УДК 519.81

**В.М. МИХАЛЕВИЧ**

# О ДВУХ КРИТЕРИЯХ ПРИ МНОГОКРАТНОМ ВЫБОРЕ РЕШЕНИЙ

**Ключевые слова:** *система принятия решения, проблема неопределенности, multi-prior модель.*

При рассмотрении задачи принятия решений (коротко задачи решений (ЗР)) в системе принятия решения, представляющей пару — того, кто принимает решение (ТПР), и ситуацию принятия решения (СПР) (см. [1]), возникает вопрос о критерии, согласно которому ТПР реализует процедуру выбора этого решения из множества возможных. Этот вопрос порождает проблему неопределенности процедуры выбора решений.

Рассмотрим подход к проблеме неопределенности для задач многократного принятия решений, представленных в форме, расширяющей множество случайных последствий (так называемой необайесовской форме [2]), до случайных в широком смысле последствий.

Задачу принятия решений, когда последствия определяются действием (решением) и состоянием природы (ненаблюдаемым параметром), будем называть параметрической ЗР. Формализуем ее следующим образом.

**Определение 1.** Схемой ситуации задачи решения (ССЗР) называется упорядоченная четверка вида $(X, \Theta, U, g)$, где $g$ для произвольных непустых множеств $X, \Theta, U$ является отображением $\Theta \times U$ на $X$.

При этом множество $X$ называется множеством последствий с алгеброй подмножеств $\Xi$, $\Theta$ — множеством значений ненаблюдаемого параметра с алгеброй подмножеств $\Sigma$, $U$ — множеством решений, $g$ — отображением последствий ССЗР $(X, \Theta, U, g)$. Класс всех параметрических ССЗР вида $(X, \Theta, U, G)$ будем обозначать $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(X) := \{(X, \cdot, \cdot, \cdot) \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}(X, \Theta) := \{(X, \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbb{Z}\}$.

Рассмотрим класс ССЗР с заданными отношениями предпочтений на соответствующих множествах последствий. Тогда каждой параметрической

ССЗР этого класса соответствует упорядоченная четверка вида $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g)$, где $(\succcurlyeq)$ — соответствующее отношение предпочтения на множестве последствий этой ССЗР. Обозначим $\mathbf{Z}$ класс всех ССЗР вида $\mathcal{Z}$, $\mathbf{Z}(X) := \{((X, \cdot), \cdot, \cdot, \cdot) \in \mathbf{Z}\}$ и $\mathbf{Z}((X, \succcurlyeq), \Theta) := \{((X, \succcurlyeq), \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbf{Z}\}$.

**Определение 2.** Проекцией ССЗР класса $\mathbf{Z}$ называется такое отображение *Пр*: $\mathbf{Z} \to \mathbb{Z}$, что для любой ССЗР $((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}$ *Пр* $(((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g)) = (X, \Theta, U, g)$.

Продолжая изучение неопределенности путем «перехода явным образом к рассмотрению бесконечного числа «испытаний»... иными словами задачи принятия «массовых» решений» [1, с. 42], рассмотрим многократный выбор решений $(u_1, \ldots, u_n), n \in N$, в параметрической ситуации ЗР, заданной своей ССЗР $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(X, \Theta)$. При этом соответствующий вектор последствий $(x_1, \ldots, x_n)$ в зависимости от соответствующих значений ненаблюдаемого параметра $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ удовлетворяет условиям $x_i = g(\theta_i, u_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Для любого непустого множества $A$ через $A^\infty$ далее будем обозначать множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A^n$.

Под основной ЗР при многократном выборе, называемой основной задачей многократных решений (ЗМР) в ситуации заданной ССЗР $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(X, \Theta)$, в классе ССЗР $\mathbb{Z}(X, \Theta)$ будем понимать установку этим ТПР предпочтений на множестве $X^\infty$ (первая основная ЗМР) и на множестве $U^\infty$ (вторая основная ЗМР) в ситуации, заданной ССЗР $Z = (X, \Theta, U, g)$.

**Определение 3.** Правилом выбора предпочтений (ПВП) для ЗМР в $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ будем называть любое отображение $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, определенное на $\mathbb{Z}'$ и сопоставляющее каждой $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'$ некоторую пару бинарных отношений $\pi_{1Z} = (X^\infty, \succcurlyeq_Z)$ и $\pi_{2Z} = (X^\infty, \overset{*}{\succcurlyeq}_Z)$, т.е. $\pi_{1Z} \in [2^{(X^\infty)^2}]^{\mathbb{Z}'(X, \Theta)}$, $\pi_{2Z} \in [2^{(U^\infty)^2}]^{\mathbb{Z}'(X, \Theta)}$, а $\pi_Z = (\pi_{1Z}, \pi_{2Z})$. Класс всех ПВП для ЗМР в $\mathbb{Z}'$ будем обозначать $\Pi^\infty(\mathbb{Z}')$.

Пусть $A$ — произвольное непустое множество.

**Определение 4.** Статистическим предпочтением на множестве $A$ (см. [1]) будем называть такое бинарное отношение $(\succcurlyeq)$ на $A^\infty$, которое обладает следующими свойствами.

**С1.** Если $\bar{a} \succcurlyeq \bar{b} \succcurlyeq \bar{c}$ для любых $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in A^\infty$, то $\bar{a} \succcurlyeq \bar{c}$.

**С2.** Для любых $\bar{a}, \bar{b} \in A^\infty$ либо $\bar{a} \succcurlyeq \bar{b}$, либо $\bar{b} \succcurlyeq \bar{a}$.

**С3**. Если $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n), \bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ для любых $\bar{a}, \bar{b} \in A^\infty$ и $b_k = a_{i_k} (1 \le k \le n)$, $k, n \in N$, где

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

есть некоторая подстановка, то $\bar{a} \sim \bar{b}$ (где $(\sim)$ является симметричной частью $(\succcurlyeq)$, т.е. $(\sim) = (\succcurlyeq) \cap (\succcurlyeq)^{-1}$).

**С4.** Если $\bar{a} \sim \bar{b}$, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_k)$, $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_l)$, $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_m)$, $\bar{d} = (d_1, \ldots, d_r)$, $k, l, m, r \in N$, для любых $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in A^\infty$, то $(c_1, \ldots, c_m, a_1, \ldots, a_k) \succcurlyeq \succcurlyeq (d_1, \ldots, d_r, b_1, \ldots, b_l)$ равносильно $\bar{c} \succcurlyeq \bar{d}$.

