оператором тождественного преобразования и задается единичной матрицей $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Далее, очевидно, $W(t,\tau,v)=U-v$, $W(t,\tau)=\bigcap\limits_{v\in V}(U-v)=U\overset{*}{-}V=\{0\}$ и условие Понтрягина выполнено. Поскольку $W(t,\tau)=\{0\}$, $0\le\tau\le t$, то Γ состоит из единственного вектора $\gamma(\cdot,\cdot)$, тождественно равного нулю. Поэтому $\xi(t,z_0,0)=z_0$, а разрешающая функция имеет вид $\alpha(z_0,v)=\alpha(t,\tau,v)=\sup\{\alpha\colon\ \alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau,v)\}$, причем

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v)=\{\alpha\ge 0\colon [U-v]\bigcap\alpha[\varepsilon S-z_0]\}\ne\varnothing.$$

Рассмотрим начальную точку $z_0=(0,-b)$, $b>0$. Будем считать, что $b>>\varepsilon$. Поскольку отображение не зависит от t и τ $\mathfrak{A}(t,\tau,v)=\mathfrak{A}(v)$, нетрудно посчитать, что при $v=(0,-1)$ $\mathfrak{A}(v)=[0,1/(b-\varepsilon)]$, при $v=(1,0)$, $v=(-1,0)$

$$\mathfrak{A}(v)=\left[0,\frac{2\varepsilon}{b^2-\varepsilon^2}\right]\bigcup\left[\frac{\sqrt{2}b+2\varepsilon}{b^2-\varepsilon^2},\frac{2}{b-\varepsilon}\right],$$

причем $\dfrac{\sqrt{2}b+2\varepsilon}{b^2-\varepsilon^2}>\dfrac{2\varepsilon}{b^2-\varepsilon^2}$, где члены неравенства — положительные корни квадратных уравнений относительно α $(\sqrt{2}-\alpha b)^2=2\alpha^2\varepsilon^2$, $\alpha^2b^2+1=(1+\alpha\varepsilon)^2$, которые выражают теорему Пифагора для соответствующих прямоугольных треугольников. В этом случае многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ не выпуклозначно и условие 1 не выполнено. Очевидно, $\inf\limits_{||v||\le 1}\alpha(t,\tau,v)=\min\limits_{||v||\le 1}\sup\{\alpha\ge 0\colon$ $\alpha\in\mathfrak{A}(v)\}=1/(b-\varepsilon)$, причем минимум по v достигается в точке $v=(0,-1)$.

В тоже время $\mathfrak{A}(t,\tau)=\mathfrak{A}=\bigcap\limits_{||v||\le 1}\mathfrak{A}(v)=\left[0,\dfrac{2\varepsilon}{b^2-\varepsilon^2}\right]$. Поэтому $\alpha(t,\tau)=\sup\{\alpha\ge 0\colon$ $\alpha\in\mathfrak{A}\}=2\varepsilon/(b^2-\varepsilon^2)$. Поскольку в рассматриваемом случае $W(t,\tau)=\{0\}$, то и $B(t,\tau)=\{0\}$ для всех $0\le\tau\le t<+\infty$. Соответственно $\beta(t,\tau)\equiv 0$.

Для схемы с фиксированной точкой $m\in\varepsilon S$ при заданном начальном положении z_0 будем считать, что $m\in\varepsilon S\bigcap\left\{\bigcup\limits_{c\in[-\varepsilon,\varepsilon]}[0,c]\right\}$. Тогда при $v=(0,-1)$ многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v,m)=[0,1/(b+m)]$, а $\alpha(t,\tau,v,m)=\min\limits_{||v||\le 1}\alpha(t,\tau,v,m)=$ $=1/(b+m)$, причем минимум по v достигается при $v=(0,-1)$. Соответственно функция времени $\mathfrak{T}(z_0,m,0)=b+m$, отсюда автоматически вытекает, что $\mathfrak{T}(z_0,0)=b-\varepsilon$, а маргинальное множество $\mathfrak{M}(z_0,0)=\{(0,-\varepsilon)\}$ состоит лишь из одного элемента.

