УДК 519.9

А.Н. ВОРОНИН

ЭКСПЕРТНЫЕ МОДЕЛИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Ключевые слова: *векторная оптимизация, регрессионные модели, метод экспертных оценок, аппроксимационные полиномы, метод наименьших квадратов, нелинейная схема компромиссов.*

СОДЕРЖАНИЕ ПРОБЛЕМЫ

При оптимизации сложных технических и экономических систем для построения необходимых математических моделей часто не хватает экспериментально-статистических данных. Положение усугубляется, когда оптимизация осуществляется по нескольким противоречивым критериям качества.

В условиях острой нехватки экспериментальных данных предлагаем получать необходимую информацию («квазиэкспериментальные» данные) от экспертов — специалистов, имеющих достаточный опыт в проектировании и эксплуатации сложных систем рассматриваемого класса.

Исследование проводится на примере векторной оптимизации объектов космической деятельности по обобщенному критерию надежность–стоимость, но результаты исследования легко могут быть использованы и в других предметных областях. Под надежностью будем понимать вероятность нахождения определяющих параметров всех элементов объекта в допустимых по условиям работоспособности пределах.

Необходимо учитывать, что в данном случае речь идет о проектировании принципиально новой техники, для которой технико-экономические показатели существенно отличаются от тех, какими разработчики оперировали ранее или работают в настоящее время. Одним из специфических аспектов является ограниченность (а иногда и полное отсутствие) экспериментально-статистических данных, по которым можно было бы определять математические модели надежности и стоимости.

В этих трудноформализуемых условиях приходится прибегать к нетрадиционным подходам, один из которых рассматривается в настоящей работе. Естественно, что в данном случае речь может идти лишь о предварительных расчетах, ориентировочном определении основных тенденций при выборе факторов, влияющих на надежность и стоимость разрабатываемых объектов космической деятельности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для решения задачи оптимизации необходимо иметь следующие отправные данные математической модели.

1. Критерии:

$$y_1' = f_1(x)\,; \;\; y_2 = f_2(x)\,,$$

где y_1' — надежность объекта космической деятельности (критерий, подлежащий максимизации); y_2 — стоимость мероприятий, от которых зависит надежность (критерий, подлежащий минимизации); f_1 и f_2 — некоторые критериальные функции; $x = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ — n-мерный вектор независимых переменных (аргументы оптимизации).

2. Ограничения по независимым переменным $x \in X$, где

$$X = \{x \,\big|\, x_{i\,\min} \le x_i \le x_{i\,\max},\; i \in [1, n]\}\,.$$

3. Ограничения по критериям $y \in M$, где M — область определения вектора критерив, $y = \{y_k\}_{k=1}^{s}$— s-мерный вектор минимизируемых неотрицательных критериев $(s = 2)$. Отметим, что в качестве единого способа экстремизации критериев в данной задаче выбрана минимизация. Чтобы критерий по характеристике надежности сделать также минимизируемым, определим $y_1 = 1 - y_1'$ (если 100-процентная надежность выражается единицей). Тогда

$$M = \{y \,\big|\, 0 \le y_k \le A_k,\; k \in [1; 2]\}\,.$$

Ограничения $x_{i\,\min}$, $x_{i\,\max}$ по аргументам $x \in X$ и A_k по критериям $y \in M$ задаются, исходя из физических соображений.

Если перечисленные отправные данные имеются, то существуют все предпосылки для оптимизации космических объектов по критериям надежности и стоимости, т.е. для определения компромиссно-оптимальных значений параметров $x^* = \{x_i^*\}_{i=1}^n$.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Ввиду очевидной противоречивости критериев необходимо прибегнуть к специфическим методам теории многокритериальной (векторной) оптимизации. Если используется способ скалярной свертки, то математически модель решения задачи векторной оптимизации представляется в виде

$$x^* = \arg \min_{x \in X} Y[y(x)], \qquad (1)$$

где $Y(y)$ — скалярная функция в понимании скалярной свертки вектора частных критериев, вид которой зависит от выбранной схемы компромиссов. При этом нужно убедиться, что ее минимизация приводит к парето-оптимальному решению: $x^* \in X^K$. В работах [1, 2] предложена скалярная свертка по нелинейной схеме компромиссов

$$Y[y(x)] = \sum_{k=1}^{s} A_k [A_k - y_k(x)]^{-1}, \qquad (2)$$

где s — размерность вектора критериев. Свертка (2) дает возможность формализовано получать парето-оптимальные решения, адекватные заданным ситуациям. При $s = 2$ модель (1) примет вид

$$x^* = \arg \min_{x \in X} \left[\frac{A_1}{A_1 - y_1(x)} + \frac{A_2}{A_2 - y_2(x)} \right]. \qquad (3)$$