**С5.** Если $\bar{a} \succ \bar{b}$ (где $(\succ)$ — асимметричная часть $(\succcurlyeq)$, т.е. $(\succ) = (\succcurlyeq) \setminus (\sim)$), $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_k)$, $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_l)$, $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_m)$, $\bar{d} = (d_1, \ldots, d_r)$, $k, l, m, r \in N$, для любых $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in A^\infty$, то существует такое натуральное число $n$, для которого

$$\underbrace{(a_1, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_1, \ldots, a_k}_{n \text{ раз}}, c_1, \ldots, c_m) \succ$$

$$\succ \underbrace{(b_1, \ldots, b_l, b_1, \ldots, b_l, \ldots, b_1, \ldots, b_l}_{n \text{ раз}}, d_1, \ldots, d_r).$$

Введем для произвольных $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_k)$, $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_l)$ (где $k, l \in N$), принадлежащих $A^\infty$, бинарную операцию, которую обозначим $\oplus$:

$$\bar{a} \oplus \bar{b} \overset{\text{def}}{=} (a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) \in A^\infty.$$

Из определения операции $\oplus$ следует представление $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ в виде $\bar{a} = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$, $n \in N$, или короче

$$\bar{a} = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} a_i .$$

Тогда естественно также ввести операцию $\otimes : N \times A^\infty \to A^\infty$ так, что для произвольных $n \in N$ и $\bar{a} \in A^\infty$ выполняется соотношение

$$n \otimes \bar{a} = \underbrace{\bar{a} \oplus \ldots \oplus \bar{a}}_{n \text{ раз}} .$$

Рассмотрим так называемые необайесовские ЗР [2], расширив множество последствий $X$ до множества $Y$ случайных последствий, представляющих собой множество распределений на X следующего вида:

$$Y = \{(y : X \to [0,1]) : \text{card}\, \{x : y(x) \neq 0, x \in X\} < \infty, \sum_{x \in X : y(x) \neq 0} y(x) = 1\} . \qquad (1)$$

**Определение 5.** Для произвольных непустых множеств $A, \Theta$ и нестрогого порядка $(A, \succcurlyeq)$ отображение $f \in A^\Theta$ называется ограниченным относительно $(A, \succcurlyeq)$, если существуют такие $a, b \in A$, что $a \succcurlyeq f(\theta) \succcurlyeq b$ для всех $\theta \in \Theta$.

**Определение 6.** Для произвольных непустых множеств $(A, \Theta)$ нестрогого порядка $(A, \succcurlyeq)$ и алгебры $\Sigma \subseteq 2^\Theta$ отображение $f \in A^\Theta$ называется $\Sigma$-измеримым относительно $(A, \succcurlyeq)$, если для всех элементов $a \in A$ множества $\{\theta : f(\theta) \succ a\}$ и $\{\theta : f(\theta) \succcurlyeq a\}$ принадлежат $\Sigma$.

Обозначим $L_0(A, \Theta)$ множество всех $\Sigma$-измеримых конечнозначных отображений на множестве $\Theta$ со значениями в множестве $A$, т.е. $f \in L_0(A, \Theta)$, если card $\{f(\Theta)\} < \infty$ и $f^{-1}(a) \in \Sigma \;\; \forall a \in A$.

**Определение 7.** Для произвольных непустых множеств $X, \Theta$ и нестрогого порядка $(X, \succcurlyeq)$ отображение $f \in Y^\Theta$, где $Y$ определяется согласно (1), будем называть ограниченным относительно $(X, \succcurlyeq)$, если отображения $\underline{f}, \overline{f} \in X^\Theta$, заданные на $\Theta$ как

$$\underline{f}(\theta) \overset{\text{def}}{=} \min\{x \in X : [f(\theta)](x) \neq 0\} \quad \forall \theta \in \Theta,$$

$$\overline{f}(\theta) \overset{\text{def}}{=} \max\{x \in X : [f(\theta)](x) \neq 0\} \quad \forall \theta \in \Theta,$$

являются ограниченными относительно $(X, \succcurlyeq)$.

**Определение 8.** ССЗР $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(Y, \Theta)$, где $Y$ определяется согласно (1), будем называть определяющей, если

$$L_0(Y, \Theta) \subseteq g(\cdot, U) = \text{co}[g(\cdot, U)] \subseteq Y^\Theta. \qquad (2)$$

Обозначим $L_{\succcurlyeq}(Y, \Theta)$ множество всех ограниченых и $\Sigma$-измеримых относительно нестрогого порядка $(X, \succcurlyeq)$ отображений на множестве $\Theta$ со значениями в множестве $Y$.

Определим класс ПВП в ЗМР для $\mathbb{Z}'(Y,\Theta)\subseteq\mathbb{Z}(Y,\Theta)$, который будем обозначать $\Pi_0^\infty(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$, как подкласс всех таких ПВП $\pi\in\Pi^\infty(\mathbb{Z}'(Y,\Theta))$, что для любой определяющей ССЗР $Z=(Y,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$ выполняются следующие условия.

**Y1.** Если $Z_i=(Y,\Theta,U_i,g_i)\in\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, $i=\overline{1,2}$, то:

a) $(Y,\succcurlyeq_{Z_1})=(Y,\succcurlyeq_{Z_2})=:(Y,\succcurlyeq)$ невырожденное, т.е. не для всех $y_1,y_2\in Y$ выполняется $y_1\succcurlyeq y_2$,

b) из $(y_1)_\Theta\succcurlyeq^*_{Z_1}(y_2)_\Theta$ следует $y_1\succcurlyeq y_2$ $\forall y_1,y_2\in Y$,

c) из $u_1,v_1\in U_1$, $u_2,v_2\in U_2$, $g_1(\theta,u_1)=g_2(\theta,u_2)$, $g_1(\theta,v_1)=g_2(\theta,v_2)$ $\forall\theta\in\Theta$, $u_1\succcurlyeq^*_{Z_1}v_1$ следует $u_2\succcurlyeq^*_{Z_2}v_2$.

**Y2.** $(U^\infty,\succcurlyeq^*_Z)$ — нестрогий порядок.

**Y3.** Если $u_i\in U$, $i=\overline{1,2}$, $y\in Y$, $u_1\succ^*_Z u_2$, $\alpha\in(0,1)$, то

$$\alpha u_1+(1-\alpha)y_\Theta\succ^*_Z\alpha u_2+(1-\alpha)y_\Theta .$$

**Y4.** Если $u_i\in U$, $i=\overline{1,3}$, $u_1\succ^*_Z u_2\succ^*_Z u_3$, то найдутся такие $\alpha,\beta\in(0,1)$, что

$$\alpha u_1+(1-\alpha)u_3\succ^*_Z u_2\succ^*_Z\beta u_1+(1-\beta)u_3 .$$

**Y5.** Если $\bar u,\bar v\in U^\infty$, $\bar u=\bigoplus_{i=1}^{k}u_i$, $\bar v=\bigoplus_{j=1}^{l}v_j$ и $\bigoplus_{i=1}^{k}g(\theta,u_i)\succcurlyeq_Z\bigoplus_{j=1}^{l}g(\theta,v_j)$ для любых $k,l\in N,\theta\in\Theta$, то $\bar u\succcurlyeq^*_Z\bar v$.