Таким образом, время окончания игры из начальной точки z_0 согласно рассмотренным схемам $T_0(z_0,0) = \mathfrak{T}(z_0,0) = b - \varepsilon$, $\Theta_0(z_0,0) = (b^2 - \varepsilon^2)/2\varepsilon$, $P(z_0) = +\infty$.

Равенство $T_0(z_0,0) = \mathfrak{T}(z_0,0)$ имеет место только потому, что многозначное отображение $\mathfrak{M}(z_0, v) = \{m \in M\colon \alpha(z_0, v)[m - z_0] \in U - v\}$ при любом $v \in V$ есть точка $(0,-\varepsilon)$.

Пусть теперь z_0, $z_0 \notin \varepsilon S$, — произвольная начальная точка. Поскольку $W(t,\tau) = \{0\}$ для $0 \le \tau \le t < +\infty$, то $\Phi(t,\tau,v) = W(t,\tau,v)$, а $K = K(t,\tau) = \bigcap\limits_{v \in S} \mathrm{con}[U - v] = \{z \in R^2\colon z_2 \ge \mu |z_1|\}$, где μ — угловой коэффициент касательной к единичному кругу с центром в точке (2.2), которая проходит через начало координат и лежит ближе к оси ординат.

Легко видеть, что $\lambda(t,\tau,v) \equiv \alpha(t,\tau,v)$, $Q(0) = Q_*(0) = R^2 \setminus \varepsilon S$, $\Gamma(z_0) = \{0\}$ для $z_0 \in R^2 \setminus \varepsilon S$. Кроме того, $\min\limits_{v \in S} \lambda(t,\tau,v) = 1/(b - \varepsilon)$, а функция $\alpha(t) = t/(b-\varepsilon)$ является непрерывной. Из теоремы 10 получим, если

$$-z_0 \in \bigcap_{v \in S} \{\mathrm{con}[U - v] + \varepsilon S\}, \tag{43}$$

то $T_0(z_0,0) < +\infty$, а из теоремы 11 вытекает, что условие $-z_0 \overline{\in} \bigcap\limits_{v \in S} \{\mathrm{con}[U - v] + \varepsilon S\}$ обеспечивает равенство $T_0(z_0,0) = +\infty$.

Итак, получено необходимое и достаточное условие (43) окончания игры за конечное время. Кроме того, для фиксированной точки z_0 из множества $-\bigcap\limits_{v \in S} \{\mathrm{con}[U - v] + \varepsilon S\}$ найдено гарантированное время окончания игры по разным схемам метода разрешающих функций, которое отличается от гарантированного времени первого прямого метода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы квазилинейные конфликтно-управляемые процессы общего вида с цилиндрическим терминальным множеством, при этом вместо динамической системы исходным объектом является представление решения, допускающее адитивное вхождение члена с начальными данными и блока управления. Это позволяет рассматривать широкий спектр динамических процессов в единой схеме. При исследовании в качестве базового использован метод разрешающих функций. Получены достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время в классе стратегий, использующих информацию о поведении противника в прошлом, а также в классе стробоскопических стратегий. Найдены условия, при которых информация о предыстории убегающего не играет роли. Дано сравнение гарантированных времен различных схем метода разрешающих функций с гарантированным временем первого прямого метода Понтрягина. Качественные результаты проиллюстрированы на примере игровой задачи с простыми движениями и неполным выметанием для специальных областей управления в условии Понтрягина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 455 с.
3. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. — М.: Наука, 1988. — **2.** — 576 с.
4. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. — К.: Наук. думка, 1992. — 260 с.
5. Isaacs R. Differential games. — New York: John Wiley, 1965. — 480 p.
6. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 65 с.
7. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. — Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. — 424 p.
8. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. — К.: Наук. думка, 1992.— 384 с.
9. Сергиенко И.В., Чикрий А.А. О развитии научных идей Б.Н. Пшеничного в области оптимизации и математической теории управления // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 2. — С. 3–28.
10. Чикрий А.А. Функционалы Минковского в теории преследования // ДАН России. — 1993. — **329**, № 3. — С. 281–284.
11. Chikrii A.A. The problem of avoidance for controlled dynamic objects // Int. J. Math. Game Theory and Algebra. — 1998. — **7**, N 2/3. — P. 81–94.
12. Чикрий А.А. Калибровочные функции в игровых задачах управления // Изв. АН России. Сер. Техн. кибернетика. — 1994. — № 3. — С. 218–228.
13. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. — 224 с.
14. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. — К.: Наук. думка, 2005. — 220 с.
15. Hu S., Papageorgiou N.S. Handbook of multivalued analysis, vol. 1: Theory. — Berlin: Springer, 1997. — 980 p.
16. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
17. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
18. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988. — 280 с.
19. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: ЛИБРОКОМ, 2010. — 226 с.
20. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Групповое преследование в дифференциальных играх // Оптимизационные исследования и статистика. — Лейпциг, 1982. — С. 13–27.
21. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2009. — 266 с.
22. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями // ДАН СССР. — 1981. — **256**, № 3. — С. 530–535.
23. Chikrii A.A., Rappoport J.S. Guarantee result in differential games with terminal payoff // Ann. Dynamic Games. — Berlin: Birkhauser, 1995. — **3**. — P. 323–330.
24. Раппопорт И.С., Чикрий А.А. Гарантированный результат в дифференциальной игре группового преследования с терминальной функцией платы // Прикл. математика и механика. — 1997. — **61**, № 4. — С. 584–594.

25. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Гарантированный результат в квазилинейной дифференциальной игре // ДАН России. — 1995. — **341**, № 4. — С. 452–455.

26. Chikrii A.A. Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems // Int. J. Optim. methods and software. — 2008. — **23**, N 1. — P. 39–73.

27. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives // Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria. — New York: Springer, 2008. — **17**. — P. 349–387.

28. Chikrii A.A., Matychyn I.I., Gromaszek K., Smolarz A. Control of fractional-order dynamic systems under uncertainty // Modelling and Optimization. — Lublin: Univ. of Technology, Poland, 2011. — P. 3–56.

29. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. К теореме об обратном образе для $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримых многозначных отображений // ДАН Украины. — 2011. — № 11.— С. 54–58.

30. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. — Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. — 461 p.

31. Левин В.Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике. — М.: Наука, 1985. — 352 с.

32. Mordukhovich B.S. Variational analysis and generalized differentiation. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2006. — I. Basic Theory. — **330**. — 582 p.; II. Applications. — **331**. — 612 p.

33. Толстоногов А.А. К теореме Скорца–Драгони для многозначных отображений с переменной областью определения // Мат. заметки. — 1990. — **48**, вып. 5. — С. 109–120.

34. Rockafellar R.T. Integral functionals, normal integrands and measurable selections // Lect. Notes in Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1976. — **543**. — P. 157–207.

35. Himmelberg C.J. Measurable relations // Fund. math. — 1975. — **87**, N 1. — P. 53–72.

36. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: МГУ, 1980. — 198 с.

37. Чикрий А.А. Дифференциальные игры с несколькими преследователями // Тр. Междунар. мат. Центра им. С. Банаха, Варшава. — 1985. — **14**. — С. 81–107.

38. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — К.: Наук. думка, 2006. — 264 с.

39. Hajek O. Pursuit games. — New York: Acad. Press, 1975. — **12**. — 266 p.

40. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. — Basel: Gordon and Breach, 1995. — 410 p.

41. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.

42. Чикрий А.А. Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. Мат. ин-та РАН им. В.А. Стеклова. — 2010. — **271**. — С. 76–92.

43. Чикрий А.А., Раппопорт И.С., Чикрий К.А. Многозначные отображения и их селекторы в теории конфликтно-управляемых процессов // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 5. — С. 129–144.

44. Чикрий А.А. Многозначные отображения и их селекторы в игровых задачах управления // Проблемы управления и информатики. — 1994. — № 1–2. — С. 47–58.

45. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 470 с.

46. Aumann R.J. Integrals of set valued functions // J. Math. Anal. Appl. — 1965. — **12**. — P. 1–12.

Поступила 14.05.2010