УДК 681.5.015

В.В. ЛИТВИНОВ, І.В. ХОМЕНКО

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ СТВОРЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Анотація. *У статті розглянуто питання формалізації процесу створення геометричних моделей та представлення графічних даних і знань у системах для автоматизованого навчання. Наведено приклади побудови моделей із тіл простої форми із використанням бінарних операцій, розглянуто їх властивості та наведено геометричну інтерпретацію. Представлені та доведені закони Моргана, дистрибутивні операції, застосовні для операцій із твердими тілами.*
Ключові слова: *моделювання твердих тіл, граматика моделювання, властивості бінарних операцій, дерево побудови моделі.*

Аннотация. *В статье рассмотрены вопросы формализации процесса создания геометрических моделей и представления графических данных и знаний в системах для автоматизированного обучения. Приведены примеры построения моделей из тел простой формы с использованием бинарных операций, рассмотрены их свойства и приведена геометрическая интерпретация. Представлены и доказаны законы Моргана, дистрибутивные операции, применимые для операций с твердыми телами.*
Ключевые слова: *моделирование твердых тел, грамматика моделирования, свойства бинарных операций, дерево построения модели.*

Abstract. *The paper deals with the formalization of the process of geometric models creation and graphic representation of data and knowledge in the systems for automated learning. We presented examples of model building of bodies of simple shapes using binary operations; also we examined their properties and geometric interpretation. Morgan laws were presented and proved, distributive operations applied to operations with solids.*
Keywords: *modeling of solids, modeling grammar, properties of binary operations, Model tree.*

1. Вступ

Графічні зображення та креслeники є невід’ємною частиною будь-яких інженерних проектів, тому комп’ютерна графіка та геометричне моделювання справедливо вважаються одними із універсальних методів технічної творчості.

Геометричне моделювання як наука вивчає методи побудови математичних моделей, які описують геометричні властивості предметів навколишнього світу. Воно базується на аналітичній та диференціальній геометрії, обчислювальній математиці, варіаційному обчисленні, топології і розробляє свої власні методи моделювання [1].

Комп’ютерне геометричне моделювання нерозривно пов’язане із комп’ютерною (машинною) графікою. Наприклад, існує цілий клас інваріантного програмного забезпечення САПР, яке прийнято називати «Системи (підсистеми) комп’ютерної машинної графіки та геометричного моделювання» – СГМ [2].

До комп’ютерного геометричного моделювання прийнято відносити методи та алгоритми внутрішнього представлення й перетворення геометричних моделей (побудови, редагування та параметризації) на ЕОМ.

2. Методи побудов тривимірних геометричних моделей

Загальноприйнятим порядком моделювання твердого тіла є послідовність виконання операцій об’єднання, віднімання та перетину над об’ємними елементами – сферами, призмами, циліндрами, конусами, пірамідами тощо.

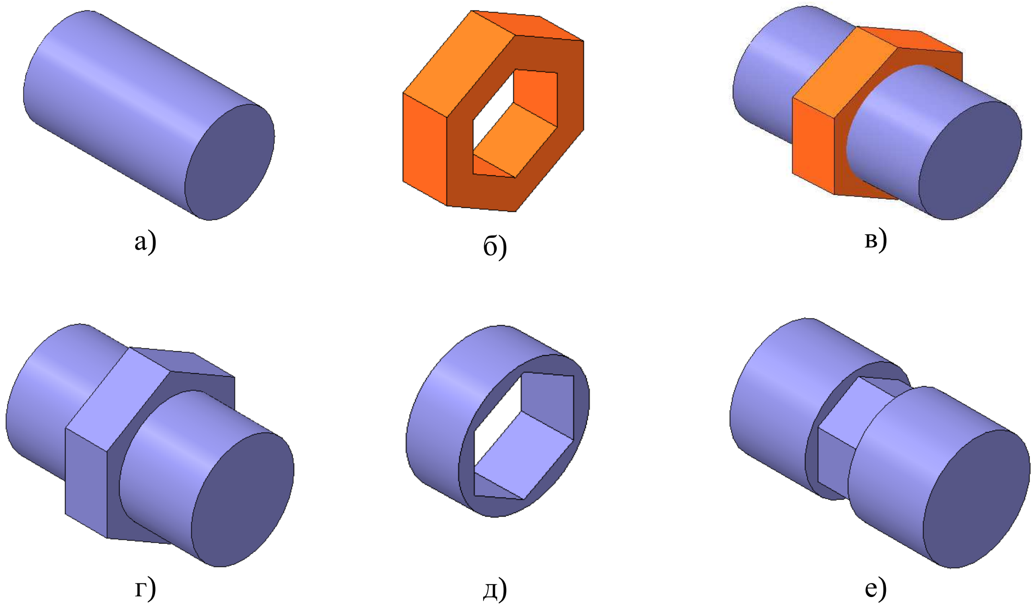
Спочатку виконується моделювання першого формотворчого елемента деталі – основи. Під тілом розуміється будь-яка частина простору, обмежена замкненою поверхнею й заповнена однорідним матеріалом. За необхідності створюються другий та наступні формотворчі елементи. Після цього виконуються необхідні, так звані булеві операції. Прикладом віднімання об’єму може бути створення різних отворів, проточок, канавок, прикладом додавання об’єму – створення виступів, ребер жорсткості тощо.