**Y6.** Если $u_i\in U$, $y_i\in Y$, $i=\overline{1,2}$, то

$$u_1\oplus u_2\sim^*_Z u_2\oplus u_1,\ y_1\oplus y_2\sim_Z y_2\oplus y_1.$$

**Y7.** Если $\bar u_i\in U^\infty$, $\bar y_i\in Y^\infty$, $i=\overline{1,4}$, то из $\bar u_1\sim^*_Z\bar u_2$ следует, что $\bar u_3\oplus\bar u_1\succcurlyeq^*_Z\bar u_4\oplus\bar u_2$ равносильно $\bar u_3\succcurlyeq^*_Z\bar u_4$, а из $\bar y_1\sim^*_Z\bar y_2$ следует, что $\bar y_3\oplus\bar y_1\succcurlyeq^*_Z\bar y_4\oplus\bar y_2$ равносильно $\bar y_3\succcurlyeq^*_Z\bar y_4$.

**Y8.** Если $\bar u_i\in U^\infty$, $\bar y_i\in Y^\infty$, $i=\overline{1,4}$, то из $\bar u_1\succcurlyeq^*_Z u_2$ следует, что найдется такое натуральное $n$, для которого

$$(n\otimes\bar u_1)\oplus\bar u_3\succ^*_Z(n\otimes\bar u_2)\oplus\bar u_4 ,$$

а из $\bar y_1\succcurlyeq^*_Z\bar y_2$ следует, что найдется такое натуральное $n$, для которого

$$(n\otimes\bar y_1)\oplus\bar y_3\succ^*_Z(n\otimes\bar y_2)\oplus\bar y_4 .$$

**Y9.** Если $u_i\in U$, $i=\overline{1,3}$, то из

$$g(\theta,u_1)\oplus g(\theta,u_2)\sim_Z 2\otimes g(\theta,u_3)\quad\forall\theta\in\Theta \tag{3}$$

следует, что

$$2\otimes u_3\succcurlyeq^*_Z u_1\otimes u_2. \tag{4}$$

Все условия **Y1–Y8** достаточно естественны и не требуют пояснений. Что касается условия **Y9**, то оно допускает следующую интерпретацию. Предпочтение (4) означает, что в ЗМР при выполнении условия (3) лучше выбирать два раза действие $u_3$, чем один раз $u_1$, а другой раз $u_2$ (или наоборот). Это обусловлено следующим. Из соотношения (3) и условий **Y1**, **Y5**, **Y6**, **Y7** для $Z=(Y,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, $u_i\in U$, $i=\overline{1,3}$, имеем для любых $\theta_1,\theta_2\in\Theta$

$$[g(\theta_1,u_1)\oplus g(\theta_2,u_2)]\oplus[g(\theta_2,u_1)\oplus g(\theta_1,u_2)]\sim_Z$$

$$\sim_Z [g(\theta_1,u_1)\oplus g(\theta_1,u_2)]\oplus[g(\theta_2,u_1)\oplus g(\theta_2,u_2)]\sim_Z$$

$$\sim_Z 2\otimes g(\theta_1,u_3)\oplus 2\otimes g(\theta_2,u_3)\sim_Z [g(\theta_1,u_3)\oplus g(\theta_2,u_3)]\oplus[g(\theta_2,u_3)\oplus g(\theta_1,u_3)].$$

Отсюда согласно условию **Y5** получим, что для любых $\theta_1,\theta_2\in\Theta$

$$[g(\theta_1,u_1)]_\Theta\oplus[g(\theta_2,u_2)]_\Theta\oplus[g(\theta_2,u_1)]_\Theta\oplus[g(\theta_1,u_2)]_\Theta\overset{*}{\sim}_Z$$

$$\overset{*}{\sim}_Z [g(\theta_1,u_3)]_\Theta\oplus[g[(\theta_2,u_3)]_\Theta\oplus[g(\theta_2,u_3)]_\Theta\oplus[g(\theta_1,u_3)]_\Theta\,. \qquad (5)$$

Однако согласно **Y6**

$$[g(\theta_1,u_3)]_\Theta\oplus[g(\theta_2,u_3)]_\Theta\overset{*}{\sim}_Z [g(\theta_2,u_3)]_\Theta\oplus[g(\theta_1,u_3)]_\Theta\,,$$

т.е. для любой пары значений $\theta_1$ и $\theta_2$ результат от применения $2\otimes u_3$ не зависит от порядка, в котором эти значения появляются, а если применить $u_1$ и $u_2$, то при одном порядке применения результат будет хуже, чем при применении $2\otimes u_3$, если при обратном порядке применения результат оказался лучше, чем при применении $2\otimes u_3$. А именно без уменьшения общности, предположив, что $g(\theta_2,u_1)\oplus g(\theta_1,u_2)\succ_Z g(\theta_1,u_1)\oplus g(\theta_2,u_2)$, получим соотношение

$$g(\theta_1,u_3)\oplus g(\theta_2,u_3)\succ_Z g(\theta_1,u_1)\oplus g(\theta_2,u_2)\,. \qquad (6)$$

Решим это методом от противного. Допустим, что (6) не выполняется, т.е.

$$g(\theta_1,u_1)\oplus g(\theta_2,u_2)\succcurlyeq_Z g(\theta_1,u_3)\oplus g(\theta_2,u_3)\,.$$

Тогда согласно предположению получим

$$g(\theta_2,u_1)\oplus g(\theta_1,u_2)\succ_Z g(\theta_1,u_1)\oplus g(\theta_2,u_2)\succcurlyeq_Z g(\theta_1,u_3)\oplus g(\theta_2,u_3)\,. \quad (7)$$

Однако из условий **Y6** и **Y7** вытекают некоторые дополнительные свойства, которые сформулируем в виде следующих лемм.

**Лемма 1.** Если $Z=(Y,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, $\bar{u}_i\in U^\infty$, $i=\overline{1,4}$, и $\bar{u}_1\overset{*}{\sim}_Z\bar{u}_2$, $\bar{u}_3\overset{*}{\succcurlyeq}_Z\bar{u}_4$, то $\bar{u}_1\oplus\bar{u}_3\overset{*}{\succ}_Z\bar{u}_2\oplus\bar{u}_4$.

**Доказательтво** проводим от противного. Пусть $\bar{u}_2\oplus\bar{u}_4\overset{*}{\succcurlyeq}_Z\bar{u}_1\oplus\bar{u}_3$. Тогда согласно условиям **Y6**, **Y7** $\bar{u}_4\succcurlyeq\bar{u}_3$. Полученное противоречие доказывает лемму.

**Лемма 2**. Если $Z=(Y,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'(Y,\Theta)$, $\bar{u}_i\in U^\infty$, $i=\overline{1,4}$, и $\bar{u}_1\overset{*}{\succ}_Z\bar{u}_2$, $\bar{u}_3\overset{*}{\succcurlyeq}_Z\bar{u}_4$, то $\bar{u}_1\oplus\bar{u}_3\overset{*}{\succ}_Z\bar{u}_2\oplus\bar{u}_4$.