Качественный состав вектора x достаточно разнообразен, и соответственно размерность n этого вектора в общем случае велика. Полный учет параметров x привел бы к неоправданному усложнению критериальных функций f_1 и f_2 и к чрезмерным трудностям решения оптимизационной задачи. Поэтому естественным является выбор только наиболее информативных параметров x — координат пространства, в котором будет осуществляться оптимизация критериев y_1 и y_2, в то время как остальные параметры считаются фиксированными и заданными.

Выбор будем выполнять с участием экспертов. Их знакомят с условиями задачи, т.е. называют конкретный тип разрабатываемого космического объекта (ракета-носитель или космический аппарат), описывают условия его проектирования, производства, испытаний и эксплуатации. Эксперты должны выявить те мероприятия, которые, по их мнению, могут влиять на надежность и стоимость данного космического объекта на разных стадиях жизненного цикла изделия. К ним относятся кратность резервирования систем управления (x_1), значения коэффициентов запаса по прочности конструкции (x_2) и по мощности энергоисточников (x_3); относительный объем входного контроля материалов и комплектующих (x_4); подбор технологий производства и относительный объем контроля их стабильности (x_5); объем проведения контрольно-выборочных испытаний (x_6); объем экспериментальной отработки элементов и систем во всех режимах (x_7); величина материального стимулирования персонала (x_8) и т.д. В результате специальной процедуры [1] определяются адекватный качественный состав и размерность n вектора независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ критериальных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Вид критериальных функций зависит от сведений, которыми располагает исследователь для построения модели. Спектр широк — от полного знания механизмов явлений (детерминированная модель) до полной неопределенности («черный ящик»). Между этими информационными полюсами находится вероятностный уровень неопределенности. Детерминированную математическую модель $f(x)$ любой характеристики объекта космической деятельности разработать затруднительно ввиду сложности происходящих физических процессов и реакций объекта на комплекс внутренних и внешних факторов.

Рассмотрим, например, критериальную функцию надежности $f_1(x)$ и аппроксимируем ее на множестве аргументов $x \in X$ некоторой приближающей функцией $F_1(x, a)$, известной с точностью до вектора констант (коэффициентов) $a = \{a_j\}_{j=1}^m$.

При выборе вида функции $F_1(x, a)$ следует иметь в виду [1], что наилучшими будут результаты, если регрессионная модель строится на основе некоторой известной информации о механизмах исследуемых явлений. Тогда модель является содержательной. При отсутствии такой информации приходится работать в классе формальных регрессионных моделей и прибегать к большим объемам вычислений.

К формальной модели предъявляются два противоречивых требования. С одной стороны, приближающая функция должна быть достаточно простой, чтобы процессы вычислений не оказались чрезмерно громоздкими. С другой стороны, аппроксимирующая зависимость должна обладать достаточными прогностическими и точностными свойствами. В большинстве практических случаев оба эти требования выполняются в классе регрессионных полиномов второго порядка

$$F_1(x, a) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i,\, j=1,\, i<j}^{n} a_{ij} x_i x_j \,, \tag{4}$$

где a_0, a_i, a_{ij} — коэффициенты. Функция (4) достаточно хорошо адаптируется к топографии целевой функции $f_1(x)$, она способна выражать такие особенности, как, например, овражность. На практике используются различные усечения регрессионного полинома (4), в основном линейные приближения.

Определение коэффициентов a может быть выполнено как методами интерполяции, так и методом наименьших квадратов (МНК). Интерполяционные формулы предусматривают точное совпадение приближающей и целевой функций в опорных точках (узлах интерполяции), количество которых N определяется числом неизвестных констант a, равным m. Коэффициенты a находятся решением определенной системы уравнений для критерия надежности

$$F_1(x^{(u)}, a) = f_1(x^{(u)}) \,,\ u \in [1,\, N = m] \,, \tag{5}$$

где $x^{(u)}$ — узлы интерполяции. Предполагается, что значения целевой функции в узлах аппроксимации $f_1(x^{(u)})$, $u \in [1, N]$, известны. Но для их получения следует обратиться к экспертам. Это — ключевой момент в настоящей работе, который рассматривается ниже.