Для інтерактивного процесу геометричного 3D-моделювання тіл зручно застосовувати операції математичної логіки:

– об’єднання (Union) $A \cup B$; ця операція об’єднує два тіла в одне та видаляє області, які перетинаються або накладаються (рис. 1 г);

– перетину (Intersection) $A \cap B$; ця операція створює тіло, яке містить лише області перетину двох тіл (див. рис. 1 д);

– віднімання (Subtraction) $A \setminus B$, $B \setminus A$; ця операція дозволяє видалити одне із тіл та будь-які області перетину тіл (рис. 1 е, ж).



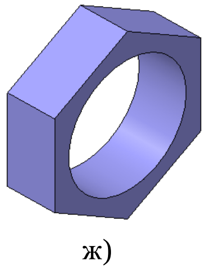


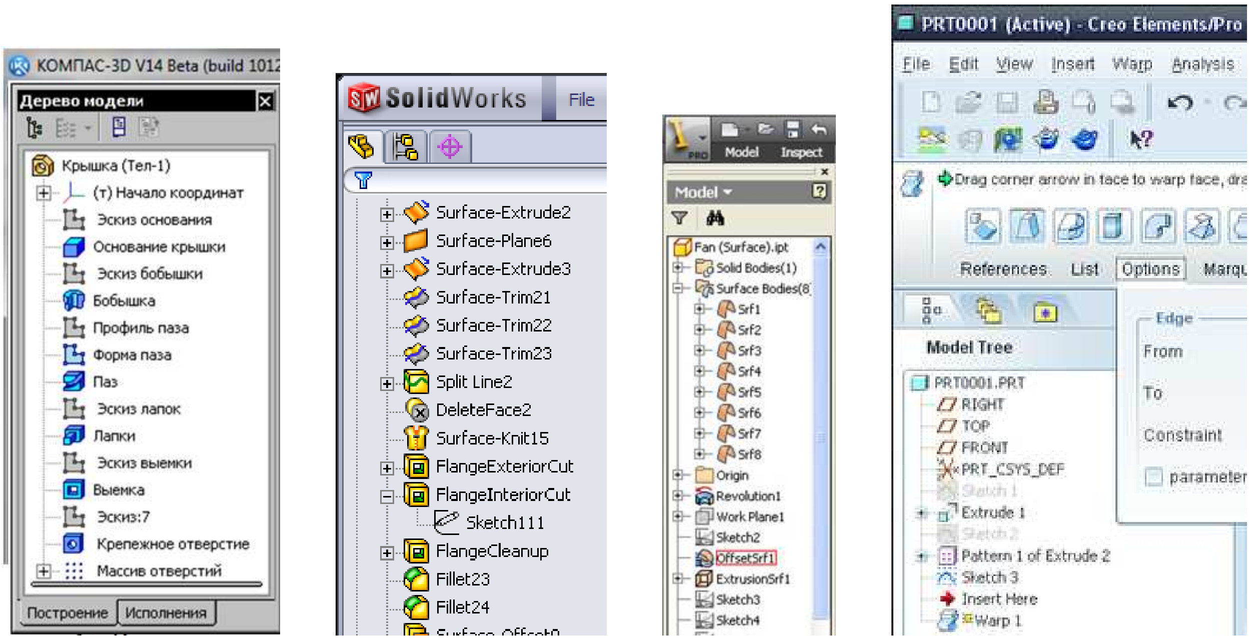
Рис. 1. Операції із об’ємними тілами: а) тіло А; в) тіло В; в) розташування тіл А та В; г) об’єднання $A \cup B$; д) перетин $A \cap B$; е) віднімання $A \setminus B$; ж) віднімання B / A

