

Вейвлет-анализ модельных сигналов с особенностями. 1. Непрерывное вейвлет-преобразование

О. В. Лазоренко, С. В. Лазоренко¹, Л. Ф. Черногор²

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники,
пр. Ленина, 14, г. Харьков, 61077, Украина,
E-mail: Oleg-Lazorenko@yandex.ru*

*¹Международный Славянский университет,
ул. Отакара Яроша, 9А, г. Харьков, 61086, Украина
E-mail: sergey_v@amik.ru*

*²Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, г. Харьков, Украина,
E-mail: Leonid.F.Chernogor@univer.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 11 апреля 2007 г.

Предлагается использовать непрерывное вейвлет-преобразование (НВП) для изучения структуры сигналов с особенностями. С помощью аналитических и численных методов выполнен вейвлет-анализ простых вещественных моделей сигналов с особенностями во временной области. Проведено сравнение полученных результатов с результатами динамического преобразования Фурье (ДПФ). Результаты НВП и ДПФ представлены в специальном формате, который рекомендуется исследователям. Показаны преимущества использования вейвлетов для анализа сигналов с особенностями. С помощью комплексного функционала качества произведен выбор оптимального вейвлетного базиса для каждой конкретной модели сигнала при НВП.

Введение

В последние годы различные типы вейвлет-преобразований находят все большее применение для анализа как традиционных, так и новых видов сигналов (фрактальных, сверхширокополосных, прямохаотических и др.) в различных областях науки и техники [1-14]. Одним из преимуществ вейвлет-преобразований перед традиционными методами, основанными на преобразовании Фурье, является уникальная возможность анализа сигналов с особенностями. Это связано со способностью вейвлет-анализа “уравнивать шансы” обнаружения вариаций с различными частотно-временными масштабами. Отдельные сведения о результатах анализа сигналов с особенностями можно найти, например,

в работах [1-9]. Однако целенаправленного и систематического изучения этого вопроса, по-видимому, не проводилось. Этим обуславливается актуальность настоящей работы.

Целью работы является изложение результатов применения непрерывного вейвлет-преобразования (НВП) для анализа модельных сигналов с особенностями, а также описание выявленных основных возникающих закономерностей и выработанных рекомендаций по практическому изучению реальных временных рядов, содержащих сигналы такого рода.

В работе впервые аналитическими и численными методами проведен вейвлет-анализ достаточно полного набора сигналов с особенностями, которые часто встречаются при решении практических задач. По-

казана эффективность НВП при исследовании сигналов такого рода. Систематизированные результаты вейвлет-анализа ряда модельных сигналов с особенностями разного типа предложено использовать специалистам в области обработки сигналов. Они позволят проводить более корректную и полную интерпретацию результатов вейвлет-анализа реальных сигналов в различных прикладных задачах.

1. Основные понятия и соотношения

Некоторые примеры вейвлет-анализа сигналов с особенностями можно найти, в частности, в [1, 3]. На наш взгляд, наиболее удачно этот вопрос осветили авторы [2]. Отдельную сложную задачу, которой мы не будем касаться, представляет собой определение характера особенности с помощью количественного критерия. Одним из возможных путей ее решения может служить вычисление локальных показателей Липшица по модулю вейвлет-коэффициентов непрерывного вейвлет-преобразования (см., например, [1]).

Сигналы с особенностями как естественного, так и искусственного происхождения достаточно часто встречаются в различных областях науки и техники. Например, особенности типа “резкий скачок амплитуды” и “вертикальный перегиб” имеют непосредственное отношение к ударным волнам. Производная δ -функции является, по сути дела, предельным случаем сверширокополосного (СШП) сигнала. Особенность “резкий скачок фазы гармонического сигнала” может быть полезна, например, при анализе сигналов, использующих код Баркера и др.

В настоящей работе мы расширим как набор исследуемых сигналов с особенностями, так и количество методов их описания. Мы будем использовать непрерывное вейвлет-преобразование (см., например, [1-9]), результаты которого будут сравниваться с аналогичными результатами оконного преобразования Фурье (см., например, [1-9]).

В качестве моделей сигналов с особенностями выберем следующие функции.

1) Бесконечно короткий импульс (δ -функция Дирака):

$$f(t) = A\delta(t - t_0). \quad (1)$$

2) Импульс конечной ширины:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon], \\ A/(2\varepsilon), & t \in [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon], \end{cases} \quad (2)$$

где A и ε – амплитуда и полуширина импульса соответственно. При $\varepsilon \rightarrow 0$ эта функция превращается в δ -функцию.

3) Наложение импульсной помехи на гармонический сигнал:

$$f(t) = A\delta(t - t_0) + B \sin \omega_0 t. \quad (3)$$

4) Резкий скачок амплитуды:

$$f(t) = A\Theta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ A, & t \geq t_0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\Theta(t)$ – функция Хэвисайда. Такая модель хорошо описывает идеальную ударную волну (см., например, [15-17]).

5) Резкий скачок фазы гармонического сигнала:

$$f(t) = \begin{cases} A \sin \omega_0 t, & t < t_0, \\ A \sin(\omega_0 t + \Delta\varphi), & t \geq t_0. \end{cases} \quad (5)$$

6) Резкий скачок частоты гармонического сигнала:

$$f(t) = \begin{cases} A \sin \omega_0 t, & t < t_0, \\ A \sin[\omega_1(t - t_0) + \omega_0 t_0 (1 - F(\omega_0, \omega_1))], & t \geq t_0, \end{cases} \quad (6)$$

где $F(\omega_0, \omega_1) = 1 - \frac{1}{\omega_0 t_0} \arccos\left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \cos \omega_0 t_0\right)$.

Достоинством этой модели является то, что производная $f'(t)$ оказывается непрерывной всюду, в том числе и в точке $t = t_0$, что позволяет разделить эффекты, возникающие при скачках фазы и производной.

7) Излом:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ A(t - t_0), & t_0 \leq t \leq t_1, \\ A(t_1 - t_0), & t > t_1. \end{cases} \quad (7)$$

8) Производная δ -функции:

$$f(t) = A\delta'(t - t_0). \quad (8)$$

9) Сумма производной δ -функции и гармонического сигнала:

$$f(t) = A\delta'(t - t_0) + B \sin \omega_0 t. \quad (9)$$

10) Вертикальный перегиб:

$$f(t) = A\sqrt[3]{t - t_0}. \quad (10)$$

Достаточно близко к этой модели приближаются модели нелинейных волновых процессов, в частности, ударных волн, кинка и антикинка, вейвлет-анализ которых проведен в [10].

11) Шпиль:

$$f(t) = A\sqrt{|t - t_0|}. \quad (11)$$

12) Наложение шпиля на гармонический сигнал:

$$f(t) = A\sqrt{|t - t_0|} + B \sin \omega_0 t. \quad (12)$$

2. Непрерывное вейвлет-преобразование модельных сигналов

2.1. Основные понятия и определения

Непрерывное вейвлет-преобразование (НВП) сигнала $f(t)$, как известно (см., например, [1]), задается соотношением:

$$Wf(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (13)$$

где $\psi(t)$ – вещественная вейвлетобразующая функция, часто называемая просто вейвлетом; a – параметр масштабирования; b – параметр сдвига.

Результаты применения НВП для анализа сигналов с особенностями будем сравнивать с результатами динамического (оконного) преобразования Фурье (ДПФ), которое (см., например, [1-9]) имеет вид:

$$\dot{S}f(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) w(t - \tau) e^{-i\omega t} dt, \quad (14)$$

где $w(t)$ – оконная функция (ОФ). Для сравнения с НВП в функции спектральной плотности (ФСП) ДПФ $\dot{S}f(\omega, \tau)$ удобно заменить частоту ω на период $T = 2\pi/\omega$, поскольку параметр масштабирования a непосредственно связан с периодом соотношением $a = kT$, где k – коэффициент пропорциональности ($k > 0$), зависящий от выбранной функции $\psi(t)$. В частности, для применяемых ниже МНАТ-вейвлета (mexh) и вейвлета Гаусса (gaus1) первого порядка имеем $k \approx 0.25$ и $k \approx 0.20$ соответственно.

Для анализа сигналов удобно использовать следующие их характеристики (см., например, [12]): вейвлет-спектр $Wf(a, b)$, его модуль $|Wf(a, b)|$, плотность энергии сигнала $P_w f(a, b)$, скелетон, энергограмму и дисперсию модуля вейвлет-коэффициентов.

Плотность энергии сигнала задается соотношением [1, 3]:

$$P_w f(a, b) = |Wf(a, b)|^2.$$

Некоторые авторы зависимость $P_w f(a, b)$ называют скэйлограммой [1]. Ее аналог для ДПФ – спектрограмма [1]:

$$P_s f(T, \tau) = |\dot{S}f(T, \tau)|^2.$$

Под скелетоном поверхности в пространстве понимают картину линий, соединяющих локальные экстремумы (отдельно минимумы и максимумы) этой поверхнос-

ти [3]. В настоящей работе мы будем использовать скелетоны модуля вейвлет-коэффициентов $|Wf(a,b)|$ и модуля ФСП ДПФ $|\dot{S}f(T,\tau)|$. Разумеется, в этом случае линии локальных максимумов и локальных минимумов оказываются неразличимыми.

Под энергограммой НВП будем понимать интеграл [3]:

$$E_w f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |Wf(a,b)|^2 db = \int_{-\infty}^{\infty} P_w f(a,b) db.$$

По нашему мнению, эту величину не следует именовать скалограммой, как ранее делали некоторые авторы (см., например, [3, 12]), поскольку возникает определенная путаница. Слово “скалограмма” и похожее на него “скэйлограмма” являются русским написанием одного и того же английского слова “scalogram”, хотя и обозначают разные величины. В работе [3] для $E_w f(a)$ употребляется термин “глобальный спектр энергии”, который не прижился в литературе.

Энергограмма представляет собой распределение полной энергии сигнала E . Последняя связана с энергограммой следующим соотношением:

$$E = \int_0^{\infty} E_w f(a) \frac{da}{a^2},$$

где интегрирование производится по всем масштабам a . Положение максимумов на $E_w f(a)$ можно интерпретировать как средний период элементарных событий, вносящих основной вклад в энергию анализируемого процесса [3].

С энергограммой мы будем сравнивать характеристику, построенную по аналогичному принципу из спектрограммы ДПФ:

$$E_s f(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}f(T,\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} P_s f(T,\tau) d\tau.$$

Последняя при интегрировании по $\omega=2\pi/T$ также дает полную энергию сигнала [11]:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_s f(\omega) d\omega.$$

Для краткости будем называть ее энергограммой Фурье.

Представляется также полезным рассмотрение дисперсий $|Wf(a,b)|$ и $|\dot{S}f(T,\tau)|$:

$$D_w f(a) = \frac{1}{b_{\max} - b_{\min}} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} [|Wf(a,b)| - \langle |Wf(a,b)| \rangle]^2 db,$$

$$\begin{aligned} \langle |Wf(a,b)| \rangle &= \\ &= \frac{1}{(a_{\max} - a_{\min})(b_{\max} - b_{\min})} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} |Wf(a,b)| da db, \end{aligned}$$

$$D_s f(T) = \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} [|\dot{S}f(T,\tau)| - \langle |\dot{S}f(T,\tau)| \rangle]^2 d\tau,$$

$$\begin{aligned} \langle |\dot{S}f(T,\tau)| \rangle &= \\ &= \frac{1}{(T_{\max} - T_{\min})(\tau_{\max} - \tau_{\min})} \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} |\dot{S}f(T,\tau)| dT d\tau, \end{aligned}$$

где a_{\max} , a_{\min} , b_{\max} и b_{\min} – максимальные и минимальные значения параметров a и b , при использовании которых вычисляется реальный вейвлет-спектр $Wf(a,b)$; T_{\max} , T_{\min} , τ_{\max} и τ_{\min} – максимальные и минимальные значения параметров T и τ , при использовании которых вычисляется ФСП ДПФ $\dot{S}f(T,\tau)$.

