КИБЕРНЕТИКА

А.Н. ЧЕБОТАРЕВ

УДК 519.731.1

ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕАКТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ПУТЕМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАД АВТОМАТАМИ

Ключевые слова: *реактивная система, спецификация в языке* L, *Σ-автомат, синхронная композиция Σ-автоматов, неравенство над Σ-автоматами, максимальное решение.*

ВВЕДЕНИЕ

Проектирование современных систем обработки информации все больше усложняется в связи с усложнением этих систем. Одним из основных способов борьбы со сложностью проектирования является модульный подход, связанный с декомпозицией проектируемой системы на подсистемы, которые взаимодействуют между собой в соответствии с определенными правилами композиции [1–3]. Многие задачи, возникающие при таком подходе к проектированию, могут быть сформулированы следующим образом. Заданы спецификация системы, которая реализуется в виде композиции двух модулей, и спецификация одного из этих модулей. Требуется определить (специфицировать) другой модуль так, чтобы его композиция с заданным модулем удовлетворяла спецификации системы. Для уточнения этой задачи необходимо:

1) определить способ представления спецификаций отдельных модулей и всей системы в целом;

2) уточнить понятие композиции модулей;

3) уточнить отношение, соответствующее понятию «модуль удовлетворяет спецификации».

Указанные уточнения будут сделаны для реактивных систем [4], т.е. систем, постоянно взаимодействующих с окружающей средой. Для их спецификации будет использоваться язык L [5], представляющий собой фрагмент логики предикатов первого порядка с одноместными предикатами, которые интерпретируются на множестве $\mathbf{Z}$ целых чисел. Рассматриваемая задача сводится к решению уравнений (неравенств) над автоматными моделями взаимодействующих модулей, представленных спецификациями в языке L. Поскольку автоматные модели определяют поведение модуля, работающего потенциально бесконечно, рассматриваются автоматы над бесконечными входными последовательностями, что соответствует понятию циклического автомата.

ЯЗЫК СПЕЦИФИКАЦИИ L

Спецификация в языке L имеет вид $\forall t F(t)$, где $F(t)$ — формула, построенная с помощью логических связок из атомарных формул (атомов) вида $p(t+k)$, где p — одноместный предикатный символ, t — переменная, принимающая значения из множества целых чисел, рассматриваемого как множество моментов дискретного времени, а k — целочисленная константа, называемая рангом атома. Разность между максимальным и минимальным значениями рангов атомов, встречающихся в формуле, называется ее глубиной. В дальнейшем формулы языка L вида $\forall tF(t)$ будем называть L-формулами.

При определении семантики языков спецификации реактивных систем такие языки рассматриваются как формализмы для задания множеств сверхслов (бесконечных слов) в алфавите двоичных векторов, длина которых равна количеству различных предикатных символов, встречающихся в спецификации. Определим необходимые понятия, касающиеся сверхслов.

Пусть Σ — конечный алфавит, $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел и $\mathbf{N} = \{ z \in \mathbf{Z} | z > 0 \}$. Отображения $u : \mathbf{Z} \to \Sigma$ и $l : \mathbf{N} \to \Sigma$ называются соответственно двусторонним сверхсловом (обозначается $\ldots u(-2)u(-1)u(0)u(1)u(2)\ldots$) и сверхсловом (обозначается $l(1)l(2)\ldots$) в алфавите Σ. Отрезок $u(\tau)u(\tau+1)\ldots u(\tau+k)$ двустороннего сверхслова u обозначается $u(\tau, \tau+k)$. Бесконечный отрезок $u(k+1, \infty)$ будем называть k-суффиксом двустороннего сверхслова u. Множество всех двусторонних сверхслов в алфавите Σ будем обозначать $\Sigma^{\mathbf{Z}}$.

Перейдем к описанию семантики языка L. Каждой L-формуле $F = \forall tF(t)$ ставится в соответствие множество моделей для этой формулы, т.е. множество таких интерпретаций, на которых F истинна. Пусть $\Omega = \{p_1, \ldots, p_m\}$ — множество всех предикатных символов, встречающихся в формуле F (сигнатура формулы). Интерпретация формулы F — это упорядоченный набор определенных на $\mathbf{Z}$ одноместных предикатов $\pi_1, \ldots, \pi_m$, соответствующих предикатным символам из Ω. Пусть Σ — множество всех двоичных векторов длины m, тогда интерпретацию $I = \langle \pi_1, \ldots, \pi_m \rangle$ можно представить в виде двустороннего сверхслова в алфавите Σ, а множество всех моделей для F — в виде множества $M(F)$ двусторонних сверхслов в этом алфавите. В дальнейшем не будем различать интерпретации и соответствующие им двусторонние сверхслова, поэтому будем говорить об истинности формулы F на двустороннем сверхслове $u \in \Sigma^{\mathbf{Z}}$.

При интерпретации формул вида $\forall tF(t)$ на множестве целых чисел для любого $k \in \mathbf{Z}$ справедлива эквивалентность $\forall tF(t) \Leftrightarrow \forall tF(t+k)$, где $F(t+k)$ обозначает формулу, полученную из $F(t)$ путем добавления k к рангам всех ее атомов (сдвиг на k). Таким образом, можно ограничиться рассмотрением формул, у которых максимальный ранг атомов равен нулю. Будем считать, что L-формула $F = \forall tF(t)$ задает множество 0-суффиксов всех двусторонних сверхслов из $M(F)$. Обозначим это множество $W(F)$.