3. Управління геометричними моделями

В універсальних CAD-системах тривимірна модель формується й управляється користувачем за допомогою дерева побудов (рис. 2) (дерево конструювання – feature manager, дерево моделі – Model tree, навігатор моделі – Model Navigator).

Дерево побудов можна вважати графоаналітичною моделлю побудови геометричної моделі – наочне зображення алгоритму отримання моделі. У дереві побудов представлена уся послідовність об’єктів та операцій, за допомогою яких утворюється модельоване тіло. Наприклад, об’єкти можуть відображатись у дереві у вигляді ієрархічного списку, до складу якого входять пласкі ескізи та операції руху цих ескізів. Дерево побудов та графічна область екрану динамічно пов’язані. У режимі діалогу користувач може отримати доступ і модифікувати об’єкти, операції та утворюючі ескіз лінії й контури.

Останнім часом спеціалістами активно обговорюються можливості створення об’ємних геометричних моделей без збереження історії побудов за рахунок розширення можливостей варіаційної параметризації [3]. Відмовитись від дерева побудови дозволяє використання так званих конструктивних елементів (future-based design), застосування досягнень штучного інтелекту та об’єктно-орієнтованого програмування.



а) б) в) г)

Рис. 2. Варіанти реалізації дерева побудови геометричної моделі: а) КОМПАС-3D; б) SolidWorks; в) Autodesk Inventor 3D; г) Creo Elements/Pro

Організаційно зміни традиційної методики проектування полягають в інтерактивному породженні користувачем 3D-моделі технічного об’єкта із конструктивних елементів, без обов’язкового представлення йому дерева побудов. Але при цьому проектувальник повинен отримати досить гнучкий інструмент для редагування геометричних форм. Наприклад, допускається динамічне переміщення конструктивних елементів, коли за допомогою миші можна змінювати розташування бобишки або отвору безпосередньо на екрані. В такому випадку сумісність моделі можна гарантувати за рахунок збереження її топології – суміжності граней, ребер та вершин.

Можливість динамічного редагування форми шляхом переміщення граней, ребер та вершин геометричної моделі із одночасним інтерактивним впорядкуванням усіх обмежень суттєво підвищує можливості й продуктивність візуального моделювання. Такий функціонал важливий для задач аналізу кінематики машин і механізмів.

Ідея проектування, заснованого на використанні стандартних конструктивних елементів, не нова [4, 5]. Але її програмна реалізація досить складна й потребує об’єднання досягнень теорії та практики багатьох напрямів розвитку комп’ютерних наук. Таким чином, синхронне геометричне моделювання можна класифікувати як нову інформаційну технологію, засновану на комплексному застосуванні методів граничного представлення об’ємних тіл, варіаційної параметризації, штучного інтелекту та об’єктно-орієнтованого програмування, призначеного для підвищення рівня автоматизації 3D-геометричного моделювання у промислових автоматизованих системах.

4. Представлення математичного змісту геометричних моделей

Процес побудови моделей у геометричному моделюванні схожий на процес виготовлення виробу, що моделюється. Спочатку створюються прості тіла, а потім виконується набір дій, який дозволяє із тіла простої форми отримати більш складне тіло. За необхідності створюються допоміжні об’єкти.

Сукупність дій над тілами, яка призводить до утворення тіла іншої форми, будемо називати операцією. Основними операціями над тілами є: об’єднання, перетин та віднімання. Також є спеціальні операції: оболонки, фаски, заокруглення, ребра жорсткості та ін. Розглянемо основні.