МНК предусматривает N опорных точек (узлов аппроксимации), причем число N может быть больше, меньше или равно (как частный случай) количеству констант m. Неизвестные коэффициенты приближающей функции определяются из условия

$$E(a) = \sum_{u=1}^{N} [F_1(x^{(u)}, a) - f_1(x^{(u)})]^2 = \min_{a}. \tag{6}$$

Используя необходимое условие минимума функции, получаем называемую в теории МНК систему нормальных уравнений для критерия надежности

$$\frac{\partial E(a)}{\partial a_j} = 0 \,,\ j \in [1, m] \,, \tag{7}$$

решение которой определяет коэффициенты аппроксимирующей функции. Отметим, что независимо от числа выбираемых опорных точек N система нормальных уравнений (7) всегда является определенной.

Для критерия стоимости $f_2(x)$ справедливы все вышеизложенные соображения, но вместо $a = \{a_j\}_{j=1}^{m}$ в выражении аппроксимирующей функции $F_2(x, b)$ в общем случае фигурирует другой вектор неизвестных констант — $b = \{b_h\}_{h=1}^{p}$.

Специфика рассматриваемой задачи заключается в сложности получения значений целевых функций в опорных точках. Действительно, даже для одной опорной точки, которая соответствует сложившемуся к настоящему времени комплексу мер по обеспечению надежности космического объекта данного класса, нет достаточной статистики для уверенной оценки уровня надежности. Это особенно относится ко вновь разработанным объектам, не имеющим длительного периода эксплуатации. И совсем иллюзорны возможности объективной оценки надежности для других точек области существования аргументов оптимизации $x \in X$.

В тех случаях, когда задача трудноформализуема, приходится прибегать к методам экспертных оценок. Квалифицированный специалист (эксперт), имеющий достаточный опыт в проектировании, производстве и эксплуатации объектов данного класса, может провести мысленный эксперимент и представить уровни надежности объекта при различных сочетаниях факторов $x \in X$. Таким образом, в основе метода лежит индивидуальное мнение (постулат), высказываемое специалистом-экспертом об объекте оценки, исходя из своего профессионального опыта. Основным недостатком постулирования является возможность субъективного произвольного выбора.

Метод обработки экспертных оценок позволяет уменьшить этот недостаток. Согласно методу для оценки некоторой количественной характеристики используются постулаты не одного, а нескольких лиц, компетентных в данном вопросе. Предполагается, что «истинное» значение неизвестной количественной характеристики находится внутри диапазона оценок экспертов и коллективное мнение является более достоверным. В работе [1] предложена процедура обработки данных экспертных оценок, в ходе которой получены уточненные агрегированные оценки, а также (как сопутствующий продукт) определяются коэффициенты доверия к мнению отдельных экспертов.

Применив этот метод к обработке экспертных оценок надежности и стоимости в каждой из N узловых точек области определения $x \in X$, получим два вектора оценок (квазиэкспериментальные данные):

$$\{f_1(x^{(u)})\}_{u=1}^N, \ \{f_2(x^{(u)})\}_{u=1}^N,$$

которые служат основанием для определения векторов констант a и b в случае применения способа интерполяции или по условиям (6), (7), если применяется МНК. Так определяются математические регрессионные модели

$$y_1' = f_1(x) \approx F_1(x); \ y_2 = f_2(x) \approx F_2(x),$$

которые задействованы в оптимизационной процедуре (3). Поскольку информация о целевых функциях в узловых точках области аппроксимации получена не экспериментально, а путем экспертного оценивания, то и модели $F_1(x)$, $F_2(x)$ называются экспертными регрессионными моделями.

Рассмотрим проблему выбора способа аппроксимации критериальных функций в заданных обстоятельствах. При различных усечениях регрессионного полинома (4) количество неизвестных констант, как правило, превышает то число N узлов аппроксимации, в которых эксперт может достаточно уверенно дать свою оценку величины критериальной функции. Поэтому, используя способ интерполяции, получим недоопределенную систему уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных констант.

