УДК 519.718: 519.217

В.К. ЯСИНСКИЙ, А.Я. ДОВГУНЬ, Е.В. ЯСИНСКИЙ

ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ДЛЯ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПУАССОНОВСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Ключевые слова: *фильтр Калмана–Бьюси, уравнение Рикатти, оптимальный фильтр, пуассоновские возмущения, стохастические динамические системы.*

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

На вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, F \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geq t_0\}, P)$ [1, 2] рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) с пуассоновскими возмущениями

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dw(t) + \int_U Q(t,u)\,\tilde{\nu}(du, dt)\,, \tag{1}$$

$$dy(t) = C(t)x(t)dt + D(t)dw(t) + \int_U G(t,u)\,\tilde{\nu}(du, dt) \tag{2}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0(\omega);\;\; y(t_0) = 0\,, \tag{3}$$

где $\{x(t) \equiv x(t,\omega)\} \subset \mathbf{R}^n$ и $\{y(t) \equiv y(t,\omega)\} \subset \mathbf{R}^n$ — n-мерные случайные процессы [3].

Рассмотрим следующие условия:

1) коэффициенты-матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, $Q(t,u)$, $G(t)$ размера $n \times n$ в (1), (2) являются непрерывными по t на отрезке $[t_0, t^*]$;

2) для произвольного $t \in [t_0, t^*]$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$Z(t) \equiv D(t)\cdot D^T(t) + \int_U G(t,u)G^T(t,u)\Pi(du)dt \geq \varepsilon \cdot I; \tag{4}$$

3) $\{w(t) \equiv w(t,\omega)\}$ — n-мерный стандартный винеровский процесс [2];

4) $\tilde{\nu}(du, dt) \equiv \nu(du, dt) - \Pi(du)dt$ — n-мерная центрированная мера Пуассона с параметром $\Pi(du)dt = E\{\nu(du, dt)\}$ [3];

5) $\{w(t)\}$, $\{\tilde{\nu}(du, dt)\}$, $\{x_0 \equiv x_0(\omega)\} \subset \mathbf{R}^n$ — попарно независимы.

Предположим, что СДУ (1), (2) при каждом $t \geq t_0$ описывает детерминированную линейную динамическую систему, которая возбуждена «белым шумом» и пуассоновскими возмущениями.

Задача фильтрации состоит в оценке случайного процесса $\{x(t)\} \subset \mathbf{R}^n$ по наблюдениям $\{y(s)\} \subset \mathbf{R}^n$, $t_0 \leq s \leq t$, и функциях-матрицах A, B, Q, C, P, G, считая, что первый и второй моменты $E\{x_0\} < \infty$, $E\{x_0 \cdot x_0^T\}$ известны [4, 5].

Условия 1–5 гарантируют существование единственного сильного решения СДУ (1)–(3) с точностью до стохастической эквивалентности [3].

Обозначим $Y_t \equiv \sigma\{y(s)\colon t_0 \leq s < t\}$ σ-алгебру, которая построена по наблюдению $\{y(s) \equiv y(s,\omega)\}$.

Случайный процесс $\hat{x}(t) \equiv \hat{x}(t, \omega)$: $[t_0, \infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ можно рассматривать как новый случайный процесс, который определен условным математическим ожиданием

$$\hat{x}(t) \equiv E\{x(t) | Y_t\}. \tag{5}$$

Обозначим $P(t)$ условную ковариационную матрицу

$$P(t) \equiv cov\{x(t) | Y_t\} \equiv E\{(x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T | Y_t\}, \tag{6}$$

а для $t \ge s$ введем условную вероятность

$$P(t | s) \equiv cov\{x(t) | Y_s\}. \tag{7}$$

Найдем связь между $P(t)$ и $P(t|s)$.