АВТОМАТНАЯ СЕМАНТИКА ЯЗЫКА L

Определение 1. Конечный неинициальный $X-Y$-автомат A — это четверка $\langle X, Y, Q, \chi_A \rangle$, где X, Y, Q — конечные множества соответственно входных символов, выходных символов и состояний, а $\chi_A : Q \times X \times Y \to 2^Q$ — функция переходов автомата. $X-Y$-автомат A называется квазидетерминированным, если для любых $q \in Q$ $x \in X$, $y \in Y$ $|\chi_A(q, x, y)| \leq 1$. Квазидетерминированные $X-Y$-автоматы удобно рассматривать как детерминированные частичные автоматы без выхода, с входным алфавитом $\Sigma = X \times Y$. Такой автомат $A = \langle \Sigma, Q, \delta_A \rangle$, где $\delta_A : Q \times \Sigma \to Q$ — частичная функция, будем называть Σ-автоматом.

Определение 2. Σ-автомат $A = \langle \Sigma, Q, \delta_A \rangle$ называется циклическим, если для каждого $q \in Q$ существуют такие $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ и $q_1, q_2 \in Q$, что $q_1 = \delta_A(q, \sigma_1)$ и $q = \delta_A(q_2, \sigma_2)$.

В дальнейшем под автоматом будем понимать циклический Σ-автомат. Такой автомат можно однозначно охарактеризовать в терминах допустимых сверхслов.

Определение 3. Сверхслово $l = \sigma_1 \sigma_2 \ldots$ в алфавите Σ допустимо в состоянии q автомата A, если существует такое сверхслово состояний $q_0 q_1 q_2 \ldots$, где $q_0 = q$, что для любого $i = 0, 1, 2, \ldots$ $q_{i+1} = \delta_A(q_i, \sigma_{i+1})$. Сверхслово l допустимо для автомата A, если оно допустимо хотя бы в одном из его состояний. Множество всех сверхслов, допустимых для автомата A, обозначим $W(A)$.

Два Σ-автомата: A_1 и A_2, будем называть эквивалентными (слабо эквивалентными), если $W(A_1) = W(A_2)$.

Предполагается, что символы алфавита Σ представляют собой двоичные векторы длины m, что соответствует кодированию абстрактных символов наборами значений двоичных переменных из $\Omega = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Этим переменным соответствуют предикатные символы в спецификации автоматов.

Автоматная семантика языка L определяется следующей теоремой.

Теорема 1 [5]. Для всякой непротиворечивой формулы F вида $\forall t F(t)$ существует в общем случае частичный неинициальный циклический автомат A с конечной памятью [6], для которого множество всех допустимых сверхслов совпадает с множеством сверхслов, задаваемых формулой F.

Такой автомат назовем автоматом, специфицируемым формулой F.

Будем говорить, что автомат A удовлетворяет спецификации F, если $W(A) \subseteq W(F)$.

При определении множества сверхслов, задаваемого формулой $F = \forall t F(t)$, а следовательно, и множества сверхслов, допустимых для специфицируемого ею автомата, удобно использовать понятие пространства состояний для этой формулы [5]. Пусть Ω — сигнатура формулы $F(t)$, а r — ее глубина. Обозначим $\Sigma(\Omega)$ множество всех двоичных векторов длины $|\Omega|$, где $|\Omega|$ — мощность множества Ω. Последовательность $s_0 s_1 \ldots s_r$ векторов из $\Sigma(\Omega)$ назовем состоянием глубины r, а множество $Q(r, \Omega)$ всех таких последовательностей — пространством состояний глубины r для формулы $F(t)$. На множестве $Q(r, \Omega)$ определим отношение N непосредственного следования так, что за каждым состоянием $q = s_0 s_1 \ldots s_r$ непосредственно следуют $2^{|\Omega|}$ состояний вида $s_1 \ldots s_r s$, где $s \in \Sigma(\Omega)$. Множество всех состояний, непосредственно следующих за q, обозначим $N(q)$. Если компоненты вектора s_i в состоянии $q = s_0 s_1 \ldots s_r$ рассматривать как истинностные значения соответствующих атомов ранга $i - r$ при некотором упорядочении множества Ω, то можно говорить о значении формулы $F(t)$ на состоянии q. Формулу $F(t)$ будем рассматривать как представление множества $Q(F(t))$ состояний из $Q(r, \Omega)$, а именно, тех состояний, на которых она истинна. Аналогично при $r_1 \geq r$ и $\Omega_1 \supseteq \Omega$ можно говорить о множестве состояний, задаваемом формулой $F(t)$ в пространстве $Q(r_1, \Omega_1)$. Обозначим это множество $Q(F(t), r_1, \Omega_1)$. Пусть $G(F(t))$ — граф ограничения отношения N на множество $Q(F(t))$. Соответствующий граф в пространстве состояний $Q(r_1, \Omega_1)$ будем обозначать $G(F(t), r_1, \Omega_1)$. Граф $G = \langle V, E \rangle$, где V — множество вершин, а E — множество дуг графа, назовем циклическим, если для каждой его вершины q существуют такие вершины q_1 и q_2, что дуги (q_1, q) и (q, q_2) принадлежат E.

Несложно убедиться в справедливости следующей леммы, которую приведем без доказательства.

Лемма 1. Пусть $G^*(F(t))$ — максимальный циклический подграф графа $G(F(t))$, тогда $\forall t F^*(t) \Leftrightarrow \forall t F(t)$, где $F^*(t)$ — формула, задающая множество состояний, соответствующее всем вершинам графа $G^*(F(t))$.

Если сверхслово l принадлежит $W(F)$, то ему соответствует бесконечный маршрут в графе $G^*(F(t))$ и, наоборот, каждому бесконечному маршруту в $G^*(F(t))$ соответствует сверхслово, принадлежащее $W(F)$. Таким образом, множество сверхслов, допустимых для Σ-автомата, специфицированного формулой $F = \forall t F(t)$, однозначно определяется множеством $V^*(F)$ вершин графа $G^*(F(t))$.