Указанные дисперсии описывают вклад компонент различных масштабов в исследуемый сигнал, вычисленный иным способом, чем соответственно в энергограммах $E_w f(a)$ и $E_s f(T)$.

Результаты анализа с использованием упомянутых выше характеристик будут представлены в специальном формате, который успешно применялся нами в работе [11]. В нем для удобства сравнения результатов НВП и ДПФ во всех числовых характеристиках параметр масштабирования a заменяется на период T ($a = kT$), а параметр сдвига – на переменную времени τ ($b = \tau$).

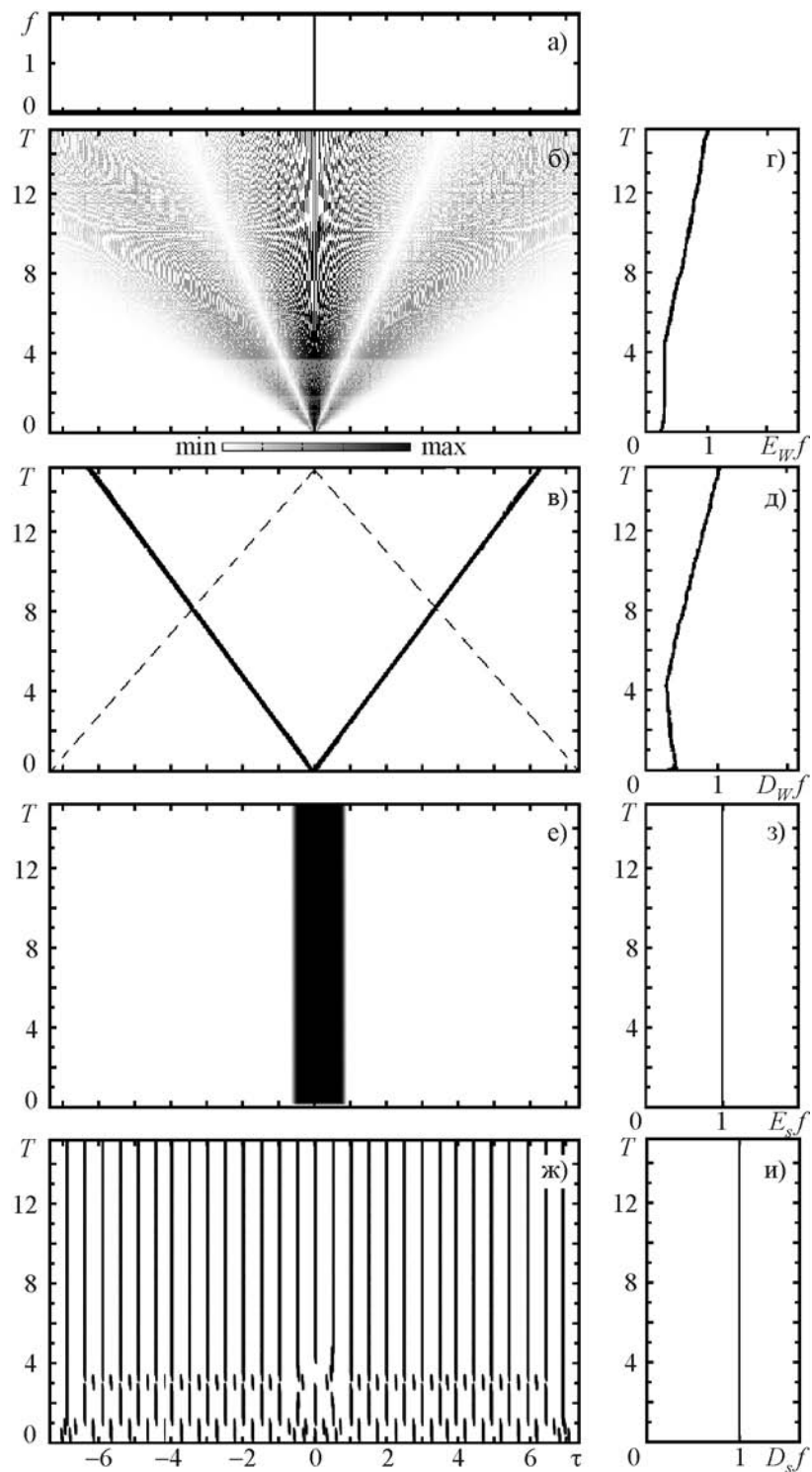


Рис. 1. Спектральные характеристики бесконечно короткого импульса: а) $f(t)$ – сигнал во временной области; б) – модуль вейвлет-коэффициентов $|Wf(T, \tau)|$, полученный с использованием вейвлета $texh$; в) – скелетон; г) – энергограмма $E_W f(T)$; д) – дисперсия модуля вейвлет-коэффициентов $D_W f(T)$; е) – модуль ФСП ДПФ $|Sf(T, \tau)|$; ж) – скелетон ФСП ДПФ; з) – энергограмма Фурье $E_S f(T)$; и) – дисперсия модуля коэффициентов ФСП ДПФ $D_S f(T)$. Здесь и далее пунктирной линией показан угол правдоподобия

Рассмотрим используемый формат подробнее на примере рис. 1. В верхней половине рисунка приводятся исследуемый сигнал $f(t)$ и результаты его НВП. Под графиком сигнала $f(t)$ (рис. 1, а) показан модуль его вейвлет-коэффициентов $|Wf(T, \tau)|$ (рис. 1, б). Будучи функцией двух переменных, графический образ $|Wf(T, \tau)|$ представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Ее проекция на плоскость выполнена в градациях серого цвета. Белый цвет соответствует нулевому, а черный – максимальному значению функции $|Wf(T, \tau)|$. Справа от этого графика изображена энергограмма сигнала $E_w f(T)$ (рис. 1, г), а снизу – скелетон (рис. 1, в). Справа от скелетона показана дисперсия модуля вейвлет-коэффициентов сигнала $D_w f(T)$ (рис. 1, д). В нижней половине рисунка в аналогичном порядке приведены результаты ДПФ исследуемого сигнала $f(t)$. Это модуль ФСП ДПФ $|\hat{S}(T, \tau)|$ (рис. 1, е), его скелетон (рис. 1, ж), энергограмма $E_s f(T)$ (рис. 1, з) и дисперсия модуля коэффициентов ФСП ДПФ $D_s f(T)$ (рис. 1, и). Используемое взаимное расположение графиков позволяет проводить сравнение соответствующих характеристик, получаемых в результате НВП и ДПФ исследуемого сигнала.

Необходимо обратить внимание на особенности проведения численных расчетов интеграла (13). Поскольку вместо определенного на всей числовой оси сигнала $f(T)$ используется его дискретный аналог в виде вектор-строки конечной размерности, на вейвлет-спектрограмме и в соответствующих ей скелетоне, энергограмме и дисперсии модуля вейвлет-коэффициентов возникают краевые эффекты. Для описания их влияния вводится угол правдоподобия. Внутри этого угла, как известно, краевые эффекты проявляться не могут, поскольку каждая особенность, в том числе и возникающая на краях анализируемого сигнала, оказывает лишь локальное воздействие на вейвлет-спектрограмму и скелетон (внутри соответствующего конуса влияния) [1]. Исключить воздействия краевых эффектов на энергограммы и дисперсии модуля коэффициентов, к сожалению, не представляется возможным.

2.2. Результаты аналитических расчетов

К сожалению, для подавляющего большинства сигналов и вейвлетов интеграл (13) аналитически вычислен быть не может. Тем более интересными оказываются случаи, когда $Wf(a, b)$ все же удастся получить аналитически.

Аналитическое описание модельных сигналов с особенностями целесообразно проводить с помощью вейвлета, который сам по себе не содержит рассматриваемых особенностей. Для этого он вместе со своей по крайней мере первой производной должен быть непрерывным во всей области определения. По этой причине не подходит, например, простой и удобный вейвлет Хаара (haar по терминологии системы компьютерной математики MATLAB), который в некоторых точках не удовлетворяет требованию непрерывности.

Приведенные ниже аналитические расчеты проведены для вейвлета Гаусса первого порядка (gaus1), который определяется соотношением (см., например, [8]):

$$\psi(t) = -t \exp(-t^2).$$

Для ряда моделей удастся получить в явном виде выражение для вейвлет-спектра $Wf(a, b)$, а для некоторых – и выражение для скелетона.

Рассмотрим их подробнее.

1) Бесконечно короткий импульс:

$$Wf(a, b) = A \frac{b - t_0}{a^{3/2}} \exp(-t_{0b}^2), \quad t_{0b} = \frac{t_0 - b}{\sqrt{2a}}.$$

$$\text{Скелетон имеет вид: } a = \begin{cases} -(b - t_0), & b < t_0; \\ b - t_0, & b \geq t_0. \end{cases}$$

2) Импульс конечной ширины:

$$Wf(a, b) = -A \frac{a^{1/2}}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2a^2} - t_{0b}^2\right) \text{sh} \frac{\varepsilon t_{0b}}{\sqrt{2a}}.$$

$$\text{Скелетон: } a = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon(t_0 - b)}{\ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{t_0 - b - \varepsilon/2}\right)}}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ для вейвлет-спектра и скелетона получаем предельный переход к результатам предыдущей модели.

3) Наложение импульсной помехи на гармонический сигнал:

$$Wf(a, b) = A \frac{b-t_0}{a^{3/2}} \exp(-t_{ab}^2) - \sqrt{2\pi} B \omega_0 a^{3/2} \times \exp(-\omega_{0a}^2) \cos \omega_0 b, \quad \omega_{0a}^2 = \frac{\omega_0^2 a^2}{2}.$$

Скелетон, в частности, состоит из куста на фоне эквидистантных вертикальных полос: $a = \begin{cases} -(b-t_0), & b < t_0, \\ b-t_0, & b \geq t_0 \end{cases}$ и $b = \pi n / \omega_0$, где $n \in \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} – множество целых чисел. Следует отметить, что скелетон суммы импульсной помехи и гармонического сигнала не является простой их суперпозицией. Он имеет более сложный вид.

4) Резкий скачок амплитуды:

$$Wf(a, b) = -Aa^{1/2} \exp(-t_{0b}^2).$$

Скелетон имеет простой вид: $b = t_0$. Это характерная вертикальная полоса.