**Доказательство.** Из леммы 1 и условий **Y6**, **Y7** получим, что

$$\bar{u}_1\oplus\bar{u}_3\overset{*}{\succ}_Z\bar{u}_2\oplus\bar{u}_3\overset{*}{\succcurlyeq}_Z\bar{u}_2\oplus\bar{u}_4.$$

Лемма доказана.

Теперь из (7) согласно условию **Y5** получим

$$[g(\theta_2,u_1)]_\Theta\oplus[g(\theta_1,u_2)]_\Theta\overset{*}{\succ}_Z[g(\theta_1,u_1)]_\Theta\oplus[g(\theta_2,u_2)]_\Theta\overset{*}{\succcurlyeq}_Z$$

$$\overset{*}{\succcurlyeq}_Z[g(\theta_1,u_3)]_\Theta\oplus[g(\theta_2,u_3)]_\Theta\,.$$

Воспользовавшись леммой 2, будем иметь

$$[g(\theta_1,u_1)]_\Theta\oplus[g(\theta_2,u_2)]_\Theta\oplus[g(\theta_2,u_1)]_\Theta\oplus[g(\theta_1,u_2)]_\Theta\overset{*}{\succ}_Z$$

$$\overset{*}{\succ}_Z [g(\theta_1,u_3)]_\Theta\oplus[g(\theta_2,u_3)]_\Theta\oplus[g(\theta_2,u_3)]_\Theta\oplus[g(\theta_1,u_3)]_\Theta\,.$$

Полученное соотношение противоречит соотношению (5), что доказывает справедливость соотношения (6).

Таким образом, условие **Y9** для ЗМР представляет собой точную запись правила выбора решения на основе менее перестраховочной и более слабой формы принципа гарантированного результата применительно к ЗМР, чем крайне пессимистическая форма этого принципа, которую в параметрической ситуации можно описать следующим образом. Если любое последствие одного решения не хуже какого-то последствия другого решения, то первое решение не хуже второго. Эта наиболее перестраховочная форма принципа гарантированного результата положена в основу известных максиминных критериев выбора решения (например, Вальда и Сэвиджа — в играх с природой, фон Неймана-Моргенштерна — в матричных играх). В то же время менее пессимистическую форму принципа гарантированного результата для задач принятия решений в параметрических ситуациях можно описать таким образом: если информация относительно возможности принятия каждого из двух значений ненаблюдаемого параметра симметрична, а пара решений имеет одинаковые последствия для всех значений ненаблюдаемого параметра, за исключением этих двух, и при одном решении из этой пары последствия для указанных значений ненаблюдаемого параметра совпадают и в совокупности обладают такими же достоинствами, что и пара последствий другого решения для соответствующих значений ненаблюдаемого параметра, то первое решение не хуже второго. Эту менее перестраховочную форму принципа гарантированного результата можно проинтерпретировать как условие неприятия участия в антагонистических играх (antagonistic game aversion).

Расширим необайесовскую форму параметрических ЗР, дополнив множество случайных последствий $Y$ до множества случайных в широком смысле последствий $P_0(X)$, представляющих собой множество статистических закономерностей, называемых простыми, на множестве последствий $X$ вида

$$P_0(X) := \{P \in P(X): \mathrm{Card}\, P < \infty,\ P \subseteq Y\}, \tag{8}$$

где $Y$ — множество случайных последствий, определяемое соотношением (1).

Очевидно, что $Y \subseteq P_0(X)$, а ССЗР для ЗР в такой форме имеют вид $\mathbb{Z}(P_0(X))$ $(\mathbf{Z}(P_0(X)))$.

Рассмотрим ЗМР в классе ССЗР $\mathbb{Z}(P_0(X), \Theta)$. При этом введем некоторые понятия и обозначения по аналогии с соответствующими им понятиями и обозначениями, используемыми в необайесовской форме ЗР.

**Определение 9.** ССЗР $Z = (P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(P_0(X), \Theta)$, где $P_0(X)$ — семейство всех простых статистических закономерностей на множестве $X$, будем называть определяющей, если

$$L_0(P_0(X), \Theta) \subseteq g(\cdot, U) = \mathrm{co}[g(\cdot, U)] \subseteq [P_0(X)]^{\Theta}. \tag{9}$$

**Определение 10.** Для произвольных непустых множеств $X, \Theta$ и нестрогого порядка $(X, \succcurlyeq)$ отображение $f \in [P_0(X)]^{\Theta}$, где $P_0(X)$ определяется согласно (8), будем называть ограниченным относительно $(X, \succcurlyeq)$, если отображения $\underline{f}, \overline{f} \in X^{\Theta}$, заданные на $\Theta$ как

$$\underline{f}(\theta) := \min\{x \in X: \min_{p \in f(\theta)} p(x) \neq 0\} \quad \forall \theta \in \Theta,$$

$$\overline{f}(\theta) := \max\{x \in X: \max_{p \in f(\theta)} p(x) \neq 0\} \quad \forall \theta \in \Theta,$$

являются ограниченными относительно $(X, \succcurlyeq)$.

Обозначим $L_{\succcurlyeq}(P_0(X), \Theta)$ множество всех ограниченных и $\Sigma$-измеримых относительно нестрогого порядка $(X, \succcurlyeq)$ отображений на множестве $\Theta$ со значениями в множестве $P_0(X)$.

Определим класс ПВП в ЗМР для $\mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta) \subseteq \mathbb{Z}(P_0(X), \Theta)$, который будем обозначать $\Pi_0^\infty(\mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta))$, как подклассе всех таких ПВП $\pi \in \Pi^\infty(\mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta)$, что для любой определяющей ССЗР $Z = (P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta)$ выполняются условия **Y1–Y5**, а также условия **P6–P9**, где каждое из перечисленных условий последней группы получено заменой множества $Y$ на множество $P_0(X)$ в соответствующих им условиях **Y6–Y9**.

Обозначим $\mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ любой подкласс ССЗР класса $\mathbb{Z}(P_0(X), \Theta)$, в котором для любой ССЗР $Z' = (P_0(X), \Theta, U', g') \in \mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ и любых $u_i' \in U'$, $i = \overline{1,2}$, найдется такая определяющая ССЗР $Z = (P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ и $u_i \in U$, $i = \overline{1,2}$, что

$$g'(\theta, u_i') = g(\theta, u_i) \ \ \forall \theta \in \Theta, \ i = \overline{1,2}. \qquad (10)$$

Обозначим $\mathbb{Z}_0'(P_0(X), \Theta)$ любой такой класс $\mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$, что если $Z = (P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ — определяющая ССЗР, фигурирующая в определении $\mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$, то для нее должно выполняться условие

$$g(\cdot, U) = L_0(P_0(X), \Theta).$$

Обозначим $\mathbf{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ любой подкласс ССЗР класса $\mathbf{Z}(P_0(X), \Theta)$, элементы которого задают первую компоненту некоторого ПВП для $\mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$. При этом если $((P_0(X), \succcurlyeq), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$, а $(P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ является определяющей ССЗР, фигурирующей в определении $\mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$, то для нее наряду с соотношением (2) должно выполняться условие ограниченности и $\Sigma$-измеримости относительно сужения $(P_0(X), \succcurlyeq)$ на $X$ для отображения $g(\cdot, u)$ при всех $u \in U$, т.е. $g(\cdot, U) \subseteq L_{\succcurlyeq}(P_0(X), \Theta)$.