СИНХРОННАЯ КОМПОЗИЦИЯ АВТОМАТОВ

Пусть $A_1 = \langle \Sigma, Q_1, \delta_1 \rangle$ и $A_2 = \langle \Sigma, Q_2, \delta_2 \rangle$ — циклические Σ-автоматы с одним и тем же входным алфавитом Σ. Синхронной композицией автоматов A_1 и A_2 (обозначается $A_1 \bullet A_2$) назовем максимальный циклический подавтомат автомата $C = \langle \Sigma, Q_C, \delta_C \rangle$, определяемого следующим образом: $Q_C = Q_1 \times Q_2$, значение $\delta_C(\langle q_1, q_2 \rangle, \sigma)$, где $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$, $\sigma \in \Sigma$, определено и равно $\langle \delta_1(q_1, \sigma), \delta_2(q_2, \sigma) \rangle$ тогда и только тогда, когда значения $\delta_1(q_1, \sigma)$ и $\delta_2(q_2, \sigma)$ определены. Пусть F_A и F_B — спецификации в языке L соответственно автоматов A и B, тогда формула $F_A \& F_B$ специфицирует автомат $A \bullet B$. Заметим, что Σ-автоматы $A = \langle \Sigma_A, Q_A, \delta_A \rangle$ и $B = \langle \Sigma_B, Q_B, \delta_B \rangle$, где $\Sigma_A = \Sigma(\Omega_A)$, а $\Sigma_B = \Sigma(\Omega_B)$, можно рассматривать как Σ-автоматы над одним и тем же алфавитом $\Sigma = \Sigma(\Omega_A \cup \Omega_B)$. При этом каждый символ $\sigma \in \Sigma(\Omega_A)$ рассматривается как множество $\{\sigma \times \sigma' \mid \sigma' \in \Sigma(\Omega_B \setminus \Omega_A)\}$. Аналогичным образом рассматриваются символы алфавита $\Sigma(\Omega_B)$ Это позволяет приведенное выше определение синхронной композиции автоматов естественным образом распространить на Σ-автоматы с различающимися алфавитами. Пусть A — автомат над алфавитом $\Sigma(\Omega)$ и $\Omega \subseteq \Omega_1$. Множество сверхслов, допустимых для автомата A, рассматриваемого как автомат над $\Sigma(\Omega_1)$, обозначим $W_{\Omega_1}(A)$.

Вектор $\sigma \in \Sigma(\Omega)$ будем рассматривать как отображение $\sigma : \Omega \to \{0,1\}$. Проекцией $\sigma \in \Sigma(\Omega)$ на $\Omega_1 \subseteq \Omega$ (обозначается $[\sigma]_{\Omega_1}$) называется ограничение отображения σ на множество Ω_1. Понятие проекции символа алфавита $\Sigma(\Omega)$ распространим на сверхслова и множества сверхслов в этом алфавите. Пусть $l = \sigma_1 \sigma_2 \ldots$, где $\sigma_i \in \Sigma(\Omega)$. Проекцию этого сверхслова на $\Omega_1 \subseteq \Omega$ определим как $[l]_{\Omega_1} = [\sigma_1]_{\Omega_1}[\sigma_2]_{\Omega_1}\ldots$. Проекцию множества сверхслов W в алфавите $\Sigma(\Omega)$ на Ω_1 обозначим $[W]_{\Omega_1}$.

Определение 4. Ограничением автомата $A = \langle \Sigma(\Omega), Q, \delta \rangle$ на множество переменных (предикатных символов) $\Omega_1 \subseteq \Omega$ будем называть автомат $A_1 = \langle \Sigma_1, Q, \delta_1 \rangle$, где $\Sigma_1 = \Sigma(\Omega_1)$, и $q_1 \in \delta_1(q, \sigma_1)$ тогда и только тогда, когда существует такое $\sigma \in \Sigma(\Omega)$, что $[\sigma]_{\Omega_1} = \sigma_1$ и $\delta(q, \sigma) = q_1$. Ограничение автомата A на Ω_1обозначим $[A]_{\Omega_1}$.

Нетрудно видеть, что $W([A]_{\Omega_1}) = [W(A)]_{\Omega_1}$, т.е. множество сверхслов, допустимых для ограничения автомата A на Ω_1, совпадает с проекцией на Ω_1 множества сверхслов, допустимых для автомата A. Заметим также, что $W(A) \subseteq W_\Omega([A]_{\Omega_1})$.

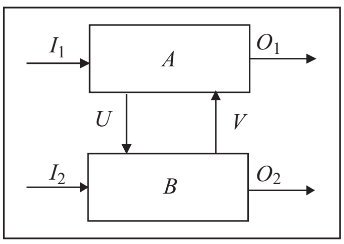

Рис. 1

Рассмотрим структуру, представленную на рис. 1. Здесь I_1, I_2, U и т.д. — множества двоичных переменных, причем пересечения $I_1 \cap I_2$, $U \cap O_1$, $V \cap O_2$ могут быть непустыми.

Пусть $A = \langle \Sigma(\Omega_A), Q_A, \delta_A \rangle$, где $\Omega_A = I_1 \cup \cup O_1 \cup V \cup U$, а $B = \langle \Sigma(\Omega_B), Q_B, \delta_B \rangle$, где $\Omega_B = I_2 \cup O_2 \cup V \cup U$. Для такой структуры внешней синхронной композицией автоматов A и B (обозначается $A \circ B$) будем называть ограничение Σ-автомата $A \bullet B$ на множество переменных $\Omega_C = I_1 \cup I_2 \cup O_1 \cup O_2$.

На множестве Σ-автоматов с одним и тем же входным алфавитом определим отношение «$\le$» следующим образом: $A \le B$ тогда и только тогда, когда $W(A) \subseteq W(B)$.

