УДК 218.2

Р.Т. АЛИЕВ, Т.А. ХАНИЕВ

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ДЛЯ ЭРГОДИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛУМАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ТИПА (s, S)

Ключевые слова: *модель управления типа* (s, S), *эргодическое распределение, асимптотическое разложение, скорость сходимости*.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье исследуется случайный процесс $X(t)$, который описывает так называемую модель управления типа (s, S). Этой модели посвящены многочисленные работы (см., например, [1–11]). Исследование модели происходит с учетом требований теории управления запасами, массового обслуживания, надежности, страхования и т.д.; она известна как система «минимум–максимум», имеет два регулирующих параметра: нижний (критический) уровень запаса s и верхний уровень запаса S. Эта система функционирует следующим образом: в случайные моменты в систему поступают требования в случайных объемах, пополнение не происходит, если запасов больше s; если имеющийся уровень меньше или равен s, то принимается решение о пополнении запаса обязательно до верхнего уровня S.

Для определения аналитического вида процесса $X(t)$, описывающего модель управления типа (s, S), введем некоторые последовательности случайных величин.

Пусть $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$, — последовательности положительных случайных величин, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, причем величины внутри каждой последовательности независимы и одинаково распределены, соответственно с функциями распределения $\Phi(t) = P\{\xi_1 \leq t\}$, $t > 0$, и $F(x) = P\{\eta_1 \leq x\}$, $x > 0$.

Рассмотрим последовательности $\{T_n\}$ и $\{Y_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, которые образуют два независимых процесса восстановления:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad Y_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad T_0 = Y_0 = 0.$$

Введем также целочисленные случайные величины, которые означают число скачков процесса $X(t)$ до попадания в так называемый контрольный уровень s:

$$\nu_0 = 0, \quad \nu_1 = \min\{k \geq 1 : S - Y_k < s\},$$

$$\nu_{n+1} = \min\{k \geq \nu_n + 1 : S - (Y_k - Y_{\nu_n}) < s\}.$$

Пусть τ_n — моменты попадания процесса $X(t)$ в контрольный уровень s:

$$\tau_n = T_{\nu_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \tau_0 = 0.$$

Определим считающий процесс $\nu(t) = \max\{k \geq 0 : T_k \leq t\}$, который означает число скачков процесса $X(t)$ на отрезке $[0, t]$. Отметим, что процесс $\nu(t)$ остается постоянным на полуинтервалах $[T_n, T_{n+1})$ и непрерывен справа: $\nu(T_n + 0) = n$.

С учетом введенных выше случайных величин исследуемый случайный процесс $X(t)$, описывающий модель управления типа (s, S), будет иметь вид

$$X(t) = S - Y_{\nu(t)} + Y_{\nu_k} \quad \text{при} \quad \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Основная цель данной работы — исследование предельного поведения эргодического распределения процесса $X(t)$ при $\beta \equiv S - s \to \infty$, а также получение оценки скорости сходимости.

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ ЭРГОДИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССА $X(t)$

Исследуем асимптотическое поведение эргодического распределения случайного процесса $X(t)$, описывающего модель типа (s, S).

Предположим, что исходные последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$, удовлетворяют следующим дополнительным условиям:

i) $E\xi_1 < \infty$; ii) $E\eta_1 < \infty$; iii) η_1 — нерешетчатая случайная величина.

При этих условиях в работе [8] найдена эргодическая функция распределения процесса $X(t)$:

$$Q(x) = 1 - \frac{U(S - x)}{U(S - s)}, \quad s \leq x \leq S, \tag{1}$$

где $U(z)$ — функция восстановления, порожденная распределением случайной величины η_1, т.е. $U(z)=\sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(z)$ (* означает операцию свертки).