Для любого класса $\mathbf{Z}'_1(P_0(X), \Theta)$ определим класс $\mathbb{Z}_0'(P_0(X), \Theta)$, обозначив его $\mathbb{Z}_{01}'(P_0(X), \Theta)$, следующим образом:

$$\mathbb{Z}_{01}'(P_0(X), \Theta) := \{(P_0(X), \Theta, U', g') : (P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathit{Пр}\mathbf{Z}_1'(P_0(X), \Theta)\},$$

$$U' = \{u : u \in U, g(\cdot, u) \in L_0(P_0(X), \Theta)\}, \ g'(\theta, u) = g(\theta, u) \ \ \forall \theta \in \Theta, \ \forall u \in U'\}.$$

Далее для произвольного непустого множества $A$ определим в функциональном пространстве $\mathbb{R}^A$ отношение эквивалентности $(\overset{\mathrm{m}}{\approx})$ следующим образом. Для любых $f, g \in \mathbb{R}^A$ имеем $f \overset{\mathrm{m}}{\approx} g \Leftrightarrow f = mg, m \in \mathbb{R}, \ m > 0$.

Для произвольного векторного пространства $V$ введем отношение эквивалентности $(\overset{\mathrm{co}}{\approx})$ на $2^V$ следующим образом. Для любых $X, Y \subseteq V$

$$X \overset{\mathrm{co}}{\approx} Y \Leftrightarrow \mathrm{co}\, X = \mathrm{co}\, Y.$$

Далее введем в рассмотрение соответствие $\chi^\infty_{\mathbb{Z}_0'(P_0(X), \Theta)}$ из $\mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx} \times P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}$ в $\Pi^\infty(\mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta))$, где $P(\Theta)$ — семейство всех статистических закономерностей на $\Theta$. Это соответствие определяется следующим образом. Если $\omega \in \widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx}$, $P \in \widetilde{P} \in P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}$, $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta) \subseteq$ $\subseteq \mathbb{Z}(P_0(X), \Theta)$, то $\chi^\infty_{\mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta)}(\omega, P) = (\chi^\infty_{1\mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta)}(\omega, P), \chi^\infty_{2\mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta)}(\omega, P))$, а $[\chi^\infty_{1\mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta)}(\omega, P)](Z) := (P_0(X)^\infty, \succcurlyeq_Z)$, $[\chi_{2\mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta)}(\omega, P)](Z) := U^\infty, \overset{*}{\succcurlyeq}_Z)$.

При этом для любых $\theta \in \Theta$ и любых $m', n'_{ir}, s'_i \in N$, $x'_{irj} \in X$, $\alpha'_{irj} \in [0,1]$, $u_i \in U$, если $j = \overline{1, n'_{ir}}$, $\sum_{j=1}^{n'_{ir}} \alpha'_{irj} = 1, r = \overline{1, s'_i}$, $g(\theta, u'_i) = \{g_t(\theta, u'_i) : g_t(\theta, u'_i) = \sum_{k=1}^{l_t(\theta, u'_i)} \beta_{tk}(\theta, u'_i) g_{tk}(\theta, u'_i)$, $\sum_{k=1}^{l_t(\theta, u'_i)} \beta_{tk}(\theta, u'_i) = 1$, где $\beta_{tk}(\theta, u'_i) \in [0,1]$, $g_{tk}(\theta, u'_i) \in X$, $k = \overline{1, l_t(\theta, u'_i)}$, $l_t(\theta, u'_i) \in N$, $t = \overline{1, h(\theta, u'_i)}$, $h(\theta, u'_i) \in N\}$, $i = \overline{1, m'}$, а также для любых $m'', n''_{ir}$, $s''_i \in N$, $x''_{irj} \in X$, $\alpha''_{irj} \in [0,1]$, $u''_i \in U$, если $j = \overline{1, n''_{ir}}$, $\sum_{j=1}^{n''_{ir}} \alpha''_{irj} = 1$, $r = \overline{1, s''_i}$, $g(\theta, u''_i) = \{g_t(\theta, u''_i) : g_t(\theta, u''_i) = \sum_{k=1}^{l_t(\theta, u''_i)} \beta_{tk}(\theta, u''_i) g_{tk}(\theta, u''_i)$, $\sum_{k=1}^{l_t(\theta, u''_i)} \beta_{tk}(\theta, u''_i) = 1$, где $\beta_{tk}(\theta, u''_i) \in [0,1]$, $g_{tk}(\theta, u''_i) \in X$, $k = \overline{1, l_t(\theta, u''_i)}$, $l_t(\theta, u''_i) \in N$, $t = \overline{1, h(\theta, u''_i)}$, $h(\theta, u''_i) \in N\}$, $i = \overline{1, m''}$, то выполняются соотношения

$$\bigoplus_{i=1}^{m'} \min_{r=\overline{1, s'_i}} \left\{ \sum_{j=1}^{n'_{ir}} \alpha'_{irj} x'_{irj} : r = \overline{1, s'_i} \right\} \succcurlyeq_Z \bigoplus_{i=1}^{m''} \min_{r=\overline{1, s''_i}} \left\{ \sum_{j=1}^{n''_{ir}} \alpha''_{irj} x''_{irj} : r = \overline{1, s''_i} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m'} \min_{r=\overline{1, s'_i}} \sum_{j=1}^{n'_{ir}} \alpha'_{irj} \omega(x'_{irj}) \geqslant \sum_{i=1}^{m''} \min_{r=\overline{1, s''_i}} \sum_{j=1}^{n''_{ir}} \alpha''_{irj} \omega(x''_{irj}), \tag{11}$$

$$\bigoplus_{i=1}^{m''} u'_i \succcurlyeq_Z^* \bigoplus_{i=1}^{m''} u''_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m'} \min_{p \in P} \int_{\Theta} \min_{t=\overline{1, h(\theta, u'_i)}} \sum_{k=1}^{l_t(\theta, u'_i)} \beta_{tk}(\theta, u'_i) \omega(g_{tk}(\theta, u'_i)) p(d\theta) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{m''} \min_{p \in P} \int_{\Theta} \min_{t=\overline{1, h(\theta, u''_i)}} \sum_{k=1}^{l_t(\theta, u''_i)} \beta_{tk}(\theta, u''_i) \omega(g_{tk}(\theta, u''_i)) p(d\theta). \tag{12}$$

**Теорема 1.** Для любого класса ССЗР $Z'_1(P_0(X), \Theta)$

$$\Pi_0^\infty(\mathbb{Z}'_{01}(P_0(X), \Theta)) = \chi^\infty_{\mathbb{Z}'_{01}(P_0(X), \Theta)}(\mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx} \times P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx})$$