У порядку слідування тіл-операндів будемо називати їх першим тілом та другим тілом. Результатом операції об’єднання двох тіл є тіло, до складу якого входять об’єми першого або другого тіла. Результатом операції перетину двох тіл є тіло, яке містить об’єми першого та другого тіла. Результатом операції віднімання двох тіл є тіло, яке містить об’єм першого тіла і не містить об’єм другого тіла.

4.1. Операція об’єднання двох тіл

Об’єднанням двох тіл A та B називається тіло $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$. Іншими словами $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \cup x \in B$.

Геометрично об’єднання двох тіл зображено на рис. 3.

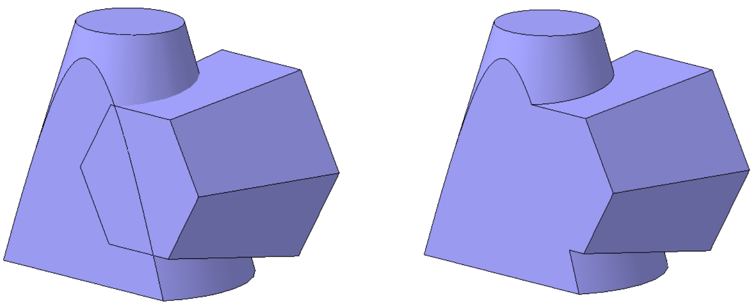


Рис. 3. Об’єднання двох тіл

Об’єднання двох тіл A та B повинно мати такі властивості:

а) ідемпотентність об’єднання: $A \cup A = A$;

б) комутативність об’єднання: $A \cup B = B \cup A$;

в) асоціативність об’єднання: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

г) $A \cup \varnothing = A$;

д) $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = B = \varnothing$.

Доведення:

• Візьмемо $x \in A \cup A \leftrightarrow x \in A \vee x \in A \leftrightarrow x \in A$.

При останньому переході ми скористалися ідемпотентністю диз’юнкції. Таким чином, ідемпотентність об’єднання двох тіл є наслідком ідемпотентності диз’юнкції в алгебрі висловлювань.

• Візьмемо $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \leftrightarrow x \in B \vee x \in A \leftrightarrow x \in B \cup A$. Доведено, що $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in B \cup A$. Як наслідок, $A \cup B = B \cup A$.

• Візьмемо $x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$ (асоціативність диз’юнкції). Доведено, що $x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$.

Як наслідок, $\left(A \cup B\right) \cup C = A \cup \left(B \cup C\right)$.

• Візьмемо $x \in A \cup \varnothing \leftrightarrow x \in A \vee x \in \varnothing \leftrightarrow x \in A$. У зв'язку з тим, що вислів $x \in \varnothing$, тотожно несправедливе. Як наслідок, $A \cup \varnothing = A$.

• Якщо $A = B = \varnothing$, то $A \cup B = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$. У зворотну сторону. Нехай $A \cup B = \varnothing$. Тобто, $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in \varnothing$. Тобто вислів є тотожно несправедливим. З іншої сторони, $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$, а диз'юнкція двох висловів несправедлива лише тоді, коли несправедливі обидва вислови. Отже, $x \in A \leftrightarrow x \in \varnothing$ та $x \in B \leftrightarrow x \in \varnothing$, таким чином $A = B = \varnothing$.

4.2. Операція перетину двох тіл

Перетином двох тіл A та B називається тіло $A \cap B = \left\{x \mid x \in A \wedge x \in B\right\}$.

Геометрично перетин двох тіл зображено на рис. 4.

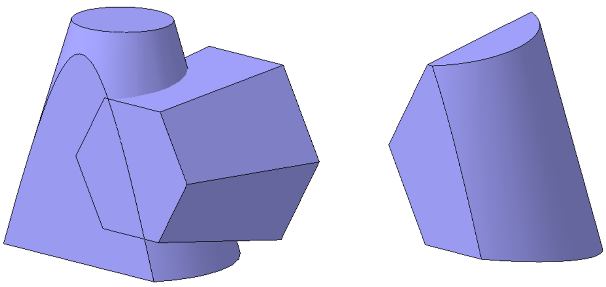


Рис. 4. Перетин двох тіл

Перетин двох тіл має такі властивості:

а) ідемпотентність перетину: $A \cap A = A$;

б) комутативність перетину: $A \cap B = B \cap A$;

в) асоціативність перетину: $\left(A \cap B\right) \cap C = A \cap \left(B \cap C\right)$;

г) $A \cap \varnothing = A$.