Для исследования асимптотического поведения эргодического распределения случайного процесса $X(t)$ вначале введем вспомогательный процесс $W_\beta(t)=\dfrac{X(t)-s}{S-s}$, который получается простым линейным преобразованием от процесса $X(t)$. В определенном смысле $W_\beta(t)$ является нормированным процессом, значения которого сосредоточены на отрезке $[0,1]$. Эргодическую функцию распределения процесса $W_\beta(t)$, т.е. $Q_{W_\beta}(x)\equiv \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{W_\beta(t)\le x\}$, обозначим $Q_{W_\beta}(x)$.

Функцию равномерного распределения на отрезке $[0,1]$ обозначим $G_0(x)$:

$$G_0(x)=\begin{cases} 1, & x\ge 1,\\ x, & x\in[0,1),\\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Сформулируем основной результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть выполняются условия i)–iii) и $m_2=E\eta_1^2<\infty$. Тогда при $\beta\to\infty$ для каждого $x\in[0,1]$ эргодическая функция распределения процесса $W_\beta(t)$ имеет следующее асимптотическое разложение:

$$Q_{W_\beta}(x)\equiv \lim_{t\to\infty} P\{W_\beta(t)\le x\}=G_0(x)\left\{1-\frac{m_2}{2m_1\beta}\right\}+o\left(\frac{1}{\beta}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Согласно определению процесса $W_\beta(t)$ для любого $x\in[0,1]$ из формулы (1) имеем

$$Q_{W_\beta}(x)=\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{X(t)\le S+s+x(S-s)\}=1-\frac{U(\beta(1-x))}{U(\beta)}. \tag{3}$$

Из теории восстановления известно, что если случайная величина имеет конечный второй момент, то функция восстановления $U(\beta)$ имеет асимптотическое разложение (см., например, [12, с. 415] при $\beta\to\infty$:

$$U(\beta)=\frac{\beta}{m_1}+\frac{m_2}{2m_1^2}+o(1), \tag{4}$$

где $m_k=E\eta_1^k$, $k=1,2$.

Аналогично для каждого $x\in[0,1]$ при $\beta\to\infty$

$$U(\beta(1-x))=\frac{\beta(1-x)}{m_1}+\frac{m_2}{2m_1^2}+o(1). \tag{5}$$

В противном случае из (4) при $\beta\to\infty$ имеем

$$[U(\beta)]^{-1}=\frac{m_1}{\beta}\left[1-\frac{m_2}{2m_1\beta}+o\left(\frac{1}{\beta}\right)\right]. \tag{6}$$

С учетом (5) и (6) из (3) получим утверждение теоремы 1. □

Отметим, что поскольку процесс $W_\beta(t)$ — линейное преобразование процесса $X(t)$, из теоремы непосредственно получаем следующй результат.

Следствие. Эргодическая функция распределения процесса $X(t)$ при достаточно больших значениях параметра $\beta = S - s$ приближается к равномерному распределению на отрезке $[s, S]$.

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ

Вопрос о скорости сходимости в предельных теоремах — один из важнейших в теории вероятностей, поскольку от него зависит, насколько точны и эффективны применения этих теорем на практике. Естественно поставить вопрос о скорости сходимости в теореме 1. Предположим, что выполняется условие Крамера [13, с.179], эквивалентное экспоненциальному убыванию хвоста распределения случайной величины η_1:

$$\int_0^\infty e^{\mu y} dF(y) = E(e^{\mu \eta_1}) < \infty \text{ при некотором } \mu > 0.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Кроме того, пусть распределение случайной величины η_1 содержит абсолютно непрерывную компоненту и выполняется условие Крамера. Тогда при некоторых $c < \infty$ и $\varepsilon > 0$ для каждого $\beta = S - s$ имеет место следующая равномерная по $x \in (0, 1)$ оценка скорости сходимости для эргодического распределения процесса $W_\beta(t)$:

$$|Q_{W_\beta}(x) - \hat{Q}_\beta(x)| < \frac{2m_1 c}{\beta} e^{-\varepsilon\beta(1-x)}, \tag{7}$$

где $\hat{Q}_\beta(x) \equiv 1 - \dfrac{\hat{U}(\beta(1-x))}{\hat{U}(\beta)} = \dfrac{x}{1 + m_{12} / \beta}.$