и всякое ПВП $\pi \in \Pi_0^\infty(\mathbb{Z}'_{01}(P_0(X), \Theta))$ можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВП $\overline{\pi} \in \Pi_0^\infty(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(P_0(X), \Theta))$, при этом соответствие $\chi^\infty_{\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(P_0(X), \Theta)}$ инъективно и

$$\Pi_0^\infty(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(P_0(X), \Theta)) = \chi^\infty_{\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(P_0(X), \Theta)}(\mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx} \times P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}).$$

**Доказательство** идейно близко к доказательству теоремы 1 из [4].

Вначале по любой ССЗР $Z' = (P_0(X), \Theta, U', g') \in \mathbb{Z}'_{01}(P_0(X), \Theta)$ в силу соотношения (10) находится соответствующая ей определяющая ССЗР $Z = (P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'_{01}(P_0(X), \Theta)$. Любое ПВП $\pi \in \Pi_0^\infty(\mathbb{Z}'_{01}(P_0(X), \Theta))$ на этой ССЗР $Z$ согласно условию **Y1** имеет вид $\pi_2 = (([P_0(X)]^\infty, \succcurlyeq), (U^\infty, \succcurlyeq_Z^*))$, обе компоненты которого являются статистическими предпочтениями на $P_0(X)$ и $U$ соответственно. Последнее вытекает из того, что условие **C3** является следствием условия **P6** для *A*, равного $P_0(X)$ и $U$ соответственно (доказательство этого вытекает из повторения хода соответствующего доказательства в теореме 1 из [4]).

Отношение предпочтения $(U^\infty, \succcurlyeq_Z^*)$ индуцирует отношение предпочтения $([g(\cdot, U)]^\infty, \succcurlyeq_Z^*)$, а именно для любых $\overline{u}', \overline{u}'' \in U$, где $\overline{u}' = \bigoplus_{i=1}^{n} u_i$, $\overline{u}'' = \bigoplus_{j=1}^{m} u_j$,

$n, m \in N$, определим, что $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} g(\cdot, u_i) \succcurlyeq_Z^* \overset{m}{\underset{j=1}{\oplus}} g(\cdot, u_j) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \bar{u}' \succcurlyeq_Z^* \bar{u}''$. Из контекста всегда будет понятен смысл обозначения $(\succcurlyeq_Z^*)$.

Согласно теореме фон Неймана–Моргенштерна из условий **Y2–Y4** следует существование единственной, с точностью до положительного линейного преобразования афинной функции полезности $\omega_{[P_0(X)]_\Theta}$ на $([P_0(X)]_\Theta, \succcurlyeq_Z^*)$, сохраняющей $(\succcurlyeq_Z^*)$. В силу изоморфизма $([P_0(X)]_\Theta, \succcurlyeq_Z^*) \simeq (P_0(X), \succcurlyeq)$ согласно условиям b) из **Y1**, а также **Y5** для любых $P \in P_0(X)$ положим

$$\omega_{P_0(X)}(P) := \omega_{[P_0(X)]_\Theta}(P_\Theta).$$

Продолжение $\omega_{[P_0(X)]_\Theta}$ с $[P_0(X)]_\Theta$ на $g(\cdot, U)$, обозначаемое $\omega_{g(\cdot, U)}$, осуществляется аналогично, как и в теореме 1 из [4] — продолжение $\omega$ с $Y_\Theta$ на $\widetilde{g}(\cdot, \widetilde{U})$, где $\widetilde{Z} = (Y, \Theta, \widetilde{U}, \widetilde{g}) \in \mathbb{Z}'_{01}(Y, \Theta)$ — определяющая ССЗР из доказательства теоремы 1 в [4], аналогичная определяющей ССЗР $Z = (P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'_{01}(P_0(X), \Theta)$.

В силу взаимно однозначного соответствия между множествами $U$ и $g(\cdot, U)$ положим $\omega_U(u) := \omega_{g(\cdot, U)}(g(\cdot, u))$ $\forall u \in U$.

Таким образом, определенная функция $\omega_U$ сохраняет $(U, \succcurlyeq_Z^*)$, что доказывается аналогично соответствующему факту в теореме 1 из [4].

Обозначим $B_0(\omega_{P_0(X)}(P_0(X)))$ все функции из $B_0$ со значением в $\omega_{P_0(X)}(P_0(X)) \geqslant P[-1,1]$. Введем функционал $v: B_0(\omega_{P_0(X)}(P_0(X))) \to \mathbb{R}$ так, что для любой функции $f \in B_0(\omega_{P_0(X)}(P_0(X)))$

$$v(f) := \omega_U(u) = \omega_{g(\cdot, U)}(g(\cdot, u)),$$

где $u$ — любое из множества $\{u \in U : f(\theta) = \omega_{P_0(X)}(g(\theta), u), \theta \in \Theta\}$.

В силу соотношения (2) следует существование таких $u$, а из условия **P7** вытекает, что значения функции $\omega_U$ на этих $u$ совпадают, что обеспечивает корректность определения функционала $v$. При этом функционал $v$ монотонный и положительно однородный на $B_0(\omega_{P_0(X)}(P_0(X)))$.

Расширение функционала $v$ на все $B_0$ в силу условия положительной однородности также обозначим через $v$. При этом свойство монотонности ***V*1** функционала $v$ на $B_0$ сохраняется, и для него выполняется свойство ***V*2** (см. [5]).

Из критерия статистического предпочтения следует существование единственных продолжений функций полезности $\omega_U$ на $U^\infty$ и $\omega_{P_0(X)}$ на $[P_0(X)]^\infty$, сохраняющих $(U^\infty, \succcurlyeq_Z^*)$ и $([P_0(X)]^\infty, \succcurlyeq_Z^*)$ соответственно и обозначаемых $\omega_{U^\infty}$ и $\omega_{[P_0(X)]^\infty}$ соответственно. При этом для любого $\bar{u} \in U^\infty$, где $\bar{u} = u_1 \oplus \ldots \oplus u_n = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} u_i$, $n \in N$, имеем $\omega_{U^\infty}(\bar{u}) = \omega_{U^\infty}(\bigoplus_{i=1}^n u_i) = \sum_{i=1}^n \omega_U(u_i)$, а также для любых $P_j \in P_0(X)$, $j = \overline{1, m}$, $m \in N$,

$$\omega_{[P_0(X)]^\infty}(\bigoplus_{j=1}^m P_j) = \sum_{j=1}^m \omega_{P_0(X)}(P_j).$$

Функционал $v^\infty : B_0 \to \mathbb{R}$ определяется таким образом, что для любой функции $f \in B_0$

$$v^\infty(f) := \omega_{U^\infty}(\bar{u}) = \omega_{U^\infty}(\bigoplus_{i=1}^n u_i) = \sum_{i=1}^n \omega_U(u_i), \tag{13}$$

где $\bar{u}$ — любое из множества $\{\bar{u} \in U^{\infty} : f(\theta) = \omega_{[P_0(X)]^{\infty}} (\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} g(\theta, u_i)) =$
$= \sum_{i=1}^{n} \omega_{P_0(X)} (g(\theta, u_i)),\ \theta \in \Theta,\ \bar{u} = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} u_i,\ u_i \in U,\ i = \overline{1, n}\}$.