Пусть $\Phi(t, s)$ — фундаментальная матрица для детерминированной части уравнения (1). Тогда для $t_0 \le s \le t \le t^*$ решение $x(t) \in R^n$ СДУ (1) представимо интегральным уравнением [2]

$$x(t) = \Phi(t, s)x(s) + \int_s^t \Phi(t, \tau)B(\tau)dw(\tau) + \int_s^t \int_U \Phi(t, \tau)G(\tau, u)\widetilde{\nu}(du, d\tau), \tag{8}$$

при этом для $s \le t$ условная ковариационная матрица примет вид

$$P(t | s) = \Phi(t, s)P(s)\Phi^T(t, s) + \int_s^t \Phi(t, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)d\tau +$$

$$+ \int_s^t \int_U \Phi(t, \tau)G(\tau, u)G^T(\tau, u)\Phi^T(t, \tau)\Pi(du)d\tau. \tag{9}$$

Лемма 1 [6]. Пусть $\widetilde{Y}_t$ — σ-алгебра, порожденная множеством случайных переменных $y(s_k)$, $t_0 \le s_k \le t$, для $\widetilde{Y}_t \subset Y_t$. Тогда имеют место следующие равномерные оценки:

$$cov\{x(t) | \widetilde{Y}_t\} \le \text{const}, \quad t_0 \le t \le t^*,$$

$$E\{| E\{x(t) | \widetilde{Y}_t\}|^2\} \le E\{E\{| E\{x(t) | \widetilde{Y}_t\}|^2\} | Y_t\} = E\{| x(t)|^2\} \le \text{const}, \; t_0 \le t \le t^*.$$

Лемма 2 [6]. Пусть:

1) $\{y(t)\colon t_0 \le t \le t^*\} \subset \mathbf{R}^n$ — стохастически непрерывний процесс;

2) $S \equiv \{S_n\}$ — конечное всюду плотное в $[t_0, t^*]$ множество;

3) $\hat{Y}_t \equiv \sigma\{y(s)\colon s \in [t_0, t] \cap S\}$.

Тогда для случайной величины $f \equiv f(\omega)$, для которой $E\{| f |\} < \infty$, существуют соответствующие математические ожидания, которые с вероятностью единица совпадают:

$$E\{f | Y_t\} = E\{f | \hat{Y}_t\} \pmod P.$$

Лемма 3 [6]. Пусть:

1) $\{t_j^{(m)}\colon j = 0, 1, \ldots, N_m\}$, $m \ge 1$, — возрастающая последовательность разбиений отрезка $[t_0, t^*]$ таких, что

$$t_0 = t_0^{(m)} < t_1^{(m)} < \ldots < t_{N_m}^{(m)} = t^*;$$

2) $\lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_{1\le j\le N_m} (t_j^{(m)} - t_{j-1}^{(m)}) = 0$;

3) $\{y(t): t_0 \le t \le t^*\}$, Y_t и f определены в лемме 2;

4) $Y_t^{(m)} \equiv \sigma\{y(t_j^{(m)}) : 0 \le j \le N_m, t_j^{(m)} \le t\}$.

Тогда

$$\lim_{m\to\infty} E\{f \mid Y_t^{(m)}\} = E\{f \mid Y_t\} \ (\mathrm{mod}\, P).$$

Заметим, что для $\hat{x}_m(t) \equiv E\{x(t) | Y_t^{(m)}\}$, $P_m(t) \equiv cov\{x(t) | Y_t^{(m)}\}$ в соответствии с леммой 1 переменные $E\{|\hat{x}_m(t)|^2\}$ и $|P_m(t)|$ равномерно ограничены по m на $[t_0, t^*]$. Причем согласно лемме 3 не только имеем с вероятностью 1 сходимость

$$\lim_{m\to\infty} \hat{x}_m(t) = \hat{x}(t) \ (\mathrm{mod}\, P),$$

$$\lim_{m\to\infty} P_m(t) = P(t) \ (\mathrm{mod}\, P),$$

но и равномерные сходимости в среднем квадратическом [3].

ОБОБЩЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Определим задачу построения оптимального фильтра Калмана-Бьюси [1, 6], а именно построения оптимальной оценки $\{\hat{x}(t) \equiv \hat{x}(t,\omega)\} \subset \mathbf{R}^n$ вектора $\{x(t) \equiv x(t,\omega)\} \subset \mathbf{R}^n$ с заданными значениями $y(s) \equiv y(s,\omega)$, $t_0 \le s \le t$.

Полагаем, что:

i) искомая оценка $\hat{x}(t)$ является несмещенной для $x(t)$, т.е

$$E\{\hat{x}(t)\} = x(t) \ \ \forall t \in [t_0, t^*];$$

$$\hat{x}(t) = ay(t) + b \ \ (a, b \text{ — const});$$

ii) по критерию оптимальности существует минимум квадратической оценки

$$E\{(x(t) - \hat{x}(t))^T M (x(t) - \hat{x}(t))\} = \min \ \ (M > 0).$$

Введем обозначения:

$$m_x \equiv E\{x(t)\}; \quad m_y \equiv E\{y(t)\}; \tag{10}$$

$$P_{xx} \equiv E\{(x - m_x)(x - m_x)^T\}; \tag{11}$$

$$Q_{xy} \equiv E\{(x - m_x)(y - m_y)^T\}; \tag{12}$$

$$R_{yy} \equiv E\{(y - m_y)(y - m_y)^T\}. \tag{13}$$

Известно [7], что

$$\hat{x}(t) = m_x + Q_{xy} \cdot R_{yy}^{-1}[y(t) - m_y]. \tag{14}$$

Таким образом, ковариационная погрешность определяется выражением

$$E\{(x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T\} = P_{xx} - Q_{xy} R_{xy}^{-1} Q_{xy}^{-1}, \tag{15}$$

где $R_{xy} > 0$, $Q_{xy} > 0$. Если $\det R_{xy} = 0$, $\det Q_{xy} = 0$, тогда R_{xy}^{-1}, Q_{xy}^{-1} следует положить равными псевдообратными матрицами [8, 9].

Отметим, что если $x(t)$, $y(t)$ — гауссовы векторы, то оценка (14) является условным математическим ожиданием вектора $x(t)$ для данного $y(s)$:

$$\hat{x}(t) = E\{x(t) | y(s)\}, \ t_0 \le s \le t.$$

В этом случае оценка (14) является оптимальной, поскольку условия (i) и (ii) выполняются. Можно доказать [4, 5], что формула (15) будет условной ковариацией вектора $x(t)$:

$$E\{(x(t)-\hat{x}(t))(x(t)-\hat{x}(t))^T \mid y(s)\} = P_{xx} - Q_{xy}R_{xy}^{-1}Q_{xy}^{-1} . \tag{16}$$

Вначале определим приближение для условной ковариационной матрицы $P(t)$ (см. (6)) и затем найдем дифференциальное уравнение для $P(t)$, которое назовем обобщенным дифференциальным уравнениям Риккати [1, 6].

Теорема 1. Пусть:

1) $\Phi(t,\tau)$ — фундаментальная матрица для детерминированного уравнения СДУ (1)

$$dx(t) = A(t)x(t)dt \tag{1a}$$

с соответствующей дважды непрерывно дифференцируемой матрицей $A(t)$;

2) выполняются условия лемм 1–3;

3) для некоторого $t \in [t_0, t^*]$ существуют интегралы

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t,\tau)d\tau < \infty ;$$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{U} \Phi(t,\tau)G(\tau,u)G^T(\tau,u)\Phi(t,\tau)\Pi(du)d\tau < \infty .$$