Пусть для приведенной выше структуры заданы Σ-автоматы $A = \langle \Sigma(\Omega_A), Q_A, \delta_A \rangle$ и $C = \langle \Sigma(\Omega_C), Q_C, \delta_C \rangle$, где $\Omega_C = I_1 \cup I_2 \cup O_1 \cup O_2$. Рассмотрим неравенство $A \circ X \le C$. Здесь X — неизвестное, принимающее значения из множества циклических Σ-автоматов с входным алфавитом $\Sigma(I_2 \cup O_2 \cup V \cup U)$. Таким образом, Σ-автомат B есть решение рассматриваемого неравенства, если $W([A \bullet B]_{\Omega_C}) \subseteq W(C)$. Задача состоит в нахождении максимального решения неравенства $A \circ X \le C$ или уравнения $A \circ X = C$. Поскольку задача рассматривается на уровне спецификаций автоматов в языке L, решение ищется в классе циклических автоматов с конечной памятью. В этом случае максимальным решением назовем такое решение B, что не существует никакого другого, неэквивалентного ему автомата B_1, также являющегося решением, и такого, что $B \le B_1$. Чтобы сформулировать эту задачу на уровне спецификаций, определим понятие минимальной формы формулы $F(t)$ в спецификации $F = \forall t F(t)$.

Пусть $F = \forall t F(t)$ — непротиворечивая формула глубины r с сигнатурой $\Omega = \{p_1, \ldots, p_q\}$. Формулу $F(t)$ будем рассматривать как пропозициональную формулу с пропозициональными переменными $p_1(t), \ldots, p_q(t), p_1(t-1), \ldots$ $\ldots, p_q(t-1), \ldots, p_1(t-r), \ldots, p_q(t-r)$. Минимальной формой формулы $F(t)$ в пространстве состояний $Q(r_1, \Omega_1)$, где $r_1 \ge r$ и $\Omega_1 \supseteq \Omega$, называется формула $\min(F(t), r_1, \Omega_1)$, задающая множество всех вершин графа $G^*(F(t), r_1, \Omega_1)$. При $\Omega_1 = \Omega$ будем говорить о минимальной форме порядка r_1 формулы $F(t)$ и обозначать ее $\min^{r_1}(F(t))$, а если, кроме того, $r_1 = r$, то будем писать просто $\min(F(t))$[1].

Если $F_{\min}(t)$ — минимальная форма формулы $F(t)$, то $F_{\min}(t) \to F(t)$. Построение минимальной формы формулы $F(t)$ состоит в ее преобразовании, описанном в [7].

Теперь определим отношение на спецификациях, соответствующее отношению $A \le B$ на циклических Σ-автоматах. Пусть $F_A = \forall t F_A(t)$ и $F_B = \forall t F_B(t)$ — формулы одной и той же сигнатуры, специфицирующие соответственно автоматы A и B. Отношению $W(A) \subseteq W(B)$ соответствует отношение $V^*(F_A) \subseteq V^*(F_B)$ на множествах вершин графов $G^*(F_A(t))$ и $G^*(F_B(t))$. В терминах спецификаций это выглядит как $\min(F_A(t)) \to \min(F_B(t))$ или, что то же самое, $\min(F_A(t)) \to F_B(t)$, где $F_A(t)$ и $F_B(t)$ рассматриваются как пропозициональные формулы. Если глубина r формулы $F_B(t)$ превышает глубину формулы $F_A(t)$, то для $F_A(t)$ следует рассматривать минимальную форму порядка r.

Пусть $F_A = \forall t F_A(t)$ и $F_C = \forall t F_C(t)$ — спецификации соответственно автоматов $A = \langle \Sigma(\Omega_A), Q_A, \delta_A \rangle$ и $C = \langle \Sigma(\Omega_C), Q_C, \delta_C \rangle$, где $\Omega_C \subseteq \Omega_A$. Условию $[A]_{\Omega_C} \le C$ соответствует условие $W([A]_{\Omega_C}) \subseteq W(C)$. Покажем, что это включение равносильно $W(A) \subseteq W_{\Omega_A}(C)$. Предварительно приведем два достаточно очевидных утверждения.

Утверждение 1. Пусть A и B — автоматы над $\Sigma(\Omega)$ и $\Omega \subseteq \Omega_1$, тогда из $W(A) \subseteq W(B)$ следует $W_{\Omega_1}(A) \subseteq W_{\Omega_1}(B)$.

Утверждение 2. Пусть A и B — автоматы над $\Sigma(\Omega)$ и $\Omega_1 \subseteq \Omega$, тогда из $W(A) \subseteq W(B)$ следует $[W(A)]_{\Omega_1} \subseteq [W(B)]_{\Omega_1}$.

---

[1] Более точно следует говорить о минимальной форме формулы $\forall t F(t)$, которая имеет вид $\forall t \min F(t)$.

Согласно утверждению 1 из $W([A]_{\Omega_C}) \subseteq W(C)$ следует $W_{\Omega_A}([A]_{\Omega_C}) \subseteq W_{\Omega_A}(C)$, из чего в силу $W(A) \subseteq W_{\Omega_A}([A]_{\Omega_C})$ следует $W(A) \subseteq W_{\Omega_A}(C)$. В свою очередь, из $W(A) \subseteq W_{\Omega_A}(C)$ согласно утверждению 2 следует $[W(A)]_{\Omega_C} \subseteq [W_{\Omega_A}(C)]_{\Omega_C}$, что равносильно $W([A]_{\Omega_C}) \subseteq W(C)$. Это доказывает равносильность рассматриваемых включений. Таким образом, условию $[A]_{\Omega_C} \leq C$ на уровне спецификаций соответствует формула $\min^r(F_A(t)) \to F_C(t)$, где r — наибольшая из глубин формул $F_A(t)$ и $F_C(t)$. Заметим, что формула $F_C(t)$, в зависимости от рассматриваемой сигнатуры, задает как множество сверхслов $W(C)$, так и множество $W_{\Omega_A}(C)$.