Корректность данного определения, а также утверждение, что функционал $\upsilon^{\infty}$ совпадает с введенным продолжением функционала $\upsilon$ на $B_0$, аналогичны соответствующим утверждениям в теореме 1 из [4]. Значит, согласно доказанному для функционала $\upsilon^{\infty}$ выполняются условия **V1** и **V2** на $B_0$. Кроме того, для функционала $\upsilon^{\infty}$ выполняется условие **V3′** (см. [5]), что доказывается аналогично соответствующему утверждению в теореме 1 из [4].

Значит, согласно теореме 1 из [5] существует статистическая закономерность $P \in P(\Theta)$, что для любых $f \in B_0$

$$\upsilon(f) = \upsilon^{\infty}(f) = \min_{p \in P} \int_{\Theta} f(\theta) p(d\theta). \tag{14}$$

В силу теоремы 2 из [5] существует единственное продолжение функционала $\upsilon$ на $B$, для которого выполняются условия **V1, V2, V3′**. Отсюда следует, что продолжение $\upsilon$ на $B$ также имеет вид (14), ибо для такого функционала в силу теоремы 1 из [5] выполняются на $B$ условия **V1, V2, V3′**. Значит, для любого $\bar{u} \in U^{\infty}$, где $\bar{u} = \bigoplus_{i=1}^{m} \boldsymbol{u}_i,\ u_i \in U,\ i = \overline{1, m},\ m \in N$, в силу определения функционала $\upsilon$, имеем

$$\omega_{U^{\infty}}(\bar{u}) = \sum_{i=1}^{m} \omega_U(u_i) = \sum_{i=1}^{m} \upsilon(f_i),$$

где $f_i(\theta) = \omega_{P_0(X)}(g(\theta, u_i)),\ i \in \overline{1, m}$. Тогда согласно соотношению (14) имеем

$$\omega_{U^{\infty}}(\bar{u}) = \sum_{i=1}^{m} \min_{p \in P} \int_{\Theta} \omega_{P_0(X)}(g(\theta, u_i)) p(d\theta). \tag{15}$$

Так как при фиксированных $\theta \in \Theta$, $u \in U$ имеем $g(\theta, u) = \{y_r \in Y : y_r = \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_{rj} x_{rj},\ \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_{rj} = 1,\ x_{rj} \in X,\ j = \overline{1, n_r},\ n_r \in N,\ r = \overline{1, s},\ s \in N\}$, то для фиксированных $\theta \in \Theta, u', u'' \in U$ в силу теоремы 1 из [4] получим

$$g(\theta, u') \succcurlyeq g(\theta, u'') \Leftrightarrow \min_{\overline{r=1, s'}} \sum_{j=1}^{n_{r'}} \alpha'_{rj} x'_{rj} \succcurlyeq \min_{\overline{r=1, s''}} \sum_{j=1}^{n_{r''}} \alpha''_{rj} x''_{rj},$$

где минимум берется относительно $(Y, \succcurlyeq)$. Тогда поскольку функция полезности $\omega_{P_0(X)}$ сохраняет $(P_0(X), \succcurlyeq)$, а значит и $(Y, \succcurlyeq)$, имеем

$$g(\theta, u') \succcurlyeq g(\theta, u'') \Leftrightarrow \min_{\overline{r=1, s'}} \omega_{P_0(X)} \left( \sum_{j=1}^{n_{r'}} \alpha'_{rj} x'_{rj} \right) \geqslant \min_{\overline{r=1, s''}} \omega_{P_0(X)} \left( \sum_{j=1}^{n_{r''}} \alpha''_{rj} x''_{rj} \right).$$

Обозначив через $\omega$ сужение функции полезности $\omega_{P_0(X)}$ на множество $X \subset Y \subset P_0(X)$, из последнего соотношения в силу афинности функции $\omega_{P_0(X)}$ получим

$$g(\theta, u') \succcurlyeq g(\theta, u'') \Leftrightarrow \min_{\overline{r=1, s'}} \sum_{j=1}^{n_{r'}} \alpha'_{rj} \omega(x'_{rj}) \geqslant \min_{\overline{r=1, s''}} \sum_{j=1}^{n_{r''}} \alpha''_{rj} \omega(x''_{rj}). \tag{16}$$

Значит, из соотношений (15) и (16) для любых $m, n_{ir}, s_i \in N$, $x_{irj} \in X$, $\alpha_{irj} \in [0,1]$, если $j = \overline{1, n_{ir}}$, $\sum_{j=1}^{n_{ir}} \alpha_{irj} = 1, r = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, m}$, то

$$\omega_{[P_0(X)]^\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n_{ir}}\alpha_{irj}x_{irj} : r = \overline{1, s_i}\right\}\right) = \omega_{U^\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n_{ir}}\alpha_{irj}x_{irj} : r = \overline{1, s_i}\right\}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\min_{r=\overline{1, s_i}}\sum_{j=1}^{n_{ir}}\alpha_{irj}\omega(x_{irj}) .$$

Также для любых $\theta \in \Theta$, $m \in N$, $u_i \in U$, если $g(\theta, u_i) = \{g_t(\theta, u_i) : g_t(\theta, u_i) = = \sum_{k=1}^{l_t(\theta, u_i)} \beta_{tk}(\theta, u_i) g_{tk}(\theta, u_i)$, $\sum_{k=1}^{l_t(\theta, u_i)} \beta_{tk}(\theta, u_i) = 1$, $\beta_{tk}(\theta, u_i) \in [0,1]$, $g_{tk}(\theta, u_i) \in X$, $k = \overline{1, l_t(\theta, u_i)}$, $l_t(\theta, u_i) \in N$, $t = \overline{1, h(\theta, u_i)}$, $h(\theta, u_i) \in N\}$, $i = \overline{1, m}$, то

$$\omega_{U^\infty}(\bigoplus_{i=1}^{m} u_i) = \sum_{i=1}^{m}\min_{p \in P}\int_{\Theta}\min_{t=\overline{1, h(\theta, u_i)}}\sum_{k=1}^{l_t(\theta, u_i)}\beta_{tk}(\theta, u_i)\,\omega(g_{tk}(\theta, u_i))\,p(d\theta) .$$

Таким образом показано, что ПВП $\overline{\pi} = (([P_0(X)]^\infty_, \ \omega_{[P_0(X)]^\infty}), \ (U_,^\infty \omega_{U^\infty}))$ является единственным продолжением ПВП $\pi$ на $\mathit{Пр}Z_1'(P_0(X), \Theta)$ и при этом $\overline{\pi} \in \Pi_0^\infty(\mathit{Пр}Z_1'(P_0(X), \Theta))$, а также $\overline{\pi} \in \chi^\infty_{\mathit{Пр}Z'_1(P_0(X), \Theta)}(\mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx} \times P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx})$ вследствие соотношений (11), (12) и единственности функции $\omega$ с точностью до масштабного множителя в силу критерия статистического предпочтения.