Тогда условная ковариационная матрица $P(t)$, построенная на решениях СДУ (1)–(3), удовлетворяет обобщенное матричное уравнение Риккати

$$\frac{dP(t)}{dt} = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + B(t)B^T(t) + \int_U Q(t,u)Q^T(t,u)\Pi(du) +$$

$$+\left[P(t)C^T(t) + B(t)D^T(t) + \int_U Q(t,u)G^T(t,u)\Pi(du)\right]\times$$

$$\times\left[D(t)D^T(t) + \int_U G(t,u)G^T(t,u)\Pi(du)\right]\times$$

$$\times\left[P(t)C^T(t) + B(t)D^T(t) + \int_U Q(t,u)G^T(t,u)\Pi(du)\right]^T , \tag{17}$$

$$P(t_0) = cov(x_0) .$$

Доказательство. Рассмотрим дискретное приближение для $P(t|s) \equiv cov(x(t)|Y_s)$. Зафиксировав $m \in \mathbf{N}$, обозначим

$$\delta_m \equiv \frac{t^* - t_0}{m};\ t_j^{(m)} \equiv t_0 + j\cdot\delta_m;\ 1 \le j \le m .$$

Пусть выполняется условие 1 теоремы 1. Тогда фундаментальная матрица $\Phi(t,\tau)$ в точках t_{j+1}, t_j представима в виде

$$\Phi(t_{j+1}, t_j) = I + \delta_m A(t_j) + o(\delta_m^2),$$

где

$$\lim_{m\to\infty} \delta_m = 0 .$$

Ясно, что для матрицы Φ выполняется следующее равенство, как разложение по формуле Тейлора с соответствующим остаточным членом:

$$\Phi(t,s) = \Phi(s,s) + (t-s)\left.\frac{\partial \Phi(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s} + \frac{(t-s)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 \Phi(t,s)}{\partial t^2}\right|_{t=s^*}, \quad s^* \in [s,t].$$

Поскольку матрица Φ является фундаментальной матрицей для (1a), то соответственно с определением имеем $\Phi(s,s) = I$. Заметим, что

$$\frac{\partial \Phi(s,s)}{\partial s} = A(s) .$$

Тогда

$$\frac{\partial \Phi(t,s)}{\partial t} = I + (t-s)A(s) + o((t-s)^2) .$$

Для вычисления $P_{j+1} - P_j \equiv P(t_{j+1}) - P(t_j)$ рассмотрим средние величины $x_{j+1} \equiv x(t_{j+1})$ и $y_j \equiv y(t_j)$, $j \le j+1$.

Обозначим

$$\hat{x}(t|t_j) \equiv E\{x(t)|Y_j\}, \; P_{j+1}(j) \equiv \mathrm{cov}\{x(t_{j+1})|Y_j\} .$$

Легко увидеть, что

$$\hat{x}(t|t_j) = \Phi(t,t_j)\hat{x}(t_j); P_{j+1}(t_j) = \Phi(t_{j+1},t_j)P_j\Phi^T(t_{j+1},t_j) +$$

$$+ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Phi(t_{j+1},t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_{j+1},t)dt +$$

$$+ \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_U \Phi(t_{j+1},t)G(t,u)G^T(t,u)\Phi^T(t_{j+1},t)\Pi(du)dt .$$

Заметим, что матрица $P_{j+1}(t_j)$ выступает в роли матрицы P_{xx} в (11).

При вычислении соответственно матриц Q_{xy} и P_{yy} из (12), (13) следует учитывать, что СДУ (2) можно рассматривать как стохастическое дифференциальное уравнение вида [10]

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} C(t)x(t)dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} D(t)dw(t) + \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_U G(t,u)\widetilde{v}(du,dt) .$$

Имеет место равенство

$$E\{y(t_{j+1})|Y(j)\} = y_{t_j} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} C(t)\hat{x}(t|t_j)dt = y_{t_j} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} C(t)\Phi(t,t_j)\hat{x}_{t_j}dt =$$

$$= y(t_j) + \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} C(t)dt\right)\hat{x}(t_j) + \delta_m^2 \cdot \theta_j ,$$

где $E\{|\theta_j|^2\} = o(1)$ при $\delta_m \to 0$ равномерно по j.