Теперь рассматриваемую задачу можно переформулировать следующим образом: найти максимальное решение $F_X(t)$ сигнатуры $\Omega_B = I_2 \cup O_2 \cup V \cup U$, удовлетворяющее формуле $\min(F_A(t) \& F_X(t)) \to F_C(t)$. Здесь понятие максимальности решения имеет два аспекта. Первый связан с построением композиции, специфицирующей максимальную часть автомата C, что соответствует решению уравнения $\min(F_A(t) \& F_X(t)) = \min(F_A(t) \& F_C(t))$, где все формулы рассматриваются в одном и том же пространстве состояний сигнатуры $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$. Очевидно, что такие значения для $F_X(t)$ существуют — достаточно в качестве значения $F_X(t)$ взять формулу $F_C(t)$, рассматриваемую над $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$. Всякое такое значение $F_X(t)$ дает максимальное значение для $\min(F_A(t) \& F_X(t))$, удовлетворяющее соответствующей импликации. Второй аспект связан с неоднозначностью спецификации автомата формулой языка L. Поэтому ищется такое решение $F_B(t)$ приведенного выше уравнения, что не существует никакой другой, неэквивалентной ему формулы $F(t)$, также являющейся решением этого уравнения и такой, что $F_B(t) \to F(t)$. Искомую формулу $F_B(t)$ будем строить следующим образом. Сначала получим максимальное решение $F'_B(t)$ с сигнатурой $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$, а затем построим максимальную формулу $F_B(t)$ сигнатуры Ω_B, имплицирующую $F'_B(t)$.

Всякая формула $F(t)$ глубины r задает множество состояний в соответствующем пространстве состояний. Максимальной формой формулы $F(t)$ назовем такую формулу, что добавление любого состояния пространства состояний к задаваемому ею множеству состояний приводит к спецификации, не эквивалентной формуле $\forall t F(t)$. Существует одно (с точностью до эквивалентности) минимальное представление спецификации определенной глубины и много различных максимальных представлений. Множество всех максимальных представлений формулы $F(t)$ обозначим $\mathrm{MAX}(F(t))$.

Теперь покажем, что формула

$$F'_B(t) = \neg(\min(F_A(t))) \vee \max(\min(F_A(t) \& F_C(t))),$$

где $\max(F(t))$ — любое максимальное представление соответствующей формулы, есть решение, т.е., что формула $\min(F_A(t) \& F'_B(t)) \to F_C(t)$ тождественно истинна. Предварительно приведем некоторые используемые при этом соотношения:

$$\min(\min(F(t))) = \min(F(t)); \tag{1}$$

$$\min(\max(F(t))) = \min(F(t)); \tag{2}$$

$$\min(\min(F_1(t)) \& F_2(t)) = \min(F_1(t) \& F_2(t)); \tag{3}$$

$$\min(F_1(t) \& F_2(t)) \to (\min(F_1(t)) \& \min(F_2(t))); \tag{4}$$

$$(\min(F_1(t)) \vee \min(F_2(t))) \to \min(F_1(t) \vee F_2(t)). \tag{5}$$

Очевидно, что формула $\min(F_A(t) \,\&\, F'_B(t)) \to F_C(t)$ равносильна формуле $\min(F_A(t) \& F'_B(t)) \to \min(F_A(t) \& F_C(t))$. Поэтому покажем, что приведенное выше значение для $F'_B(t)$ удовлетворяет формуле

$$\min(F_A(t) \& F'_B(t)) \to \min(F_A(t) \& F_C(t)).$$

Согласно (3)

$$\min(F_A(t) \& F'_B(t)) = \min(\min(F_A(t)) \& F'_B(t)).$$

Подставив формулу $F'_B(t)$ в правую часть этой эквивалентности, получим

$$\min(\min(F_A(t)) \,\&\, \max(\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t)))).$$

В силу (4) имеем

$$\min(\min(F_A(t)) \,\&\, \max(\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t)))) \to$$

$$\to \min(\min(F_A(t))) \,\&\, \min(\max(\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t)))).$$

В силу (1) и (2) правая часть этой импликации равна

$$\min(F_A(t)) \,\&\, \min(F_A(t) \,\&\, F_C(t)).$$

Очевидно, что

$$\min(F_A(t)) \,\&\, \min(F_A(t) \,\&\, F_C(t)) \to \min(F_A(t) \,\&\, F_C(t)).$$

Таким образом, $\min(F_A(t) \,\&\, F'_B(t)) \to \min(F_A(t) \,\&\, F_C(t))$, что и требовалось показать.

Докажем, что любое такое решение удовлетворяет первому условию максимальности, т.е., что $\min(F_A(t) \,\&\, F'_B(t)) = \min(F_A(t) \,\&\, F_C(t))$. Для этого достаточно показать справедливость соответствующей импликации в обратную сторону, т.е. $\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t)) \to \min(F_A(t) \,\&\, F'_B(t))$. Действительно, в силу (5) имеем

$$(\min(F_A(t) \,\&\, \neg(\min(F_A(t)))) \vee \min(F_A(t) \,\&\, \max(\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t))))) \to$$

$$\to \min(F_A(t) \& F'_B(t)).$$

Поскольку $\min(\neg(\min(F_A(t)))) = 0$, то в силу (4)

$$\min(F_A(t) \,\&\, \neg(\min(F_A(t)))) = 0.$$

Остается показать, что

$$\min(F_A(t) \,\&\, \max(\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t)))) = \min(F_A(t) \,\&\, F_C(t)).$$

Так как $\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t))$ влечет $F_A(t)$ и $\max(\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t))$, то $\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t))$ влечет $F_A(t) \,\&\, \max(\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t)))$, а следовательно, и $\min(F_A(t) \,\&\, \max(\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t))))$.

В силу (4)

$$\min(F_A(t) \,\&\, \max(\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t)))) \to$$

$$\to (\min((F_A(t)) \,\&\, \min(\max(\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t))))).$$

Согласно (1) и (2) $\min(\max(\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t)))) = \min(F_A(t) \,\&\, F_C(t))$. Таким образом, правая часть рассматриваемой импликации равна

$$\min(F_A(t)) \,\&\, \min(F_A(t) \,\&\, F_C(t)) = \min(F_A(t) \,\&\, F_C(t)).$$

Это завершает доказательство того, что решение $F'_B(t)$ удовлетворяет первому условию максимальности.