Чтобы не допустить этого, следует применить метод наименьших квадратов, который в математике рассматривается как способ решения недоопределенных, переопределенных и определенных (как частный случай) систем уравнений. При этом решение может быть как аналитическим (по формулам (6), (7)), так и численным, если функция невязок $E(a)$ имеет сложное выражение. В последнем случае используется алгоритм Левенберга–Марквардта [3, 4].

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим задачу оптимизации процесса разработки перспективной ракеты-носителя по обобщенному критерию надежность–стоимость. С помощью экспертных процедур [1] выбраны и фиксированы значения факторов, влияющих на надежность изделия (здесь и далее все числовые данные условны). Исключение составляют следующие три фактора.

1. Кратность резервирования систем управления ракетой x_1 выбирается из возможного диапазона 1÷10: $x_1 \in [1;10]$;

2. Коэффициент запаса по прочности конструкции x_2 находится в диапазоне 1÷5: $x_2 \in [1;5]$;

3. Коэффициент материального стимулирования персонала фирмы-разработчика x_3 может выбираться из диапазона 1÷6: $x_3 \in [1;6]$.

Требуется с использованием противоречивых критериев надежности $y_1' = f_1(x)$ и стоимости $y_2 = f_2(x)$ оценить компромиссно-оптимальные величины этих трех факторов: $x^* = \{x_i^*\}_{i=1}^3$.

Критериальную функцию надежности аппроксимируем линейным приближением со свободным членом

$$y_1' = f_1(x) \approx F_1(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \ ,$$

число неизвестных констант составляет $m = 4$.

При определении значений целевой функции в узлах аппроксимации $f_1(x^{(u)})$, $u \in [1, N]$, следует учитывать, что с достаточной степенью уверенности эксперты могут оценить эти значения только в трех ($N = 3$) точках области $x \in X$:

$$x_1^{(1)} = x_{1\max} = 10; \quad x_2^{(1)} = x_{2\max} = 5; \quad x_3^{(1)} = x_{3\max} = 6;$$
$$x_1^{(2)} = x_{1\min} = 1; \quad x_2^{(2)} = x_{2\min} = 1; \quad x_3^{(2)} = x_{3\min} = 1;$$
$$x_1^{(3)} = x_{1\mathrm{nom}} = 6; \quad x_2^{(3)} = x_{2\mathrm{nom}} = 3. \quad x_3^{(3)} = x_{3\mathrm{nom}} = 3.$$

Последняя точка соответствует представлениям экспертов о номинальных значениях факторов надежности.

Предположим, что эксперты дали следующие оценки уровней надежности изделия в указанных узлах аппроксимации (единица соответствует 100-процентной надежности изделия):

$$f_1(x^{(1)}) = 0{,}8; \; f_1(x^{(2)}) = 0{,}6; \; f_1(x^{(3)}) = 0{,}7.$$

Отметим, что в данной задаче $N < m$, поэтому метод интерполяции применен быть не может. Метод МНК предусматривает минимизацию по неизвестным константам функции (6) квадратов невязок, которая при заданных условиях имеет вид

$$E(a) = (a_0 + 10a_1 + 5a_2 + 6a_3 - 0{,}8)^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 - 0{,}6)^2 +$$
$$+ (a_0 + 6a_1 + 3a_2 + 3a_3 - 0{,}7)^2.$$

Применение необходимого условия минимума функции (7) приводит к следующей определенной системе нормальных уравнений:

$$3a_0 + 17a_1 + 9a_2 + 10a_3 = 2{,}1;$$
$$17a_0 + 137a_1 + 69a_2 + 79a_3 = 12{,}8;$$
$$9a_0 + 69a_1 + 35a_2 + 40a_3 = 6{,}7;$$
$$10a_0 + 79a_1 + 40a_2 + 46a_3 = 7{,}5.$$

Для решения этой системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) разработаны стандартные компьютерные программы. Метод последовательного исключения переменных Гаусса положен в основу программы on-line [5]. Формулы Крамера для решения СЛАУ используются в программе, изложенной в работе [6]. Применив метод Гаусса для решения данной системы нормальных уравнений, получим значения неизвестных констант:

$$a_0 = 0{,}46; \; a_1 = -0{,}06; \; a_2 = 0{,}25; \; a_3 = -0{,}06.$$

Минимизируемый критерий по характеристике надежности определяется по формуле $y_1(x) = 1 - y'_1(x) \approx 0{,}54 + 0{,}06x_1 - 0{,}25x_2 + 0{,}06x_3$ (имеется в виду, что единица соответствует 100-процентной надежности изделия).