Доказательство. Известно, что (см., например, [14]) в условиях теоремы 2

$$U(\beta) = \frac{\beta}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + R(\beta), \tag{8}$$

где $|R(\beta)| ce^{-\varepsilon\beta}$ и $\underset{(\beta, \infty)}{\operatorname{var}} R(\beta) < ce^{-\varepsilon\beta}$ при некоторых $c < \infty$ и $\varepsilon > 0.$

Тогда

$$|U(\beta) - \hat{U}(\beta)| = |R(\beta)| < ce^{-\varepsilon\beta}, \tag{9}$$

где $\hat{U}(\beta) = \dfrac{\beta}{m_1} + \dfrac{m_2}{2m_1^2}.$ Отсюда

$$\hat{U}(\beta) - ce^{-\varepsilon\beta} < U(\beta) < \hat{U}(\beta) + ce^{-\varepsilon\beta}. \tag{10}$$

Аналогично для каждого $x \in (0, 1)$

$$\hat{U}(\beta(1-x)) - ce^{-\varepsilon\beta(1-x)} < U(\beta(1-x)) < \hat{U}(\beta(1-x)) + ce^{-\varepsilon\beta(1-x)}. \tag{11}$$

Кроме того, из (10) имеем

$$\frac{1}{\hat{U}(\beta) + ce^{-\varepsilon\beta}} < \frac{1}{U(\beta)} < \frac{1}{\hat{U}(\beta) - ce^{-\varepsilon\beta}}. \tag{12}$$

Используя (11) и (12), из (3) можно получить следующее двойное неравенство для эргодической функции распределения процесса $W_\beta(t)$:

$$1-\frac{\hat{U}(\beta(1-x))+ce^{-\varepsilon\beta(1-x)}}{\hat{U}(\beta)-ce^{-\varepsilon\beta}}<Q_{W_\beta}(x)<1-\frac{\hat{U}(\beta(1-x))-ce^{-\varepsilon\beta(1-x)}}{\hat{U}(\beta)+ce^{-\varepsilon\beta}}. \quad (13)$$

После некоторых преобразований из (13) получим

$$\frac{\hat{Q}_\beta(x)-\dfrac{c}{\hat{U}(\beta)}[e^{-\varepsilon\beta}+e^{-\varepsilon\beta(1-x)}]}{1-\dfrac{ce^{-\varepsilon\beta}}{\hat{U}(\beta)}}<Q_{W_\beta}(x)<\frac{\hat{Q}_\beta(x)+\dfrac{c}{\hat{U}(\beta)}[e^{-\varepsilon\beta}+e^{-\varepsilon\beta(1-x)}]}{1+\dfrac{ce^{-\varepsilon\beta}}{\hat{U}(\beta)}}, \quad (14)$$

где $\hat{Q}_\beta(x)\equiv 1-\dfrac{\hat{U}(\beta(1-x))}{\hat{U}(\beta)}=\dfrac{x}{1+m_{21}/\beta}$.

Поскольку $1-\dfrac{ce^{-\varepsilon\beta}}{\hat{U}(\beta)}<1$ и $1+\dfrac{ce^{-\varepsilon\beta}}{\hat{U}(\beta)}>1$, то из (14) имеем

$$\hat{Q}_\beta(x)-\frac{c}{\hat{U}(\beta)}[e^{-\varepsilon\beta}+e^{-\varepsilon\beta(1-x)}]<Q_{W_\beta}(x)<\hat{Q}_\beta(x)+\frac{c}{\hat{U}(\beta)}[e^{-\varepsilon\beta}+e^{-\varepsilon\beta(1-x)}]. \quad (15)$$

Наконец, из (15) получаем неравенство

$$|Q_{W_\beta}(x)-\hat{Q}_\beta(x)|<\frac{2m_1c}{\beta}[e^{-\varepsilon\beta}+e^{-\varepsilon\beta(1-x)}].$$

Теорема доказана. □

Сформулируем основной результат данного раздела.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда при некоторых $c<\infty$ и для каждого $\beta=S-s$ имеет место следующая равномерная по $x\in(0,1)$ оценка скорости сходимости для эргодического распределения процесса $W_\beta(t)$:

$$|Q_{W_\beta}(x)-G_0(x)|<\frac{2m_1c+m_{21}x}{\beta}, \quad (16)$$

где $m_{21}=\dfrac{m_2}{2m_1}$.