Теперь покажем, что для любого решения $F_B(t)$ сигнатуры Ω, удовлетворяющего первому условию максимальности, существует такая максимальная форма формулы $\min(F_A(t) \,\&\, F_B(t))$, что $F_B(t) \to (\neg(\min(F_A(t))) \vee \max(\min(F_A(t) \,\&\, F_C(t))))$, т.е., что максимальное решение в смысле обоих аспектов этого понятия содержится среди $\neg(\min(F_A(t)))\vee \mathrm{MAX}(\min(F_A(t)\,\&\,F_C(t)))$. Пусть $F_B(t)$ — произвольное решение, для которого $\min(F_A(t)\,\&\,F_B(t))=\min(F_A(t)\,\&\,F_C(t))$. Ясно, что для любой максимальной формы $\max(\min(F_A(t)\,\&\,F_C(t)))=$ $=\max(\min(F_A(t)\,\&\,F_B(t)))$. Представим это решение в виде

$$F_B(t)=\min(F_A(t))\,\&\,F_B(t)\vee\neg(\min(F_A(t)))\,\&\,F_B(t).$$

Достаточно показать, что $\min(F_A(t))\,\&\,F_B(t)\to\max(\min(F_A(t)\,\&\,F_C(t)))$.

Следует отметить, что для любой формулы $F(t)$ существует такая максимальная форма формулы $\min(F(t))$, что $F(t)\to\max(\min(F(t)))$. Таким образом, для $\min(F_A(t))\& F_B(t)$ существует такая максимальная форма $\max(\min(\min(F_A(t))\,\&\,F_B(t)))$, что

$$\min(F_A(t))\,\&\,F_B(t)\to\max(\min(\min(F_A(t))\,\&\,F_B(t))).$$

В силу (3) правая часть этой импликации равна $\max(\min(F_A(t)\,\&\,F_B(t)))$, а следовательно,

$$\min(F_A(t))\,\&\,F_B(t)\to\max(\min((F_A(t))\,\&\,F_C(t))).$$

Другими словами, существует такая максимальная форма формулы $\min(F_A(t)\,\&\,F_C(t))$, что формула $\neg(\min(F_A(t)))\vee\max(\min((F_A(t))\,\&\,F_C(t)))$ будет максимальным решением. Вычисление всех максимальных форм формулы весьма сложно, поэтому будем строить решение, которое не требует вычисления максимальной формы и не сильно отличается от максимального решения. В качестве такого решения $F_B'(t)$ можно взять формулу $\neg(\min(F_A(t)))\vee F_C(t)$, которая также удовлетворяет первому условию максимальности.

Теперь для получения решения $F_B(t)$ сигнатуры Ω_B необходимо взять $\forall$-проекцию формулы $F_B'(t)$ на ее переменные, определяемые сигнатурой Ω_B.

Пусть $F(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$ — пропозициональная формула от переменных $x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n$. Ее $\forall$-проекцией на множество переменных $\{x_1,\ldots,x_m\}$ называется формула

$$\forall y_1\ldots\forall y_n F(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)=$$
$$=F(x_1,\ldots,x_m,0,0,\ldots,0)\,\&\,F(x_1,\ldots,x_m,0,0,\ldots,1)\,\&\ldots\&\,F(x_1,\ldots,x_m,1,1,\ldots,1).$$

Если $\Omega_B=\{p_1,\ldots,p_k\}$, то для формулы $F_B'(t)$ глубины r строится проекция ее на множество переменных $\{p_1(t),\ldots,p_k(t),p_1(t-1),\ldots,p_k(t-1),\ldots,p_1(t-r),\ldots$ $\ldots,p_k(t-r)\}$. Для вычисления проекции формулы на подмножество ее аргументов ее удобно представлять в так называемой нормальной форме [8]. Нормальная форма имеет вид $\bigvee_{i=1}^{n}F_i(t-1)\,\&\,f_i(t)$, где $f_i(t)$ — формула, построенная из атомов нулевого ранга, а $F_i(t-1)$ — из атомов, ранг которых не превышает -1. Кроме того, для всех $i,j=1,\ldots,n$ $(i\neq j)$ $F_i(t-1)\,\&\,F_j(t-1)\equiv 0$ (условие ортогональности). Преобразование формулы к виду, удовлетворяющему условию ортогональности, будем называть ортогонализацией. Нормальная форма вида $\bigvee_{i=1}^{n}F_i(t-1)\,\&\,f_i(t)$ называется полной, если $\bigvee_{i=1}^{n}F_i(t-1)\equiv 1$. Отрицание формулы $F(t)$, представленной в полной нормальной форме, имеет вид $\bigvee_{i=1}^{n}F_i(t-1)\,\&\neg f_i(t)$, что также является нормальной формой. Нормальная форма формулы $\neg(\min(F_A(t)))\vee F_C(t)$ строится из нормальных форм формул $\neg(\min(F_A(t)))$ и $F_C(t)$ с помощью операции дизъюнктивного произведения [8].

Утверждение 3. Чтобы получить д.н.ф. формулы $\forall y_1 \dots \forall y_n F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$, необходимо в д.н.ф. формулы $F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ последовательно осуществлять склеивания по переменным $y_1, \dots, y_n$ и после каждого такого склеивания по y_i удалять все конъюнкции, содержащие y_i или $\neg y_i$.

Основная идея использования нормальной формы для построения $\forall$-проекции формулы состоит в том, чтобы задачу большой размерности свести к ряду задач существенно меньшей размерности.