Доведення:

• Візьмемо $x \in A \cap A \leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \leftrightarrow x \in A$.
Відповідно, $A \cap A = A$.

• Візьмемо $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \leftrightarrow x \in B \cap A$.
Як наслідок, $A \cap B = B \cap A$.

• Візьмемо

$$x \in \left(A \cap B\right) \cap C \leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \in C \leftrightarrow \left(x \in A \wedge x \in B\right) \wedge x \in C \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in A \wedge \left(x \in B \wedge x \in C\right) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cap C \leftrightarrow x \in A \cap \left(B \cap C\right).$$

Як наслідок, $\left(A \cap B\right) \cap C = A \cap \left(B \cap C\right)$.

• $x \in A \cap \varnothing \leftrightarrow x \in A \wedge x \in \varnothing \leftrightarrow x \in \varnothing$, $x \in \varnothing$ – тотожно неправдивий вислів.

4.3. Дистрибутивні закони

Нехай A, B, C – довільні тіла. Вони повинні підпорядковуватись законам:

а) дистрибутивність перетину відносно об'єднання

$$A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right);$$

б) дистрибутивність об'єднання відносно перетину

$$A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup C\right).$$

Доведення:

• Візьмемо

$$x \in A \cap \left(B \cup C\right) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \leftrightarrow x \in A \wedge \left(x \in B \vee x \in C\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B)\vee(x\in A \wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\leftrightarrow x\in(A\cap B)\vee x\in(A\cap C)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

• Візьмемо

$$x\in A\cup(B\cap C)\leftrightarrow x\in A\vee x\in B\cap C\leftrightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)\leftrightarrow x\in(A\cap B)\wedge x\in(A\cup C)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

4.4. Операція різності тіл

Різницею двох тіл А та В називається тіло $A\setminus B=\{x\mid x\in A\ \mathit{ta}\ x\notin B\}$.

Геометрично різницю двох тіл зображено на рис. 5.

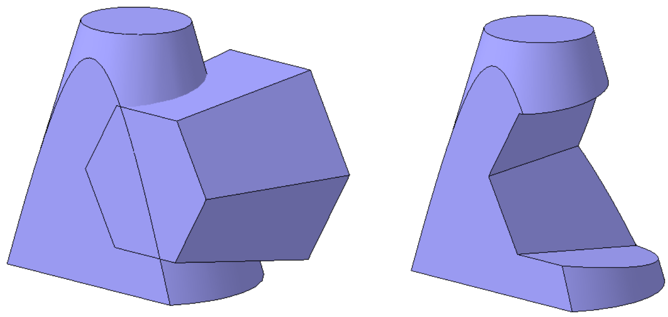


Рис. 5. Різниця двох тіл

Різниця двох тіл має такі властивості:

а) $A\setminus A=\varnothing$;

б) $A\setminus B=\varnothing\Leftrightarrow A\subseteq B$;

в) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$;

г) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$.

Доведення:

• Візьмемо

$x\in A\setminus A\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin A$ – – тотожно неправдивий вислів. Він рівносильний іншому тотожно неправдивому вислову $x\in\varnothing$, тому $A\setminus A=\varnothing$.

• Нехай $A\setminus B=\varnothing$. Візьмемо $x\in A$, якщо $A\setminus B=\varnothing$, то $x\notin A\setminus B$, значить, $x\in B$, тобто $A\subseteq B$.

• Візьмемо $x\in(A\cup B)\setminus C\leftrightarrow x\in A\cup B\wedge x\notin C\leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge x\notin C\leftrightarrow$
$\leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin C)\vee(x\in B\wedge x\notin C)\leftrightarrow x\in A\setminus C\vee x\in B\setminus C\leftrightarrow x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$;

• $x\in A\setminus(B\cup C)\leftrightarrow x\in A\wedge\overline{x\in B\cup C}\leftrightarrow x\in A\wedge\overline{x\in B\vee x\in C}\leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C\leftrightarrow$

$$\leftrightarrow(x\in A\setminus B)\wedge x\notin C\leftrightarrow x\in(A\setminus B)\setminus C.$$