Аналогичный расчет проведем для критерия стоимости. Критериальную функцию стоимости аппроксимируем линейным приближением без свободного члена

$$y_2(x) \approx F_2(x^{(u)}, b) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3,$$

где b_1, b_2, b_3 — неизвестные константы ($p = 3$). Оценку уровней стоимости эксперты дали в тех же узлах аппроксимации ($N = 3$), что и в случае критерия надежности:

$$f_2(x^{(1)}) = 1; \; f_2(x^{(2)}) = 0{,}3; \; f_2(x^{(3)}) = 0{,}6$$

(нормированное значение стоимости при максимальных факторах равно единице). Поскольку в данном случае $p = N$, то для определения констант можно использовать метод интерполяции. Уравнение (5) применительно к критерию стоимости преобразуется к виду

$$F_2(x^{(u)}, b) = f_2(x^{(u)}), \; u \in [1, N = p],$$

с учетом числовых данных

$$10b_1 + 5b_2 + 6b_3 = 1;$$
$$b_1 + b_2 + b_3 = 0{,}3;$$
$$6b_1 + 3b_2 + 3b_3 = 0{,}6.$$

Решив эту СЛАУ методом Крамера [6], получим

$$b_1 = -0{,}1\,;\ b_2 = 0{,}3\,;\ b_3 = 0{,}1\,,$$

выражение для критерия стоимости имеет вид

$$y_2(x) \approx -0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}1x_3\,.$$

Получены аналитические выражения критериев надежности и стоимости, что позволяет применить формулу (3) для определения компромиссно-оптимальных значений факторов x^* с учетом очевидных ограничений $A_1 = A_2 = 1$:

$$x^* = \arg\min_{x\in X}\left(\frac{1}{1-0{,}54-0{,}06x_1+0{,}25x_2-0{,}06x_3}+\frac{1}{1+0{,}1x_1-0{,}3x_2-0{,}1x_3}\right).$$

Осуществив минимизацию скалярной свертки критериев по аргументам оптимизации методом Нелдера-Мида [1,2], получим

$$x_1^* = 9{,}99\,;\ x_2^* = 3{,}69\,;\ x_3^* = 1{,}01\,.$$

Для решения широкого спектра многокритериальных задач разработана программа TURBO-OPTIM [1]. Результат иллюстративного примера можно трактовать следующим образом. При оптимизации разрабатываемой перспективной ракеты-носителя особое внимание следует обратить на резервирование систем управления изделием x_1. Коэффициент запаса по прочности конструкции должен незначительно превышать середину диапазона $x_2 \in [1;5]$. Не следует возлагать особых надежд на возможности материального стимулирования персонала x_3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное исследование дает возможность выявить основные тенденции при разработке и оптимизации новой космической техники. Предложенная методика позволила практически решить задачу векторной оптимизации процесса обязательного страхования разрабатываемых объектов космической деятельности [7].

Естественно, экспертные модели менее информативны, чем регрессионные модели, определенные с помощью реальных экспериментов. Однако экспертные оценки все-таки отражают (хотя и с возможными искажениями) реальную действительность, к тому же экспертные модели являются только начальными приближениями и по мере накопления статистических данных поддаются усовершенствованию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин А.Н., Зиатдинов Ю.К., Козлов А.И. Векторная оптимизация динамических систем. — Киев: Техніка, 1999. — 284 с.
2. Воронин А.Н. Нелинейная схема компромиссов в многокритериальных задачах оценивания и оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 4.— С. 106–114.
3. Levenberg K. A method for the solution of certain problems in least squares // Quart. Appl. Math., — 1944. — **2.** — P. 164–168.
4. Marquardt D. An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters // SIAM J. Appl. Math. — 1963. — **11.** — P. 431–441.
5. http://www.webmath.ru/web/prog13_1.php.
6. http://www.webmath.ru/web/prog12_1.php.
7. Воронин А.Н., Кириченко А.А., Козлов А.И. Регрессионная модель экспертных оценок надежность–стоимость в задачах векторной оптимизации страхования объектов космической деятельности // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 3. — С. 58–65.

Поступила 04.08.2010