Пусть $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$ — сигнатура формулы $F(t)$, и необходимо построить проекцию этой формулы (рассматриваемой как пропозициональная формула) на множество переменных, соответствующих символам $x_1, \dots, x_m$. Обозначим множество этих переменных $\Omega(t)$. Чтобы упростить рассмотрение, будем считать, что $F(t)$ имеет глубину 1. Таким образом, $\Omega(t) = \{x_1(t-1), \dots, x_m(t-1), x_1(t), \dots, x_m(t)\}$. Построение проекции на $\Omega(t)$ состоит из двух этапов: сначала строится проекция на множество $\Omega'(t) = \{x_1(t-1), \dots, x_m(t-1), y_1(t-1), \dots, y_n(t-1), x_1(t), \dots, x_m(t)\}$, а затем — проекция результата на $\Omega(t)$. В нормальной форме формулы $F(t)$ вида $\bigvee_{i=1}^{n} F_i(t-1) \,\&\, f_i(t)$ только формулы $f_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$ зависят от переменных ранга 0. Поскольку для любых i, j $(i \neq j)$ $F_i(t-1) \,\&\, F_j(t-1) \equiv 0$, то для получения проекции на множество переменных $\Omega'(t)$ склеивания по переменным $y_1(t), \dots, y_n(t)$ можно осуществлять независимо в каждой формуле $f_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$. Таким образом, построение проекции формулы $F(t)$ на множество переменных $\Omega'(t)$ сводится к построению проекций n существенно более простых формул $f_1(t), \dots, f_n(t)$ на это множество переменных.

После получения проекции $F(t)$ на $\Omega'(t)$ нужно построить проекцию этой формулы на множество переменных $\Omega(t)$. Для этого ее следует преобразовать в такую формулу вида $\bigvee_{i=1}^{n} F_i(t-1) \,\&\, f_i(t)$, чтобы для любых i, j $(i \neq j)$ выполнялось $f_i(t) \,\&\, f_j(t) \equiv 0$. Поскольку функции $F_i(t-1)$ $(i = 1, \dots, n)$ зависят только от переменных $x_1(t-1), \dots, x_m(t-1), y_1(t-1), \dots, y_n(t-1)$, построение $\forall$-проекции всей формулы сводится к построению $\forall$-проекций формул $F_i(t-1)$ в конъюнкциях $F_i(t-1) \,\&\, f_i(t)$ на множество $\{x_1(t-1), \dots, x_m(t-1)\}$.

Пример. Пусть в структуре, изображенной на рис. 1, $I_1 = \{i\}$, $O_1 = \{o\}$, $U = \{u\}$, $V = \{v\}$ и $I_2 = O_2 = \varnothing$. Таким образом, $\Omega_C = \{i, o\}$, $\Omega_A = \{i, u, v, o\}$, $\Omega_B = \{u, v\}$.

Для упрощения записи спецификаций автоматов примем следующие соглашения: атом нулевого ранга вида $p(t)$ записывается как p, для атома ранга –1 вида $p(t-1)$ будем использовать запись $[p]$, знаки конъюнкции и квантора всеобщности в формулах опускаются. Обозначение $[p]$ распространим на формулы, построенные из атомов ранга –1, например, формулу $p_1(t-1) \vee p_2(t-1) \,\&$ $\&\, p_3(t-1)$ будем записывать как $[p_1 \vee p_2 p_3]$. В таких обозначениях спецификации автоматов A и C, представленные в нормальной форме, имеют вид

$$F_A(t) = [o]u(io \vee \neg i \neg o) \vee [\neg v \neg o](\neg v \neg uo \vee vu \neg o) \vee [v \neg o] \neg u(vo \vee \neg v \neg o),$$

$$F_C(t) = [o](io \vee \neg i \neg o) \vee [\neg o]o.$$

Автомат C, специфицируемый формулой $\forall t F_C(t)$, изображен на рис. 2.

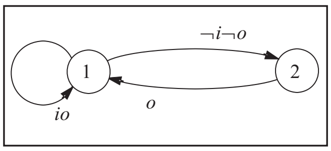

Рис. 2

Спецификацию автомата B сигнатуры $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$ будем строить в виде

$$F'_B(t) = \neg(\min(F_A(t))) \vee F_C(t).$$

Минимальная форма формулы $F_A(t)$ имеет вид

$$\min(F_A(t)) = [o(i \vee \neg u)]u(io \vee \neg i \neg o) \vee$$

$$\vee [\neg v \neg o(\neg i \vee \neg u)](\neg v \neg uo \vee vu \neg o) \vee [vu \neg o] \neg u(vo \vee \neg v \neg o).$$

Для получения полной нормальной формы следует добавить конъюнкцию $[v \neg u \neg o \vee \neg iuo \vee i \neg vu \neg o](0)$. Теперь отрицание формулы $\min(F_A(t))$ получается путем инвертирования всех подформул вида $f_i(t)$:

$$\neg(\min(F_A(t))) = [o(i \vee \neg u)](\neg u \vee i \neg o \vee \neg io) \vee$$

$$\vee [\neg v \neg o(\neg i \vee \neg u)](v \neg u \vee uo \vee \neg v \neg o) \vee$$

$$\vee [vu \neg o](v \neg o \vee \neg vo \vee u) \vee [v \neg u \neg o \vee \neg iuo \vee i \neg vu \neg o](1).$$

Дизъюнктивное произведение формул $\neg(\min(F_A(t)))$ и $F_C(t)$ дает:

$$F'_B(t) = [o(i \vee \neg u)](1) \vee [\neg v \neg o(\neg i \vee \neg u)](\neg u \vee o \vee \neg v) \vee [vu \neg o](u \vee o \vee v) \vee$$

$$\vee [v \neg u \neg o \vee \neg iuo \vee i \neg vu \neg o](1) = [o \vee v \neg u \vee i \neg vu](1) \vee$$

$$\vee [\neg i \neg v \neg o \vee \neg v \neg u \neg o](\neg u \vee o \vee \neg v) \vee [vu \neg o](u \vee o \vee v).$$

Построим теперь $\forall$-проекцию формулы $F'_B(t)$ на $\{[v], [u], v, u\}$.