4.5. Закони Моргана

а) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;

б) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

Доведення:

• Візьмемо $x\in A\setminus(B\cap C)\leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\cup C\leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\leftrightarrow$
$\leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\leftrightarrow x\in A\setminus B\wedge x\in A\setminus C\leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

• Візьмемо $x\in A\setminus(B\cap C)\leftrightarrow x\in A\wedge\overline{x\in B\cup C}\leftrightarrow x\in A\wedge\overline{x\in B\wedge x\in C}\leftrightarrow$
$\leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin B\vee x\notin C)\leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge x\notin C)\leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

5. Граматика моделювання

Розгляд математичного змісту моделі має сенс лише для правильних високоавтоматизованих параметричних моделей. Високоавтоматизованою параметричною моделлю будемо називати параметричну модель, числові значення основних параметрів якої можна змінюювати в інтерактивному режимі, в результаті чого вона автоматично перебудовується, а її геометричні розміри та форми не порушуються. При цьому вона повинна бути правильно структурована відносно ієрархічної структури, операції повинні мати необхідну кількість аргументів.

Мова високоавтоматизованих параметричних моделей описується граматикою <Е, А, x::=y>, де Е – множина елементів, А – множина операцій, x::=y – множина правил виводу [6].

У найпростішому випадку для операцій з об’ємними тілами правила виведення представляються таким чином:

<модель> ::= <елемент> | <модель> <операція> <елемент>

<операція> ::= ∪ | ∩ | –

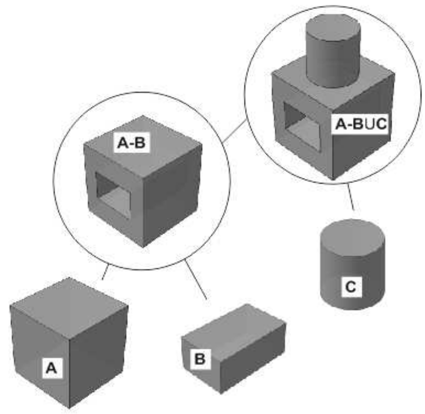


Рис. 6. Дерево побудови моделі

Подальше розширення приведеної граматики полягає у додаванні спеціальних операцій моделювання, включаючи створення оболонок, фасок, заокруглень, ребер жорсткості, масивів елементів та ін. В загальному випадку граматика моделювання неоднозначна або недетермінована. У розробленому автором інструментарії для навчаючих систем обрана правоасоціативна граматика.

Дерево виводу граматики моделювання визначає дерево моделі або дерево побудов виробу (див. рис. 6). Кореневий об’єкт дерева – сама модель, тобто деталь або виріб. Компоненти складальної одиниці – деталі та складальні одиниці – є самостійними моделями. Кожному листу в такому дереві відповідає компонент, а кожному вузлу – операція.

Вузлами дерева є тіла та операції з відповідними параметрами.

Однією із важливих характеристик дерева моделі є його степінь або максимальна арність операцій, які входять до його складу. При використанні вказаної граматики степінь дерева зазвичай буде більше двох. Такими деревами зручно оперувати при перетворенні моделей. Представлення моделей у вигляді бінарних дерев (степінь не більше двох) дозволяє ефективно виконувати найбільш вживану операцію – перебудову моделі.

6. Висновки

За результатами формалізації процесу моделювання було розроблено високорівневу мову опису процесу моделювання твердих тіл. За її допомогою реалізовані компоненти автоматизованої системи для навчання дисциплінам, насиченим інженерною графікою – підсистема генерації різних та рівноцінних завдань для індивідуальної роботи студентів; підсистема контролю правильності виконання виданих системою завдань.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование: учебник для учреждений высш. проф. образования / Голованов Н.Н. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 272 с.

2. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования / Норенков И.П. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 336 с.

3. http://www.ledas.com.

4. http://www.3ds.com/ru.

5. http://www.ptc.com.

6. Варсанофьев Д.В. Основы информатики и программирования: уч. пособ. / Д.В. Варсанофьев, А.Г. Дымченко; под ред. Е.А. Роганова. – М.: МГИУ, 2001. – 300 с.

Стаття надійшла до редакції 08.01.2013