5) Резкий скачок фазы гармонического сигнала:

$$Wf(a, b) = -\sqrt{2\pi} A \omega_0 a^{3/2} \exp(-\omega_{0a}^2) \cos(\omega_{0b}) - \sqrt{2a} A \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \times [\sin(\omega_{0b}) \operatorname{Re} \Phi(\tilde{t}_0) + \cos(\omega_{0b}) \operatorname{Im} \Phi(\tilde{t}_0)],$$

$$\omega_{0b} = \omega_0 b + \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \tilde{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{t_0 - b}{a} + \frac{i}{\sqrt{2}} \omega_0 a.$$

6) Резкий скачок частоты гармонического сигнала:

$$Wf(a, b) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} A a^{3/2} [\omega_0 \exp(-\omega_{0a}^2) \cos \omega_0 b + \omega_1 \exp(-\omega_{1a}^2) \cos \omega_1 b] -$$

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} A a^{3/2} [\omega_0 \exp(-\omega_{0a}^2) (\cos \omega_0 b \operatorname{Re} \Phi(\tilde{t}_0) - \sin \omega_0 b \operatorname{Im} \Phi(\tilde{t}_0)) - \omega_1 \exp(-\omega_{1a}^2) \times (\cos(\omega_1 b + (\omega_0 - \omega_1)t_0 - \omega_0 t_0 F(\omega_0, \omega_1)) \operatorname{Re} \Phi(\tilde{t}_1) - \sin(\omega_1 b + (\omega_0 - \omega_1)t_0 - \omega_0 t_0 F(\omega_0, \omega_1)) \operatorname{Im} \Phi(\tilde{t}_1))] + 2\sqrt{a} A \exp(-t_{0b}^2) \sin \frac{F(\omega_0, \omega_1)}{2} \cos\left(\omega_0 t_0 - \frac{F(\omega_0, \omega_1)}{2}\right)$$

$$\text{Здесь } \omega_{1a}^2 = \frac{\omega_1^2 a^2}{2}, \quad \tilde{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{t_0 - b}{a} + \frac{i}{\sqrt{2}} \omega_1 a,$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

7) Скачок производной:

$$Wf(a, b) = Aa^{3/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\Phi(t_{1b}) - \Phi(t_{0b})],$$

$$\text{где } t_{1b} = \frac{t_1 - b}{\sqrt{2a}}.$$

Скелетон задается соотношением $b = (t_0 + t_1)/2$ и представляет собой вертикальную полосу в средней точке между двумя изломами. При $t_1 \rightarrow \infty$, что соответствует наличию одного излома, выражение упрощается:

$$Wf(a, b) = Aa^{3/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [1 - \Phi(t_{0b})].$$

Частная производная этой функции по переменной b оказывается отрицательной, и на скелетоне нет ни одной линии.

8) Производная δ -функции:

$$Wf(a, b) = -\frac{A}{a^{3/2}} (1 - 2t_{0b}^2) \exp(-t_{0b}^2).$$

$$\text{Скелетон: } b = t_0, \quad a = \begin{cases} -\frac{b-t_0}{\sqrt{3}}, & b < t_0, \\ \frac{b-t_0}{\sqrt{3}}, & b \geq t_0. \end{cases}$$

9) Наложение производной δ -функции на гармонический сигнал:

$$Wf(a, b) = -\frac{A}{a^{3/2}}(1 - 2t_{0b}^2) \exp(-t_{0b}^2) - \sqrt{2\pi} B \omega_0 a^{3/2} \exp(-\omega_{0a}^2) \cos \omega_0 b.$$

Скелетон состоит, в частности, из вертикальных полос $b = \pi n / \omega_0$, где $n \in \mathbb{Z}$, характерных для гармонической функции, и собственного производной δ -функции куста:

$$b = t_0, \quad a = \begin{cases} -\frac{b-t_0}{\sqrt{3}}, & b < t_0, \\ \frac{b-t_0}{\sqrt{3}}, & b \geq t_0, \end{cases}$$

хотя, как уже было сказано относительно модели (2), в целом картина оказывается более сложной.

Для моделей (5) и (6) не удалось получить в аналитическом виде выражения для скелетона, а для моделей (10), (11) и (12) – выражения для вейвлет-спектра. Поэтому дальнейшие исследования будем проводить численными методами.

2.3. Результаты численных расчетов

Модельные сигналы с особенностями (1) – (12) проанализированы с помощью симметричного МНАТ-вейвлета (mexh) и ДПФ. Результаты расчетов приведены на рис. 1 – 12 соответственно. Следует обратить внимание, что на графиках энергограмм и дисперсий по горизонтальным осям отложены нормированные на максимум значения соответствующих величин.

Кроме того, для моделей сигналов с особенностями получены параметры, которые в [13] были вычислены для используемых здесь вейвлетов. К ним относятся: μ – показатель широкополосности, γ_1 – относительное положение максимума ФСП, γ_2 – относительное положение первого нуля, γ_3 и γ_4 – ширина ФСП по уровню 3 и 6 дБ соответственно, γ_5 и γ_6 – потери информации, γ_7 – когерентное усиление, γ_8 – эквивалентная шумовая полоса, γ_9 – максимальный уровень боковых лепестков. Результаты расчетов этих параметров для всех модельных сигналов приведены в табл. 1.

К сожалению, не представляется возможным получить данные характеристики для моделей сигналов с особенностями, в состав которых входят δ -функция и ее первая производная. Это связано с тем, что модуль

Таблица 1. Параметры модельных сигналов с особенностями

Параметры	Модели сигналов с особенностями						
	$f_2(t)$	$f_4(t)$	$f_5(t)$	$f_6(t)$	$f_7(t)$	$f_{10}(t)$	$f_{11}(t)$
μ	2.00	2.00	0.11	0.27	2.00	1.33	2.00
γ_1	0.00	0.00	1.00	0.95	0.00	0.94	0.00
γ_2	2.80	2.82	1.13	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
γ_3	1.25	1.14	0.05	0.18	0.87	0.11	0.89
γ_4	1.68	1.70	0.09	0.24	1.50	1.05	1.52
$-\gamma_5$, дБ	1.72	2.50	3.75	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\gamma_6$, дБ	2.30	2.49	2.33	1.27	2.55	1.17	5.87
γ_7	1.00	1.00	0.64	0.64	0.67	0.75	0.33
γ_8	1.00	1.00	1.23	1.23	1.25	1.07	1.50
$-\gamma_9$, дБ	6.70	6.72	10.24	34.79	30.09	27.03	40.01

их ФСП преобразования Фурье не убывает с ростом частоты.

Для оценки удачности выбора вейвлетного базиса при анализе конкретного сигнала с особенностью используется комплексный функционал качества, который был предложен в [10] и имеет вид:

$$J(f_1, f_2) = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{\gamma_i(f_1) - \gamma_i(f_2)}{\gamma_i(f_2)} \right)^2,$$

где под f_1 понимается выбранная вейвлетобразующая функция $\psi(t)$, а под f_2 – анализируемый сигнал $f(t)$, $\gamma_{10} \equiv \mu$. Оптимальному выбору базиса соответствует минимальное значение данного функционала. Результаты расчетов функционала качества для каждой модели сигнала с особенностями приведены в табл. 2.

Отметим, что вейвлет Хаара (haar) оказался предпочтителен для проведения НВП аперидических сигналов, имеющих разрывы непрерывности самого сигнала и его первой производной типа “скачок”. Вейвлеты db2 и sym2 хорошо показали себя при анализе сигналов с особенностями типа “шпиль”, “вертикальный перегиб”, а также гармонического сигнала со скачком частоты. Изучать гармонический сигнал со скачком фазы лучше всего с помощью вейвлета Морле (morl).

Таким образом, каждой особенности сигнала соответствуют характерный вид возмущения в вейвлет-спектре и уникальный вид скелетона. Набор (каталог) характерных видов возмущений и соответствующих им скелетонов позволяет распознать особенности в реальных (не модельных) сигналах.

3. Обсуждение результатов

НВП дает хорошие возможности для обнаружения и различения имеющихся в сигнале особенностей. Обнаружение локальной особенности сигнала удобно проводить с помощью модуля вейвлет-коэффициентов, а различение на качественном уровне – по внешнему виду скелетона. Более точное количественное описание классификации

обнаруженной особенности является самостоятельной сложной задачей и может быть проведено, например, с помощью анализа поведения скелетона с применением локальных показателей Липшица (см., например, [1]).

ДПФ, как и ожидалось, при анализе сигналов с особенностями уступает по своим возможностям НВП, поскольку по сравнению с ним не обладает достаточным частотно-временным разрешением.

Необходимо также отметить, что, как было сказано выше, при численном моделировании в системе MATLAB на самом деле используется не непрерывный сигнал $f(t)$, а его дискретный аналог в виде вектор-строки конечной длины. Это приводит к появлению нескольких важных последствий.

Во-первых, δ -функция и ее первая производная моделируются с помощью вектор-строки с одним и двумя ненулевыми отсчетами соответственно. “Муар”, возникающий на вейвлет-спектрограммах сигналов, в состав которых входят δ -функция и ее первая производная, физического смысла не имеет, а связан лишь с тем, что эти функции, имеющие нулевую ширину и бесконечную амплитуду, заменяются, по сути дела, на прямоугольные импульсы конечной ширины. В этом можно убедиться, посмотрев на приведенный выше вид аналитического вычисления интеграла (13) для δ -функции и ее первой производной.

Во-вторых, на вейвлет-спектрограммах, скелетонах, энергограммах и дисперсиях модуля вейвлет-коэффициентов неизбежно сказываются краевые эффекты. Для вейвлет-спектрограмм и скелетонов это не является особенно критичным. Поскольку НВП носит локальный характер, краевые эффекты не могут проявляться внутри угла правдоподобия, показанного штрихованной линией на скелетонах НВП. За пределами этого угла к результатам НВП следует относиться с определенной осторожностью. В то же время на энергограммах и дисперсиях модуля вейвлет-коэффициентов краевые эффекты, по-видимому, устранить нельзя.

С учетом сказанного выше подробнее рассмотрим полученные результаты. Так, при

Таблица 2. Функционал качества $J(f_1, f_2)$ модельных сигналов с особенностями при разложении по базисам вейвлетов Хаара, Добеши, Симлета, койфлетов, вейвлетов Гаусса, Морле и Мейера

Вейвлеты	Модели сигналов с особенностями						
	$f_2(t)$	$f_4(t)$	$f_5(t)$	$f_6(t)$	$f_7(t)$	$f_{10}(t)$	$f_{11}(t)$
haar (db1)	1.53	1.72	765.4	70.45	4.40	74.76	8.75
db2	6.63	4.44	455.4	47.02	5.13	46.37	4.27
db3	19.23	11.75	382.5	50.51	8.13	54.13	5.04
db4	35.42	21.16	346.2	61.25	11.91	69.67	5.84
db5	49.58	28.42	319.1	56.84	12.62	66.58	6.58
db6	68.30	38.99	311.9	66.52	15.78	79.14	7.48
db7	88.55	50.43	305.5	76.73	19.11	92.29	8.43
db8	105.4	58.52	302.9	71.63	18.82	87.14	8.85
db9	125.9	69.24	302.1	75.79	20.47	93.21	9.43
db10	148.4	81.24	304.6	82.80	22.73	102.4	10.13
sym2	6.64	4.45	453.4	46.74	5.13	46.37	4.27
sym3	19.16	11.72	385.6	50.53	8.13	55.13	5.04
sym4	40.18	25.92	354.2	64.49	14.71	74.69	7.65
sym5	55.92	34.76	324.6	61.00	16.40	72.01	9.05
sym6	82.83	53.51	319.0	75.41	24.55	91.64	13.26
sym7	104.2	66.09	313.5	86.36	28.60	105.8	14.71
coif1	36.22	29.80	476.2	64.13	16.38	67.71	10.37
coif2	103.4	80.41	398.1	87.88	37.95	105.2	22.38
coif3	182.8	140.0	373.9	128.3	64.17	155.6	36.82
coif4	266.3	201.2	396.2	158.3	88.80	196.9	52.38
coif5	359.0	270.0	429.0	190.2	116.0	239.9	70.08
gaus1	19.54	17.56	749.3	156.5	14.57	122.8	5.75
gaus2	21.55	19.33	450.7	91.31	16.08	101.4	6.27
gaus3	20.32	18.41	313.7	71.36	15.02	81.78	6.43
gaus4	20.00	18.23	238.0	61.42	14.76	71.96	6.70
gaus5	20.04	18.31	191.5	56.49	14.79	66.93	6.86
gaus6	20.47	18.72	160.8	54.37	15.14	65.31	7.10
gaus7	20.90	19.09	139.5	54.37	15.47	65.13	7.19
gaus8	21.48	19.60	125.3	54.08	15.96	66.16	7.37
morl	34.46	33.00	89.78	51.15	23.43	65.00	13.43
mexh	31.36	19.51	442.2	83.52	15.51	92.01	6.87
meyr	67.25	61.6	295.6	156.5	52.45	190.5	21.37
dmey	388.7	383.8	502.0	351.3	252.6	454.5	159.5