На первом этапе получим

$$[o \vee v \neg u \vee i \neg vu](1) \vee [\neg i \neg v \neg o \vee \neg v \neg u \neg o](\neg v \vee \neg u) \vee [vu \neg o](v \vee u).$$

Ортогонализация формул $f_i(t)$ дает

$$[o \vee \neg v \vee \neg u](\neg v \neg u) \vee [1](\neg vu \vee v \neg u) \vee [o \vee v \vee iu](vu).$$

На втором этапе получим

$$F_B(t) = [\neg v \vee \neg u](\neg v \neg u) \vee [1](\neg vu \vee v \neg u) \vee [v](vu).$$

Покажем, что полученная формула специфицирует автомат, являющийся решением уравнения $A \circ X = C$. Для этого построим спецификацию композиции автоматов A и B, т.е. $F_A(t) \,\&\, F_B(t)$. Перемножив соответствующие формулы, получим

$$[\neg v \neg o](\neg v \neg uo) \vee [v \neg u \neg o](\neg v \neg u \neg o) \vee$$

$$\vee [o] \neg vu(io \vee \neg i \neg o) \vee [v \neg o](v \neg uo) \vee [vo]vu(io \vee \neg i \neg o).$$

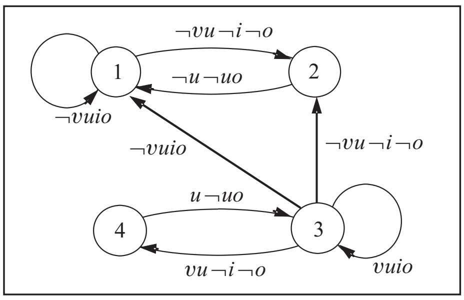

Рис. 3

Эта формула специфицирует автомат, изображенный на рис. 3.

Нетрудно видеть, что ограничение этого автомата на множество переменных $\{i, o\}$ эквивалентно автомату C.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача решения неравенств над Σ-автоматами, возникающая при композиционном подходе к проектированию реактивных систем. Такие неравенства характеризуются операцией композиции автоматов и бинарным отношением «$\leq$», определенным на множестве автоматов. Задача формулируется и решается на уровне спецификаций автоматов в логическом языке L, поэтому соответствующие понятия определяются для спецификаций. При решении неравенств такого рода обычно интерес представляют наибольшие в смысле указанного отношения решения, однако в нашем случае отношение ≤ является частичным порядком, для которого наибольшего решения может не существовать. В связи с этим рассматривается задача отыскания максимального решения. Выбор для спецификации достаточно простого языка позволил свести решение этой задачи к преобразованию пропозициональных формул.

В приложениях, ориентированных на схемную реализацию проектируемой системы, используются другие виды композиции, обеспечивающие невозможность образования порочного цикла при изменении входных и выходных сигналов взаимодействующих модулей. Как показано в [9], многие из таких видов композиции могут быть сведены к рассмотренной в настоящей статье синхронной композиции циклических Σ-автоматов путем простого преобразования одной или обеих спецификаций, участвующих в композиции.

Основная идея предложенного подхода состоит в том, чтобы сначала построить решение для синхронной композиции, т.е. в виде формулы, сигнатура которой состоит из всех предикатных символов, встречающихся в спецификациях, а затем получить решение для внешней композиции, взяв ∀-проекцию полученной формулы на соответствующее множество переменных. Предложен подход к построению такой проекции путем сведения задачи большой размерности к ряду задач существенно меньшей размерности.

Вообще говоря, любая формула, удовлетворяющая уравнению $\min(F_A(t) \,\&\, F_X(t)) = \min(F_A(t) \,\&\, F_C(t))$, является максимальным решением в пространстве состояний сигнатуры $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$. Поскольку требуемое решение получается путем взятия ∀-проекции решения с сигнатурой $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$, построение спецификации в виде максимальной формы такого решения увеличивает возможности оптимизации решения с сигнатурой Ω_B.

Следует заметить, что задача решается для неинициальных спецификаций, хотя на практике, как правило, рассматриваются инициальные системы. Обычно инициализация спецификаций в языке L осуществляется путем задания начального условия в виде формулы $F(t)$ этого же языка, используемой для выделения начального состояния после перехода к процедурному представлению автомата. Нормальная форма представления спецификаций дает возможность сразу учитывать их инициальность, что в ряде случаев сокращает объем вычислений, необходимых для решения задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Solution of synchronous language equations for logic synthesis / N. Yevtushenko, T. Villa, R. Brayton, A. Petrenko, A. Sangiovanni-Vincentelli // Вестн. Томск. гос. ун-та. — 2002. — № 1. — С. 132–138.
2. Buffalov S., El-Fakih Khaled, Yevtushenko N., Bochmann G. Progressive solutions to a parallel automata equation // Lect. Notes Comput. Sci. — 2003. — **2767**. — P. 367–382.
3. Yevtushenko N., Zharikova S., Vetrova M. Multi component digital circuit optimization by solving FSM equations // Proc. Euromicro Symp. on Digital System Design. — IEEE Comput. Soc., 2003. — P. 62–68.
4. Harel D., Pnueli A. On the development of reactive systems / K.R. Apt, ed. // NATO ASI Series. Logic and Models of Concurrent Systems. — Berlin: Springer, 1985. — **F13.** — P. 477–498.
5. Чеботарев А.Н. Об одном подходе к функциональной спецификации автоматных систем. I // Кибернетика и системный анализ. — 1993. — № 3. — С. 31–42.
6. Брауэр В. Введение в теорию конечных автоматов. — М.: Радио и связь, 1987. — 392 с.
7. Чеботарев А.Н., Куривчак О.И. Аппроксимация множеств сверхслов формулами языка L // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 6. — С. 18–26.
8. Капитонова Ю.В., Чеботарев А.Н. Индуктивный синтез автомата по спецификации в логическом языке L // Там же. — 2000. — №6. — С. 3–13.
9. Чеботарев А.Н. Взаимодействие автоматов // Там же. — 1991. — № 6. — С. 17–29.

Поступила 12.01.2011