Доказательство. Учитывая, что $\hat{Q}_\beta(x)=\dfrac{x}{1+\dfrac{m_{21}}{\beta}}$ (см. теорему 2), для любого $x\in(0,1)$ имеем

$$|\hat{Q}_\beta(x)-G_0(x)|<\frac{\dfrac{m_{21}x}{\beta}}{1+\dfrac{m_{21}}{\beta}}<\frac{m_{21}x}{\beta}. \quad (17)$$

Используя оценку, полученную в теореме 2, а также (17), можно получить следующую оценку:

$$|Q_{W_\beta}(x)-G_0(x)|\le|Q_{W_\beta}(x)-\hat{Q}_\beta(x)|+|\hat{Q}_\beta(x)-G_0(x)|<$$

$$<\frac{2m_1c}{\beta}e^{-\varepsilon\beta(1-x)}+\frac{m_{21}x}{\beta}<\frac{2m_1c+m_{21}x}{\beta}.$$

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При достаточно больших значениях параметра $\beta = S - s$ эргодическая функция распределения процесса $X(t)$, описывающего так называемую модель управления типа (s,S), приближается к равномерному распределению на отрезке $[s, S]$, а также получена оценку скорости сходимости в предельной теореме. Доказано, что для каждого $\beta = S - s$ скорость сходимости к равномерному распределению эргодического распределения обратно пропорциональна β. Полученные результаты можно применить в теории управления запасами.

Авторы выражают благодарность академику НАН Украины А.В. Скороходу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skorohod A.V., Nasirova T.I. On the asymptotic behaviour of processes in an inventory control model // Theory Probability and Mathemat. Statist. — 1981. — N 23. — P. 137–142.
2. Sahin I. On the continuous-review (s, S) inventory model under compound renewal demand and random lead times // J. of Appl. Probab. — 1983. — **20**. — P. 213–219.
3. Прабху Н.У. Стохастические процессы теории запасов. — М.: Наука, 1984. —184 с.
4. Chen F., Zheng Y.-S. Sensitivity analysis of an (s, S) inventory model // Oper. Res. Letters. — 1997. — **21**. — P. 19–23.
5. Насирова Т.И. Япар Дж., Ханиев Т.А. О вероятностных характеристиках уровня запаса в модели типа (s,S) // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 5. — P. 69–76.
6. Gavirneni S. An efficient heuristic for inventory control when the customer is using a (s, S) policy // Oper. Res. Letters. — 2001. — **28**. — P. 187–192.
7. Derieva E.N. A control model for an insurance company // Cybernetics and Systems Analysis. — 2004. — **40**, N 6. — P. 936–938.
8. Artalejo J.R., Krishnamoorthy A., Lopez-Herrero M.J. Numerical analysis of (s, S) inventory systems with repeated attempts // Ann. Oper. Res. — 2006. — **141**. — P. 67–83.
9. Khaniyev T.A., Mammadova Z. On the stationary characteristics of the extended model of type (s, S) with Gaussian distribution of summands // J. of Statist. Comput. and Simul. — 2006. — **76**, N 10. — P. 861–874.
10. Khaniyev T.A., Kucuk Z. Asymptotic expansions for the moments of the Gaussian random walk with two barriers // Statistics & Probability Letters. — 2004. — **69**, N 1. — P. 91–103.
11. Khaniyev T.A., Kesemen T., Aliyev R.T., Kokangul A. Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with an exponential distributed interference of chance // Ibid. — 2008. — **78**, N 6. — P. 785–793.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. — М.: Мир, 1984. — 752 с.
13. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. — М.: Наука, 1972. — 368 с.
14. Боровков А.А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 2003. — 470 с.

Получено 12.10.2009