анализе δ -функции (рис. 1, а) видно, что на ФСП ДПФ (рис. 1, е) наблюдается полоса, ширина которой равна ширине ОФ во временной области. Разумеется, конечность ширины полосы неадекватно описывает

реальную ситуацию, поскольку ширина δ -функции во временной области, как известно, равна нулю. Возможное сужение ширины ОФ при проведении ДПФ приводит к существенному ухудшению разрешения по вто-

рой координате, что при анализе реальных сигналов нежелательно. Более того, ФСП ДПФ в данном случае по внешнему виду мало чем отличается от ФСП ДПФ, полученной при анализе импульса конечной ширины (рис. 2, е). На ФСП ДПФ также плохо просматривается δ -функция и на фоне синусоиды (рис. 3, е). Практически неразличимы ФСП ДПФ резкого скачка амплитуды (рис. 4, е) и двух изломов (рис. 7, е). Плохо наблюдается на ФСП ДПФ производная δ -функции, причем как сама по себе (рис. 8, е), так и на фоне синусоиды (рис. 9, е). Не фиксируется также на ФСП ДПФ положение точки вертикального перегиба (рис. 10, е).

В некоторых случаях на помощь приходит скелетон ФСП ДПФ. Так, на рис. 9, ж и рис. 10, ж наличие и положение особенности в сигнале некоторым образом проявляется.

В то же время анализ вейвлет-спектрограммы в указанных случаях дает однозначный ответ по поводу наличия, положения и характера особенности.

Между тем было бы неверным преувеличивать достоинства НВП, преуменьшая при этом возможности ДПФ. Так ДПФ дает хорошие результаты при анализе скачков фазы (рис. 5), частоты (рис. 6), шпилья (рис. 11) и шпилья на фоне синусоиды (рис. 12). Это, скорее всего, связано с тем, что применение ДПФ вообще предпочтительно при анализе слабо локализованных во времени сигналов и процессов (например, узкополосных, широкополосных), а НВП – хорошо локализованных (в частности, СШП). Поэтому при анализе сигналов с особенностями рекомендуется совместное применение НВП и ДПФ. Пример этого показан в настоящей работе.

Полученные результаты имеют не только чисто теоретическое значение, но и достаточную практическую ценность. Большинство рассмотренных выше моделей сигналов с особенностями могут использоваться при описании реальных сигналов и процессов как искусственного, так и естественного происхождения.

Так, например, “резкий скачок амплитуды сигнала” и “вертикальный перегиб” полезны при описании идеальной и реальной ударных волн соответственно.

Известно, что δ -функция хорошо моделирует импульсную помеху, а ее первая производная является предельным случаем СШП сигнала, когда его длительность стремится к нулю. Сумма первой производной δ -функции и гармонической функции может выступать в виде модели сигнала, возникающего в случае, когда на СШП процесс накладывается какой-либо другой гармонический процесс. Такая ситуация наблюдается, например, при возникновении “волны-убийцы” на поверхности моря или реакции магнитного поля Земли на старт космического аппарата.

Особенность “резкий скачок фазы гармонического сигнала” представляет интерес при анализе сигналов с фазовой манипуляцией, использующих код Баркера и т. п.

Таким образом, НВП оказывается полезным при исследовании сигналов с особенностями.

Выводы

1. Для ряда простых вещественных моделей во временной области проведен вейвлет-анализ сигналов с особенностями с использованием НВП.

2. На новых моделях сигналов показано, что НВП является хорошим инструментом для обнаружения локальных особенностей сигналов. С помощью аналитических и численных методов получены вейвлет-спектры, скелетоны, энергограммы модельных сигналов, позволяющие осуществить классификацию их особенностей.

3. Для каждого модельного сигнала предложен оптимальный вейвлет при проведении НВП, выявленный с помощью введенного ранее авторами критерия минимизации функционала качества.

4. Результаты НВП сравнены с аналогичными результатами ДПФ. Показаны преимущества НВП перед ДПФ при анализе сигналов с особенностями. Результаты представлены в специально разработанном формате.

5. Результаты НВП модельных сигналов с особенностями позволят специалистам проводить более полную и корректную интерпретацию аналогичных результатов анализа реальных сигналов различной природы.

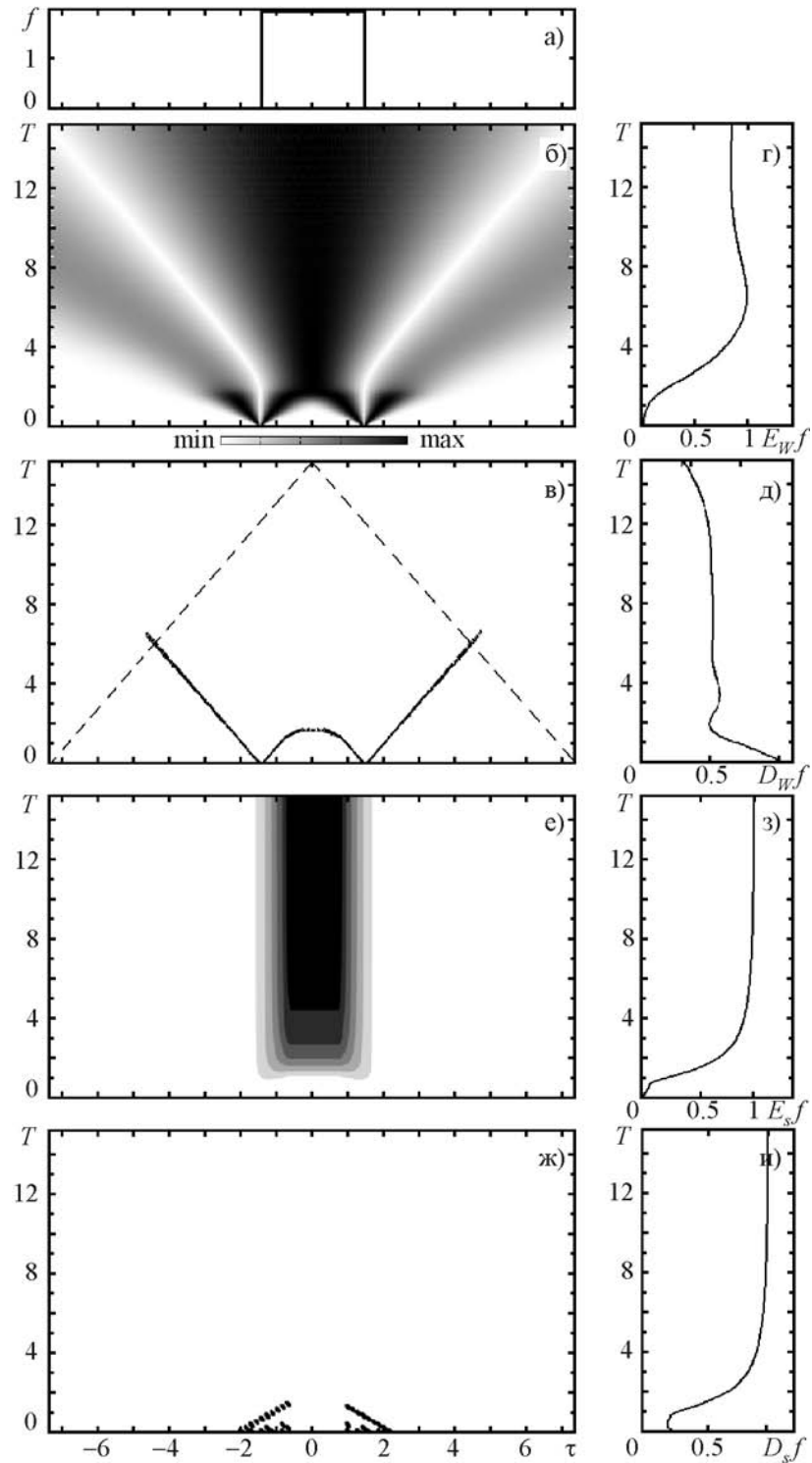


Рис. 2. Спектральные характеристики импульса конечной ширины: а) – сигнал $f(t)$ во временной области; б) – модуль вейвлет-коэффициентов $|Wf(T, \tau)|$, полученный с использованием вейвлета te^{ix} ; в) – скелетон, г) – энергограмма $E_W f(T)$; д) – дисперсия модуля вейвлет-коэффициентов $D_W f(T)$; е) – модуль ФСП ДПФ $|\hat{S}f(T, \tau)|$; ж) – скелетон ФСП ДПФ; з) – энергограмма Фурье $E_S f(T)$; и) – дисперсия модуля коэффициентов ФСП ДПФ $D_S f(T)$