Для оценки R_{xx} введем следующие обозначения:

$$\Delta_j(t) \equiv \Phi(t, t_j)(x(t_j) - \hat{x}(t_j)); \ \xi_j^{(1)}(t) \equiv \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Phi(t,s)B(s)dw(s);$$

$$\eta_j^{(1)} \equiv \int_{t_j}^{t_{j+1}} D(t)dw(t); \ \xi_j^{(2)}(t) \equiv \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_U \Phi(t,s)Q(t,u)\widetilde{v}(du,dt);$$

$$Q_{xy} \equiv \mathrm{cov}\{x(t_{j+1}), y(t_{j+1}) | Y_j\} = E\{| x(t_{j+1}) - \Phi(t_{j+1}, t_j)\hat{x}(t_j)|\},$$

где $\Delta_j(t)$, $\xi_j^{(i)}$ — случайные процессы, $\delta_m \to 0$ и $\eta^{(i)}$ — случайные переменные, $j = 1, 2$.

Тогда $x(t)$ с учетом новых обозначений принимает вид

$$x(t) = \Phi(t, t_j)x(t_j) + \xi_j^{(1)}(t) + \xi_j^{(2)}(t),$$

$$y(t_{j+1}) - y(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} C(t)[\Phi(t, t_j)x_j + \xi_j^{(1)}(t) + \xi_j^{(2)}(t)]dt + \eta_j^{(1)} + \eta_j^{(2)}.$$

Таким образом, получим

$$R_{xx} \equiv \mathrm{cov}\{y_{j+1} | Y_j\} = \mathrm{cov}\left\{ \int_{t_j}^{t_{j+1}} [C(t)[\Delta_j(t) + \xi_j^{(1)}(t) + \xi_j^{(2)}(t)]dt + \eta_j^{(1)} + \eta_j^{(2)}] | Y_j \right\}.$$

Заметим, что случайные процессы $\xi_j^{(i)}(t)$ $\forall t \in [t_j, t_{j+1}]$ и случайные величины $\eta_j^{(i)}$, $i = 1, 2$, не зависят от Y_j, поэтому

$$R_{xx} = cov\left\{ \int_{t_j}^{t_{j+1}} C(t)\Delta_j(t) | Y_j dt \right\} +$$

$$+ \mathrm{cov}\left\{ \eta_j^{(1)} + \eta_j^{(2)} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} C(t)\xi_j^{(1)}(t)dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} C(t)\xi_j^{(2)}(t)dt | Y_j \right\}$$

или

$$R_{xx} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} D(t)D^T(t)dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_U G(t,u)G^T(t,u)\Pi(du)dt + o(\delta_m^2).$$

Из этого равенства и условия (4) вытекает существование ограниченного произведения $\delta_m \cdot R_{xx}^{-1}$ такого, что $\lim\limits_{m \to \infty} \delta_m = 0$. Действительно,

$$\delta_m \cdot R_{xx}^{-1} = \delta_m \left[\int_{t_j}^{t_{j+1}} D(t)D^T(t)dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_U G(t,u)G^T(t,u)\Pi(du)dt \right]^{-1} + o(\delta_m),$$

где $\lim\limits_{m \to \infty} \delta_m = 0$.

Аналогично можно установить, что

$$Q_{xy} \equiv \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[P_i C^T(t) + B(t) D^T(t) + \int_U G(t,u) G^T(t,u) \Pi(du) \right] dt + o(\delta_m^{3/2}), \ \lim_{m\to\infty} \delta_m = 0.$$