Кроме того, поскольку все переходы при построении функций полезности $\omega_{[P_0(X)]^\infty}$ и $\omega_{U^\infty}$ справедливы в обе стороны, то

$$\Pi_0^\infty(\mathit{Пр}Z_1'(P_0(X), \Theta)) = \chi^\infty_{\mathit{Пр}Z_1'(P_0(X), \Theta)}(\mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx} \times P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}) .$$

Теорема доказана.

**Следствие 1.** Для любого класса $\mathbf{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ условия **Y1–Y5**, **P6–P9** на ПВП для ЗМР в классе $\mathit{Пр}\mathbf{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ представляют собой $\mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx} \times P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}$-МПВП для ЗМР в классе $\mathit{Пр}\mathbf{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$, т.е. [**Y1–Y5**, **P6–P9**] для ЗМР в $\mathbb{Z}_{01}'(P_0(X), \Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx}$ и $P \in P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}$, при этом разным значениям параметров $\widetilde{\omega}$ и $P$ соответствуют несовпадающие ПВП.

**Следствие 2.** МСЗР $M = (P_0(X), \Theta, U, g, P)$, где $Z = (P_0(X), \Theta, U, g) \in \in \mathbf{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$, а закономерность $P \in P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}$ является полным математическим описанием ситуации с [**Y1–Y5**, **P6–P9**] для ЗМР в $\mathbf{Z}_{01}'(P_0(X), \Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx}$ и $P \in P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}$.

Другими словами, ТПР с ПВП из класса $\Pi_0^\infty(\mathbb{Z}_{01}'(P_0(X), \Theta))$ принимают в ситуации с заданной моделью одинаковые решения второй основной ЗМР при условии совпадения их предпочтений на последствиях. В частности, при $\mathbf{Z}_1'(P_0(X), \Theta) = \mathbf{Z}((P_0(X), \cdot), \Theta)$ имеем следствие.

**Следствие 3.** МСЗР $M = (P_0(X), \Theta, U, g, P)$, где $Z = (P_0(X), \Theta, U, g) \in \in \mathit{Пр}\mathbf{Z}((P_0(X), \bullet), \Theta)$, а закономерность $P \in P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}$ является полным математическим описанием ситуации с [**Y1–Y5**, **P6–P9**] для ЗМР в $\mathbb{Z}_{01}'(P_0(X), \Theta)$ с параметрами $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx}$ и $P \in P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}$.

Другими словами, ТПР с ПВП из класса $\Pi_0^\infty(\mathbb{Z}'_{01}(P_0(X), \Theta))$ принимают в ситуации с заданной моделью одинаковые решения второй основной ЗМР.

Если в соотношении (4), задающим условие **P9**, знак $(\overset{*}{\succcurlyeq}_Z)$ заменить на знак обратного соответствия, то полученное условие обозначим **P9'**. Условие **P9'**, в отличие от условия **P9**, представляющего собой принцип гарантированного результата в менее перестраховочной форме (условие неприятия участия в антагонистических играх (antagonistic game aversion)), является точной записью менее авантюристической формы принципа наилучшего результата — условия склонности к антагонистическим играм (antagonistic game attraction). Тогда через $\overline{\Pi}_0^\infty(\mathbb{Z}'(Y, \Theta))$ обозначим подкласс всех таких ПВП класса $\Pi_0^\infty(\mathbb{Z}'(Y, \Theta))$, что для любой определяющей ССЗР $Z = (Y, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(Y, \Theta) \subseteq \mathbb{Z}(Y, \Theta)$ выполняются условия **Y1–Y5, P6–P8, P9'.**

Наконец, обозначим $\overline{\chi}^\infty_{\mathbb{Z}'(Y, \Theta)}$ соответствие, определяемое аналогично соответствию $\chi^\infty_{\mathbb{Z}'(Y, \Theta)}$ с той лишь разницей, что в соотношении (12) операция min заменяется на операцию max.

**Теорема 2.** Для любого класса ССЗР $Z'_1(Y, \Theta)$

$$\overline{\Pi}_0^\infty(\mathbb{Z}'_{01}(P_0(X), \Theta)) = \overline{\chi}^{\,\infty}_{\mathbb{Z}'_{01}(P_0(X), \Theta)}(\mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx} \times P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx})$$

и всякое ПВП $\pi \in \overline{\Pi}_0^\infty(\mathbb{Z}'_{01}(P_0(X), \Theta))$ можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВП $\overline{\pi} \in \overline{\Pi}_0^\infty(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(P_0(X), \Theta))$, при этом соответствие $\overline{\chi}^\infty_{\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(P_0(X), \Theta)}$ инъективно и

$$\overline{\Pi}_0^\infty(\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(P_0(X), \Theta)) = \overline{\chi}^{\,\infty}_{\mathit{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(P_0(X), \Theta)}(\mathbb{R}^X / \overset{\mathrm{m}}{\approx} \times P(\Theta) / \overset{\mathrm{co}}{\approx}).$$

**Доказательство** аналогично доказательству теоремы 1. Отличие заключается лишь в том, что для функционалов $\upsilon$ и $\upsilon^\infty$, введенных так же, как в доказательстве теоремы 1, выполняются те же условия, за исключением условия $\mathbf{V3'}$, которое заменяется условием $\boldsymbol{V3}$. И тогда при использовании теорем 1 и 2 из [5] вместо соответственно теорем 3 и 4 из [5] в доказательстве теоремы 1 получаем утверждение теоремы 3.

Теорема доказана.

Таким образом, получены multi-prior модели системы принятия решений в условиях неопределенности, ориентированные на многократный выбор решений, основанный соответственно на принципе гарантированного результата, но без излишней перестраховки, который выражается в неприятии антагонистических игр (теорема 1), и на принципе наилучшего решения без излишнего авантюризма, проявляющегося в склонности к антагонистическим играм (теорема 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Иваненко В.И., Лабковский В.А. Проблема неопределенности в задачах принятия решений. — К.: Наук. думка, 1990. — 135 с
2. Gilboa I., Schmeidler D. Maxmin expected utility with non-unique prior // J. of Mathematical Economics. — 1989. — **18.** — P. 141–153.
3. Михалевич В.М. Одна форма принципа гарантированного результата при многократном выборе // Кибернетика и вычисл. техника. — 2010. — № 161. — С. 28–34.
4. Михалевич В.М. Об одном критерии для необайесовских задач решения // Там же. — 2011. — № 164. — С. 29–42.
5. Михалевич В.М. К параметрической задаче решения с денежными доходами // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 5. — С. 163–169.
6. Михалевич В.М. О некоторых классах правил выбора предпочтений в задачах принятия решения // Там же. — 2010. — № 6. — С. 140–154.


*Поступила 26.05.2011*