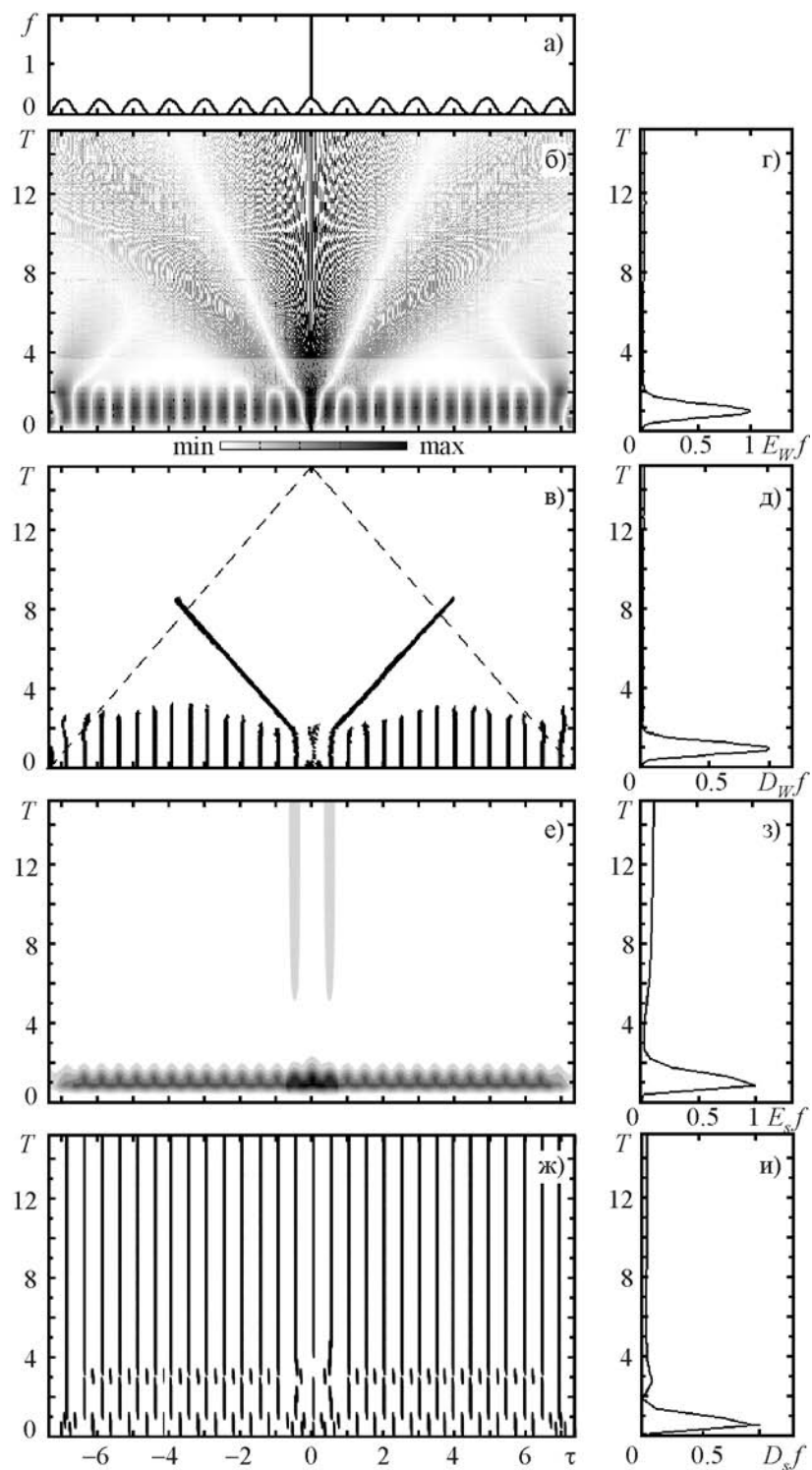


Рис. 3. Спектральные характеристики наложения импульсной помехи на гармонический сигнал: а) – сигнал $f(t)$ во временной области; б) – модуль вейвлет-коэффициентов $|Wf(T, \tau)|$, полученный с использованием вейвлета *tech*; в) – скелетон; г) – энергограмма $E_W f(T)$; д) – дисперсия модуля вейвлет-коэффициентов $D_W f(T)$; е) – модуль ФСП ДПФ $|\hat{S}f(T, \tau)|$; ж) – скелетон ФСП ДПФ; з) – энергограмма Фурье $E_S f(T)$; и) – дисперсия модуля коэффициентов ФСП ДПФ $D_S f(T)$

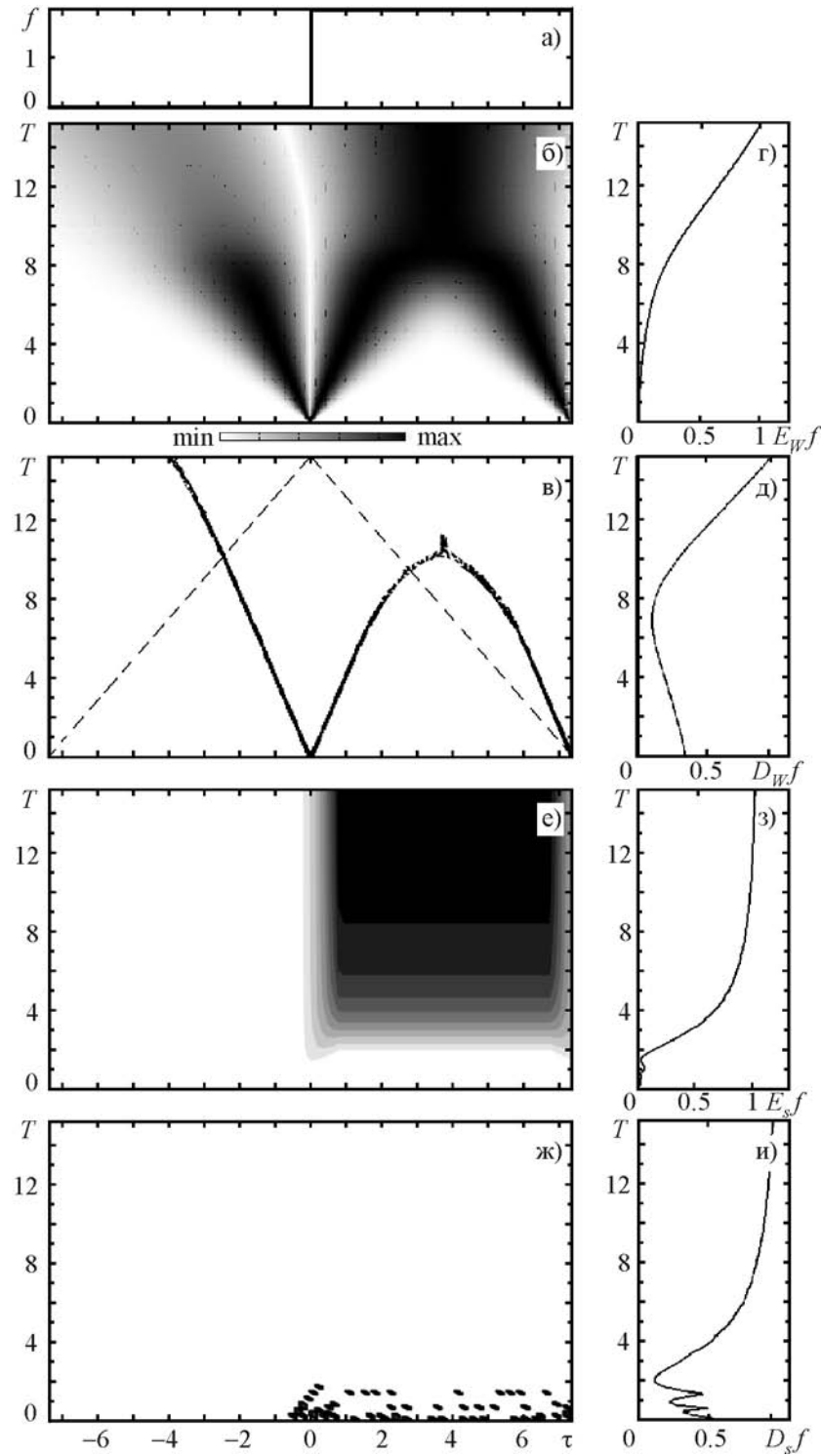


Рис. 4. Спектральные характеристики резкого скачка амплитуды: а) – сигнал $f(t)$ во временной области; б) – модуль вейвлет-коэффициентов $|Wf(T, \tau)|$, полученный с использованием вейвлета $texh$; в) – скелетон; г) – энергограмма $E_W f(T)$; д) – дисперсия модуля вейвлет-коэффициентов $D_W f(T)$; е) – модуль ФСП ДПФ $|\hat{S}f(T, \tau)|$; ж) – скелетон ФСП ДПФ; з) – энергограмма Фурье $E_S f(T)$; и) – дисперсия модуля коэффициентов ФСП ДПФ $D_S f(T)$

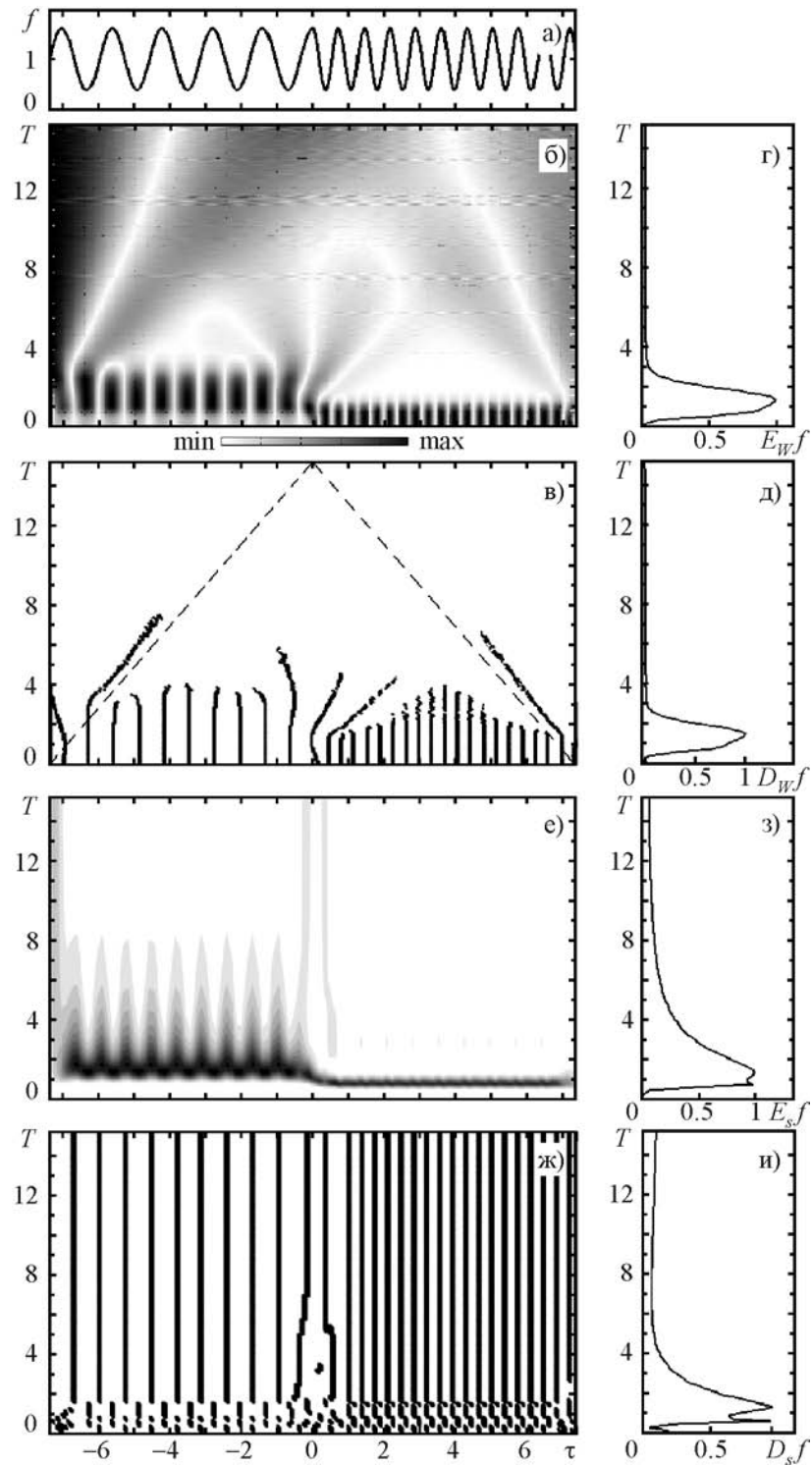


Рис. 5. Спектральные характеристики резкого скачка фазы гармонического сигнала: а) – сигнал $f(t)$ во временной области; б) – модуль вейвлет-коэффициентов $|Wf(T, \tau)|$, полученный с использованием вейвлета $tech$; в) – скелетон; г) – энергограмма $E_W f(T)$; д) – дисперсия модуля вейвлет-коэффициентов $D_W f(T)$; е) – модуль ФСП ДПФ $|\hat{S}f(T, \tau)|$; ж) – скелетон ФСП ДПФ; з) – энергограмма Фурье $E_S f(T)$; и) – дисперсия модуля коэффициентов ФСП ДПФ $D_S f(T)$