Теперь можно найти условную ковариацию вектора $x(t)$, а именно

$$P_{j+1} = P_{j+1}(j) - Q_{xy} R_{yy}^{-1} Q_{xy}^T .$$

Легко увидеть выполнение интегрального равенства

$$P_{j+1} - P_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Bigg[A(t) P_j + P_j A^T(t) + B(t) B^T(t) + \int_U Q(t,u) Q^T(t,u) \Pi(du) +$$

$$+ \left[P_j C^T(t) + B(t) D^T(t) + \int_U Q(t,u) G^T(t,u) \Pi(du) \right] \times$$

$$\times \left[D(t) D^T(t) + \int_U G(t,u) G^T(t,u) \Pi(du) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[P_j C^T(t) + B(t) D^T(t) + \int_U Q(t,u) G^T(t,u) \Pi(du) \right]^T \Bigg] dt + o(\delta_m^{3/2}), \qquad (18)$$

где $o(\cdot)$ равномерно по индексу j.

Найдем зависимость P_j от m_0. Для $t_j \le t \le t_{j+1}$ матрица P_m определяется из равенства (9), если обозначить $P(s)$ через P_j. Отсюда получаем, что в последнем равенстве (18) вместо P_j можно взять $P_m(t)$ с погрешностью, которая не превышает $o(\delta_m)$ при $\delta_m \to 0$.

В результате получим

$$P_m(t^*) - P(t_0) = \sum_{j=1}^{m} [P_m(t_j) - P_m(t_{j-1})] =$$

$$= \int_{t_0}^{t^*} \Bigg[A(t) P_m(t) + P_m(t) A^T(t) + B(t) B^T(t) + \int_U Q(t,u) Q^T(t,u) \Pi(du) +$$

$$+ \left(P_m(t) C^T(t) + B(t) D^T(t) + \int_U Q(t,u) G^T(t,u) \Pi(du) \right) \times$$

$$\times \left(D(t) D^T(t) + \int_U G(t,u) G^T(t,u) \Pi(du) \right)^{-1} \times$$

$$\times \left(P_m(t) C^T(t) + B(t) D^T(t) + \int_U Q(t,u) G^T(t,u) \Pi(du) \right)^T \Bigg] dt +$$

$$+ \mathrm{const} \cdot m \cdot \delta_m^2 + m \cdot o(\delta_m^2) \equiv J(P_m) + \mathrm{const} \cdot m \cdot \delta_m^2 + m \cdot o(\delta_m^{3/2}), \qquad (19)$$

где $J(P_m)$ — интеграл правой части равенства (18). Если $\delta_m = \frac{t^* - t_0}{m}$, то

$$\lim_{m\to\infty} \left\lfloor P_m(t^*) - P(t_0) - J(P_m) \right\rfloor = 0 .$$

Точки t_j являются точками разрыва функции $P_m(\cdot)$, и эти функции непрерывны справа. Но $\lim_{m\to\infty} P_m(t) = P(t)$ и функции $P_m(\cdot)$ равномерно ограничены. Если $m \to \infty$, то

$$P(t^*) = P(t_0) J(P) .$$

Заметим, что все формулы верны для интервала $t_0 \le t' \le t \le t^*$. Тогда легко получить дифференциальное уравнение (17) для условной ковариационной матрицы

$$P(t) \equiv E\{(x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T \mid Y_t\} .$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. На практике уравнение Рикатти (17) решается заменой его соответствующим дискретным уравнением. Для получения дискретного приближения уравнения Риккати (17) можно применить равенства (14) и (15) к дифференциальному уравнению для модели с дискретным временем [11].

Замечание 2. Если $Q(t,u) \equiv 0$, $G(t,u) \equiv 0$, то вопрос существования и приближенного поведения решений уравнения Рикатти (17) рассмотрено Kalman R.E. [6] и Wonham W.M. [3, 5, 12].

Известно, что для уравнения Рикатти (17) существует единственное решение на некотором отрезке $[t_0, t^*]$ [12]. Если все параметры в (17) — постоянные величины, то при некоторых условиях [11] существует предел $P_\infty = \lim_{t\to\infty} P(t)$ и матрица N является устойчивой:

$$N = A -$$

$$- \left(P_\infty C^T + BD^T + \int_U Q(t,u) G^T(t,u) \Pi(du) \right) \cdot \left(DD^T + \int_U G(t,u) G^T(t,u) \Pi(du) \right)^{-1} \cdot C.$$

Более того, стационарный фильтр совпадает с фильтром Винера для оптимальной среднеквадратической фильтрации стационарных последовательностей [1].