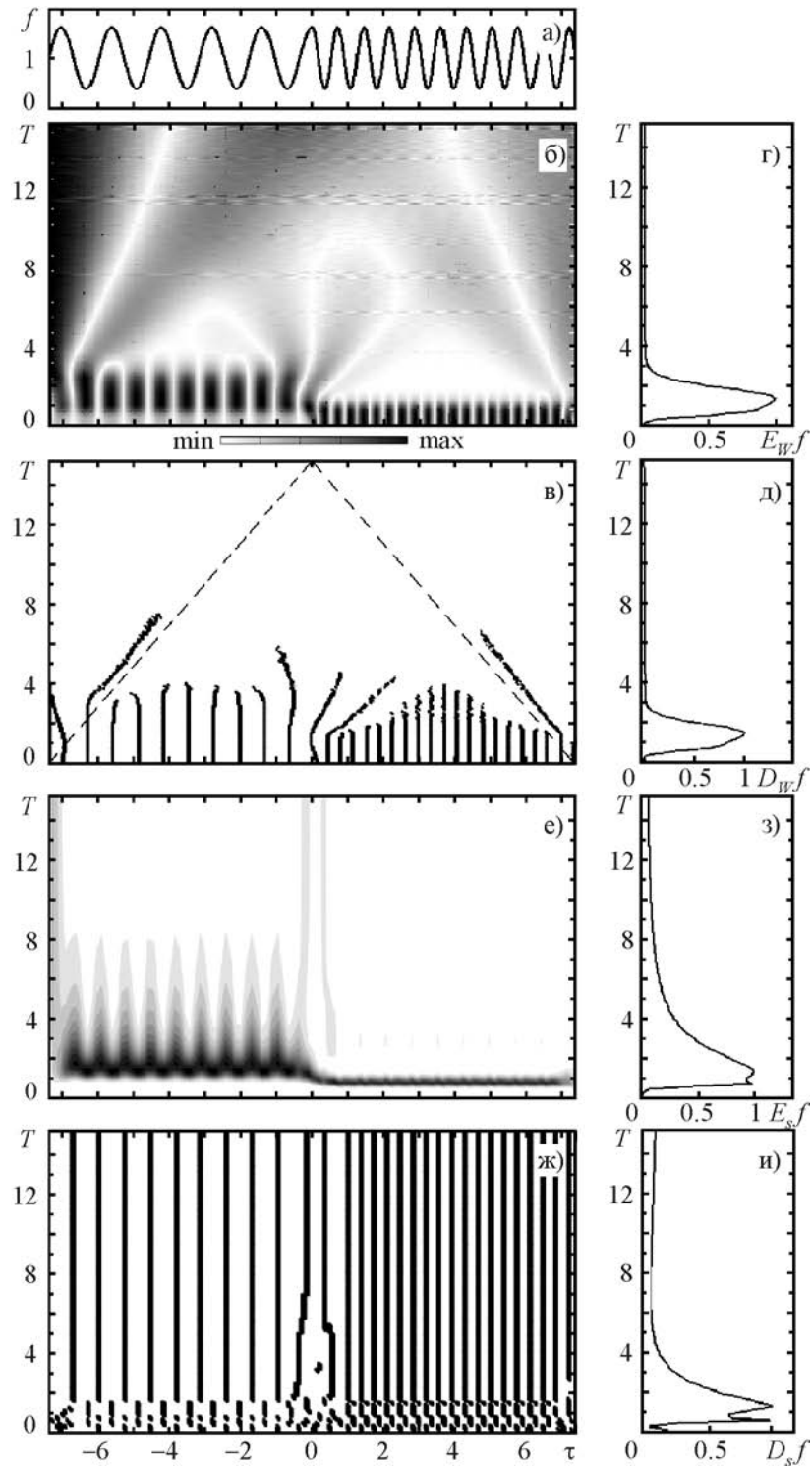


Рис. 6. Спектральные характеристики резкого скачка частоты гармонического сигнала: а) – сигнал $f(t)$ во временной области; б) – модуль вейвлет-коэффициентов $|Wf(T, \tau)|$, полученный с использованием вейвлета $texh$; в) – скелетон; г) – энергограмма $E_W f(T)$; д) – дисперсия модуля вейвлет-коэффициентов $D_W f(T)$; е) – модуль ФСП ДПФ $|\hat{S}f(T, \tau)|$; ж) – скелетон ФСП ДПФ; з) – энергограмма Фурье $E_S f(T)$; и) – дисперсия модуля коэффициентов ФСП ДПФ $D_S f(T)$

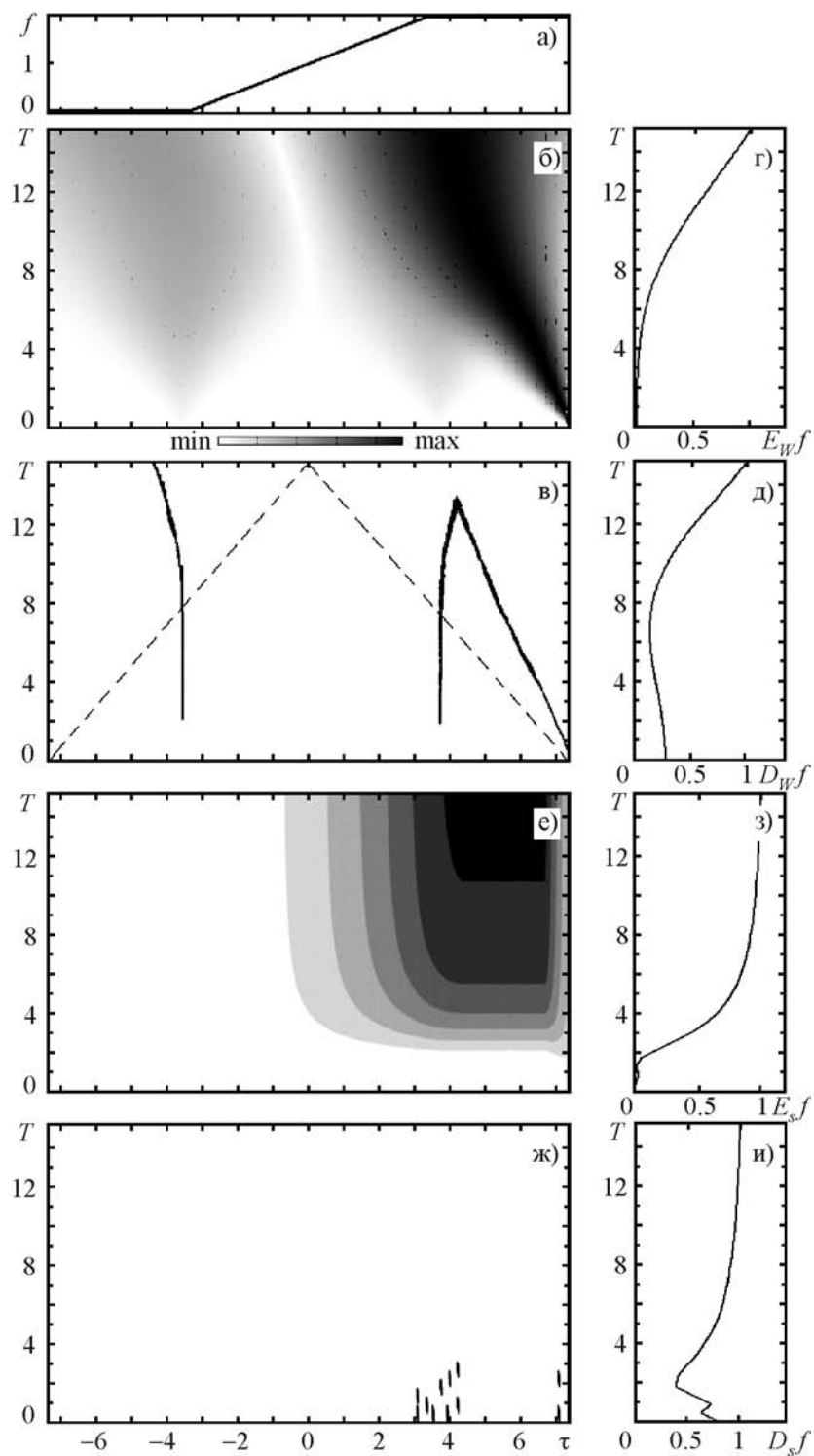


Рис. 7. Спектральные характеристики излома: а) – сигнал $f(t)$ во временной области; б) – модуль вейвлет-коэффициентов $|Wf(T, \tau)|$, полученный с использованием вейвлета *tech*; в) – скелетон; г) – энергограмма $E_W f(T)$; д) – дисперсия модуля вейвлет-коэффициентов $D_W f(T)$; е) – модуль ФСП ДПФ $|Sf(T, \tau)|$; ж) – скелетон ФСП ДПФ; з) – энергограмма Фурье $E_S f(T)$; и) – дисперсия модуля коэффициентов ФСП ДПФ $D_S f(T)$

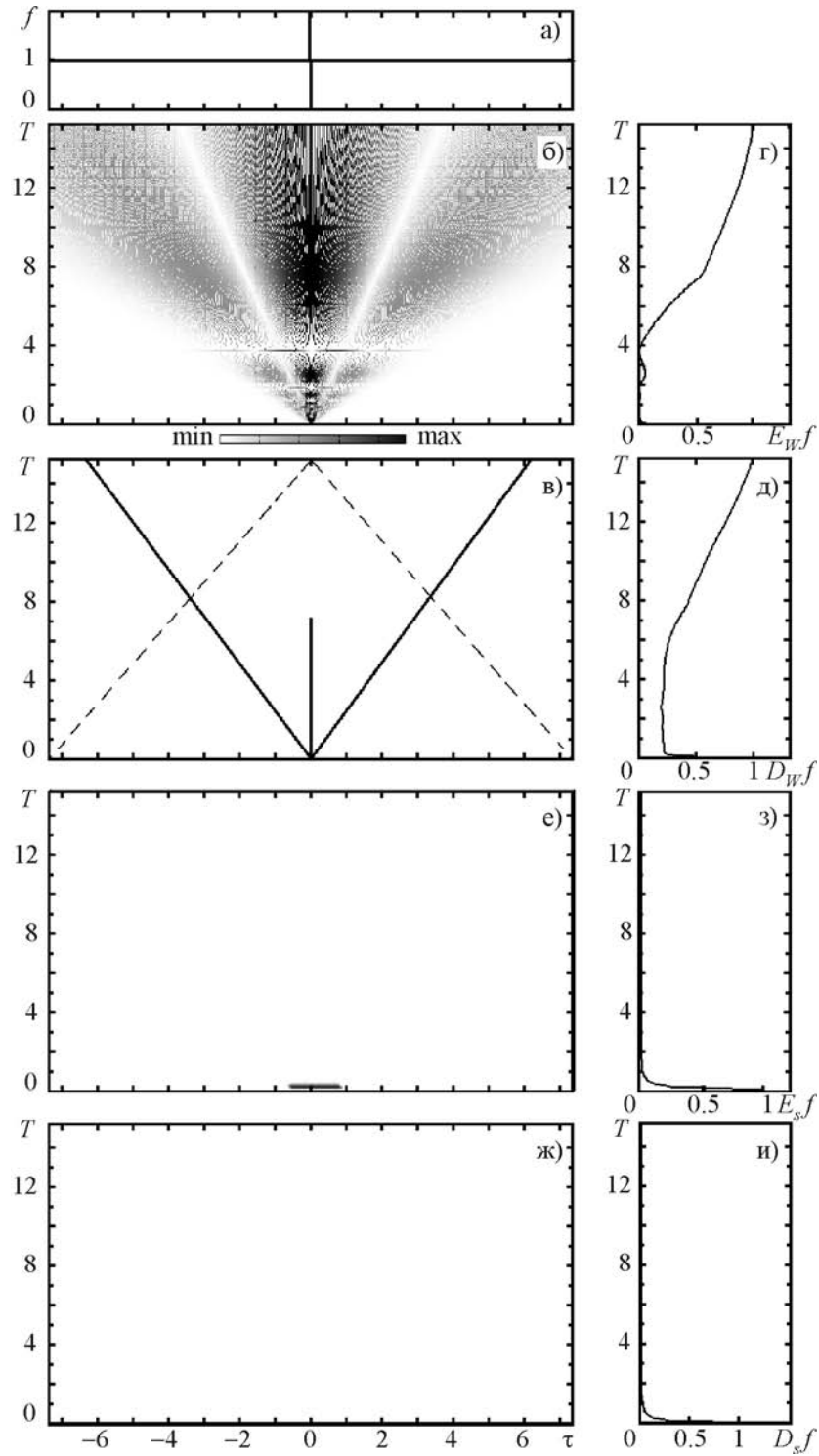


Рис. 8. Спектральные характеристики производной δ -функции: а) – сигнал $f(t)$ во временной области; б) – модуль вейвлет-коэффициентов $|Wf(T, \tau)|$, полученный с использованием вейвлета $texh$; в) – скелетон; г) – энергограмма $E_W f(T)$; д) – дисперсия модуля вейвлет-коэффициентов $D_W f(T)$; е) – модуль ФСП ДПФ $|\hat{S}f(T, \tau)|$; ж) – скелетон ФСП ДПФ; з) – энергограмма Фурье $E_S f(T)$; и) – дисперсия модуля коэффициентов ФСП ДПФ $D_S f(T)$

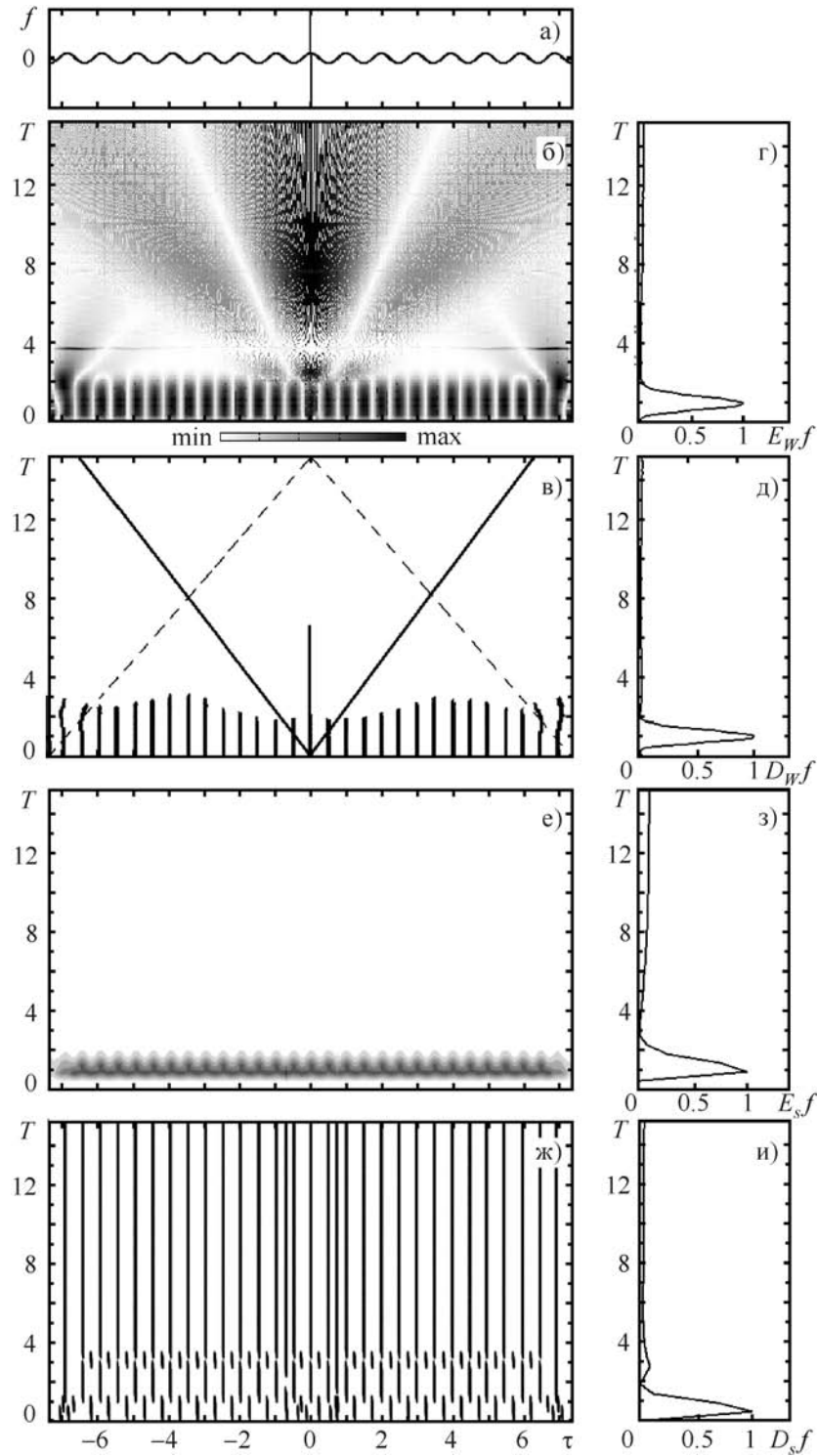


Рис. 9. Спектральные характеристики суммы производной δ -функции и гармонического сигнала: а) – сигнал $f(t)$ во временной области; б) – модуль вейвлет-коэффициентов $|Wf(T, \tau)|$, полученный с использованием вейвлета *tech*; в) – скелетон; г) – энергограмма $E_w f(T)$; д) – дисперсия модуля вейвлет-коэффициентов $D_w f(T)$; е) – модуль ФСП ДПФ $|\hat{S}f(T, \tau)|$; ж) – скелетон ФСП ДПФ; з) – энергограмма Фурье $E_s f(T)$; и) – дисперсия модуля коэффициентов ФСП ДПФ $D_s f(T)$

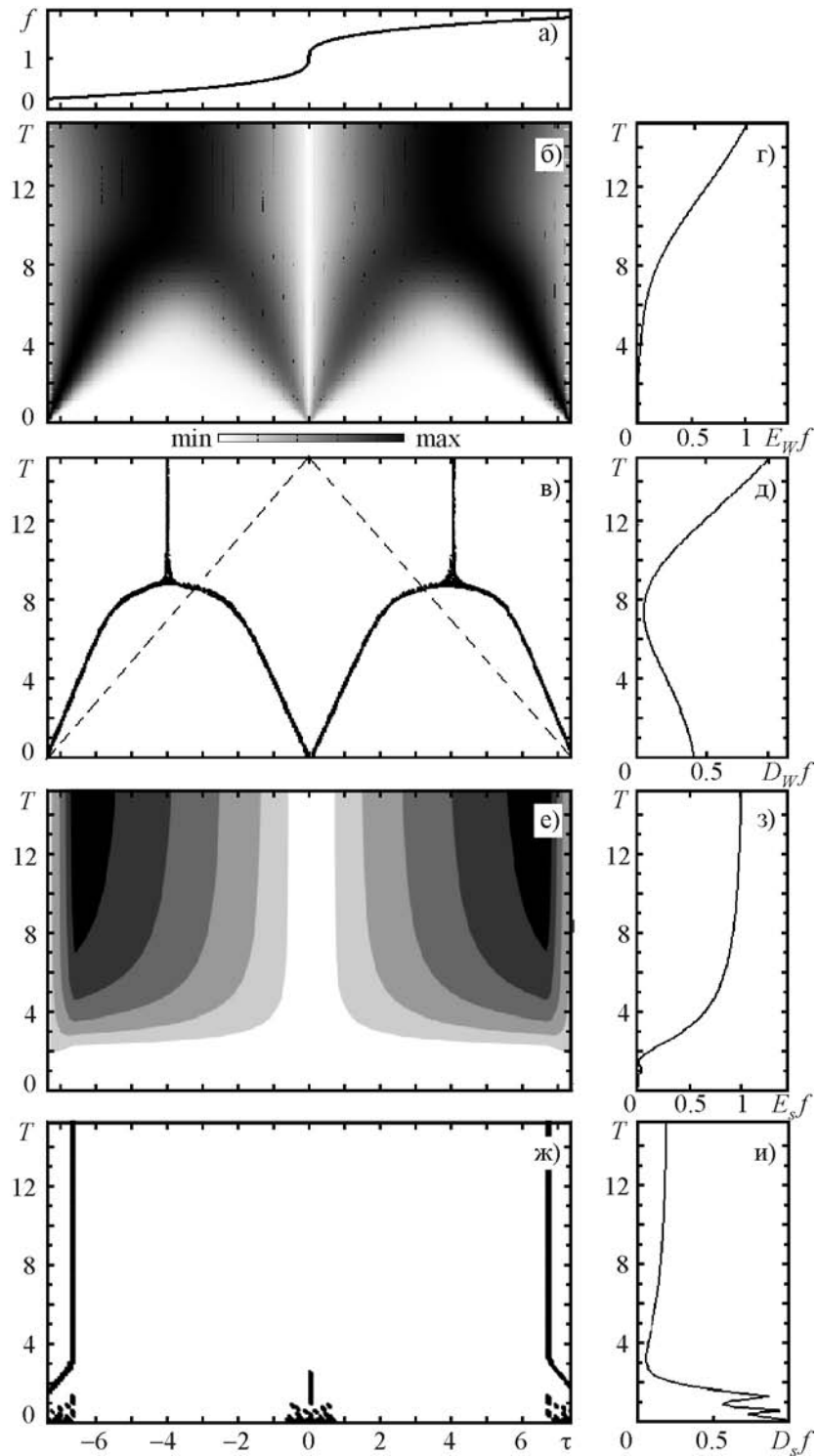


Рис. 10. Спектральные характеристики вертикального перегиба: а) – сигнал $f(t)$ во временной области; б) – модуль вейвлет-коэффициентов $|Wf(T, \tau)|$, полученный с использованием вейвлета $texh$; в) – скелетон; г) – энергограмма $E_W f(T)$; д) – дисперсия модуля вейвлет-коэффициентов $D_W f(T)$; е) – модуль ФСП ДПФ $|\hat{S}f(T, \tau)|$; ж) – скелетон ФСП ДПФ; з) – энергограмма Фурье $E_S f(T)$; и) – дисперсия модуля коэффициентов ФСП ДПФ $D_S f(T)$