Теорема 2. Пусть $\{x(t), y(t)\colon t_0 \le t \le t^*\}$ — случайные процессы, которые определены стохастическим дифференциальным уравнениям (1), (2). Тогда оценка $\hat{x}(t)$, $t_0 \le t \le t^*$, с точностью до стохастической эквивалентности определяется как решение СДУ

$$dz(t) = A(t) z(t) dt + K(t)[dy(t) - C(t) z(t) dt], \quad t_0 \le t \le t^*, \tag{20}$$

с начальными условиями

$$\hat{x}(t_0) = E\{x_0\} . \tag{21}$$

Здесь

$$K(t) \equiv \left[P(t) C^T(t) + B(t) D^T(t) + \int_U Q(t,u) G^T(t,u) \Pi(du) \right] \times$$

$$\times \left[D(t) D^T(t) + \int_U G(t,u) G^T(t,u) \Pi(du) \right]^{-1}$$

и отображение $P(t)$ удовлетворяет обобщенное матричное уравнение Риккати (17). Случайные процессы $z(t) = l.i.m. z_n(t)$ и $\{z_n(t)\} \subset \mathbf{R}^n$ удовлетворяют СДУ (20).

Доказательство этой теоремы базируется на методике работы [3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения (17) и (20) были формально получены R.E. Kalman и R.S. Busy [6]. Эти уравнения описывают динамическую структуру фильтра, допускающего оценку $x(t) \in \mathbf{R}^n$ в интервале времени с наблюдениями, которые учитывают шумы (Винера и Пуассона), а их моделью являются СДУ (8).

Для моделирования оптимального фильтра следует решать обобщенное уравнение Рикатти (17) и учитывать функцию $P(t)$, $t_0 \le t \le t^*$. Фильтр Калмана–Бьюси описывается СДУ (20) и (21), которые можно смоделировать методами компьютерного статистического моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brammer K., Zifling G. The Kalman–Busy filter: determent observation and stochastic filtration. — M.: Nauka, 1982. — 420 p.
2. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стохастичні динамічні системи зі скінченною передісторією. — Снятин: Над Прутом, 2000. — 398 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 612 с.
4. Wonham W.M. On matrix Riccati equation of stochastic control // In SIAM J. Control. — 1968. — N 6. — P. 681–691.
5. Ясинський В.К., Ясинський Є.В. Задачі стійкості та стабілізації стохастичних динамічних систем зі скінченною післядією. — Київ: ТВіМС, 2005. — 580 с.
6. Kalman R.E., Busy R.S. New results in linear filtering and production theory // J. Basic Eng. — 1961. — **8.** — P. 95–108.
7. Ивченко Г.И., Медведев Ю.Н. Математическая статистика. — М.: Высш. школа, 1984. — 344 с.
8. Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П. Псевдообращения в задачах управления и наблюдения // Автоматика. — 1993. — № 5. — С. 69–81.
9. Leondess K.T. Filtration and stochastic control in dynamic systems. — M.: Mir, 1980. — 216 p.
10. Kurzhansky A. The control and observation in conditions of indeterminacy. — M.: Nauka, 1977. — 322 p.
11. Kallianpur G. Stochastic theory of filtration. — M.: Nauka, 1987. — 170 p.
12. Икрамов Х.Д. Чисельнное решение матричных уравнений. — М.: Наука, 1984. — 192 с.
13. Юрченко І.В., Ясинська Л.І., Ясинський В.К. Методи стохастичного моделювання систем. — Чернівці: Прут, 2002. — 416 с.

Поступила 11.05.2010