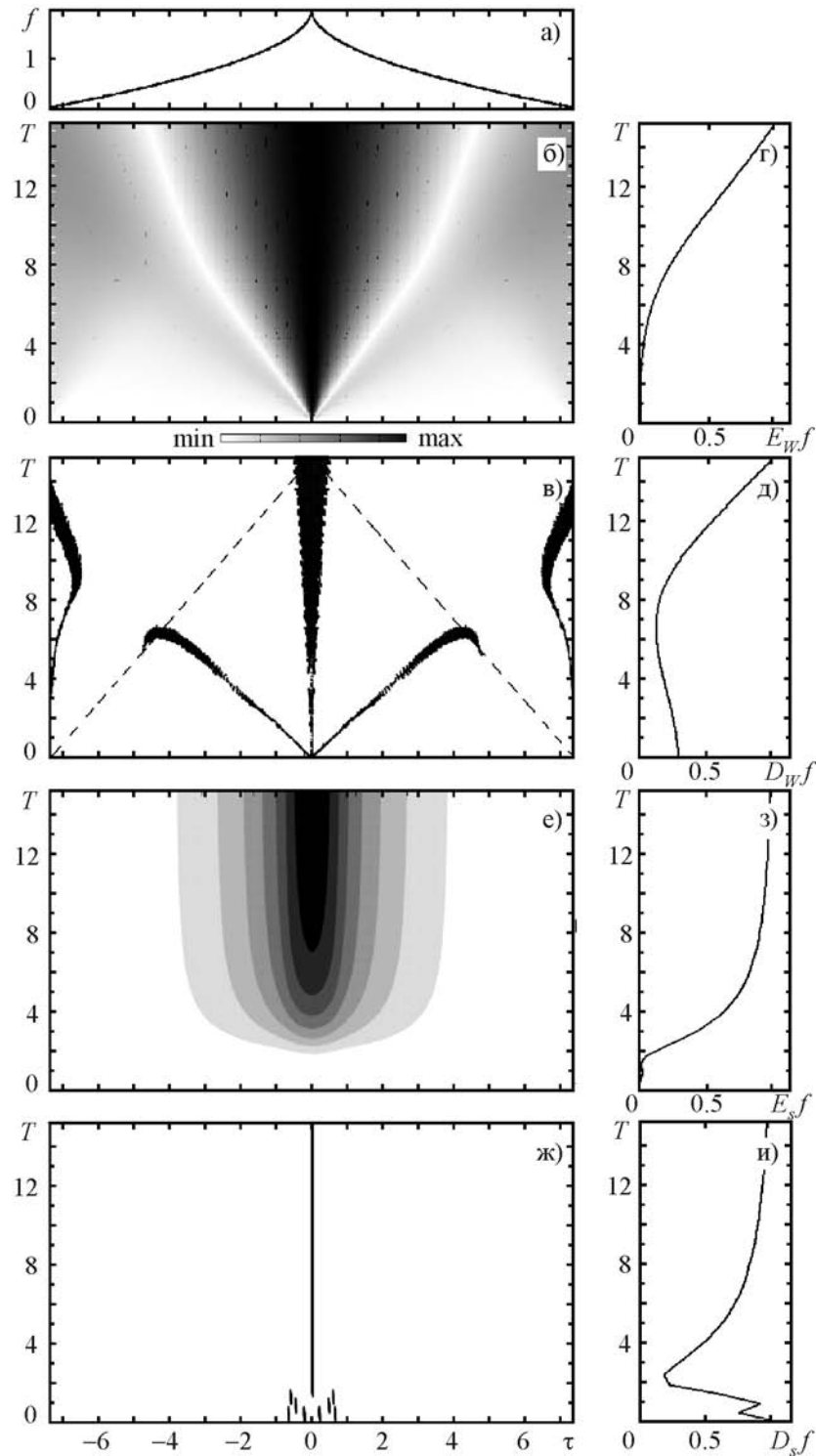


Рис. 11. Спектральные характеристики импульса: а) – сигнал $f(t)$ во временной области; б) – модуль вейвлет-коэффициентов $|Wf(T, \tau)|$, полученный с использованием вейвлета $tehx$; в) – скелетон; г) – энергограмма $E_W f(T)$; д) – дисперсия модуля вейвлет-коэффициентов $D_W f(T)$; е) – модуль ФСП ДПФ $|Sf(T, \tau)|$; ж) – скелетон ФСП ДПФ; з) – энергограмма Фурье $E_S f(T)$; и) – дисперсия модуля коэффициентов ФСП ДПФ $D_S f(T)$

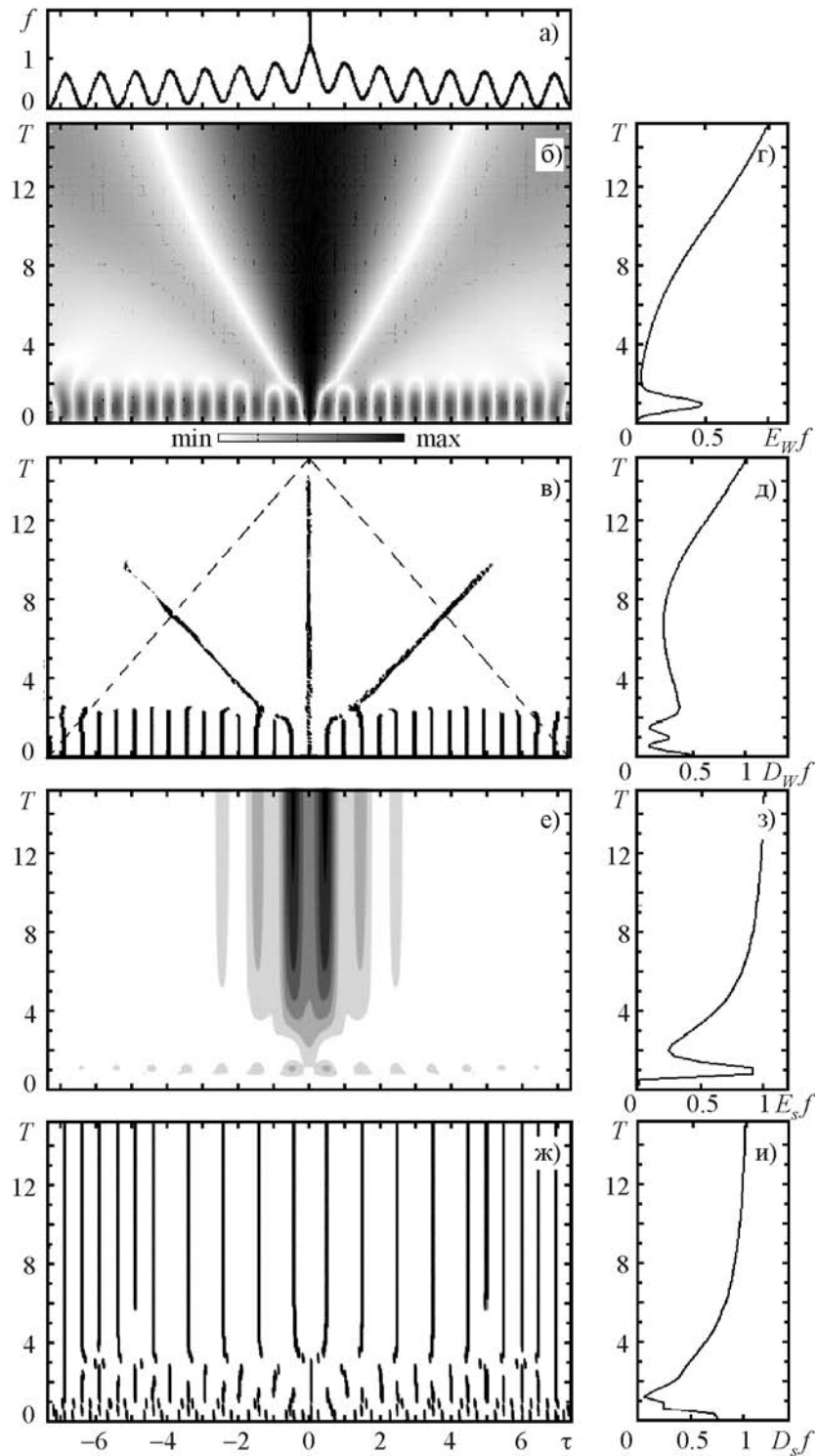


Рис. 12. Спектральные характеристики наложения шпика на гармонический сигнал: а) – сигнал $f(t)$ во временной области; б) – модуль вейвлет-коэффициентов $|Wf(T, \tau)|$, полученный с использованием вейвлета $texh$; в) – скелетон; г) – энергограмма $E_W f(T)$; д) – дисперсия модуля вейвлет-коэффициентов $D_W f(T)$; е) – модуль ФСП ДПФ $|\mathcal{S}f(T, \tau)|$; ж) – скелетон ФСП ДПФ; з) – энергограмма Фурье $E_S f(T)$; и) – дисперсия модуля коэффициентов ФСП ДПФ $D_S f(T)$

Литература

1. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
2. Короновский А. А., Храмов А. Е. Непрерывный вейвлет-анализ и его приложения. – М.: Физматлит, 2003. – 176 с.
3. Астафьева Н. М. Вейвлет анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166, №11. – С. 1115-1180.
4. The transforms and applications handbook / Editor-in-chief, Alexander Poularikas. – USA: CRC Press, 1996. – 1335 p.
5. Holschneider M. Wavelets: An Analysis Tool. – Oxford: Calderon Press, 1995. – 423 p.
6. Воробьев В. И., Грибунин В. Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. – Санкт-Петербург: ВУС, 1999. – 204 с.
7. Дремин И. М., Иванов О. В., Нечитайло В. А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171, №5. – С. 465-501.
8. Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории – к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 448 с.
9. Чуи К. Введение в вейвлеты / Пер. с англ. Я. М. Жилейкина. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
10. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Вейвлет-анализ нелинейных волновых процессов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2005. – №10. – С. 3-21.
11. Кравченко В. Ф., Лазоренко О. В., Пустовойт В. И., Черногор Л. Ф. Вейвлет-анализ нелинейных волновых процессов // ДАН РАН. – 2006. – Т. 410, №6. – С. 744-748. English Version: Kravchenko V. F., Lazorenko O. V., Pustovoyt V. I., and Chernogor L. F. Study of the Structure of Solutions to Nonlinear Wave Equations Based on Continuous Wavelet Analysis // Doklady Mathematics. – 2006. – Vol. 74, No. 2. – P. 767-770.
12. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Вейвлет-анализ модельных сверхширокополосных сигналов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2006. – №8. – С. 47-61.
13. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Применение вейвлет-анализа к задаче обнаружения кратковременных знакопеременных и сверхширокополосных процессов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2004. – Т. 9, №9-10. – С. 31-62.
14. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Фрактальные сверхширокополосные сигналы // Радиофизика и радиоастрономия. – 2005. – Т. 10, №1. – С. 62-84.
15. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. – М.: Наука, 1988. – 368 с.
16. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. – М.: Наука, Физматлит, 2000. – 272 с.
17. Черногор Л. Ф. Нелинейная радиофизика. – Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2004. – 200 с.

Вейвлет-аналіз модельних сигналів з особливостями.

1. Безперервне вейвлет-перетворення

**О. В. Лазоренко, С. В. Лазоренко,
Л. Ф. Черногор**

Пропонується використовувати безперервне вейвлет-перетворення (БВП) для вивчення структури сигналів з особливостями. За допомогою аналітичних та чисельних методів виконано вейвлет-аналіз простих дійсних моделей сигналів з особливостями у часовій області. Отримані результати порівнюються з результатами динамічного перетворення Фур'є (ДПФ). Результати БВП та ДПФ подано у спеціальному форматі, рекомендованому дослідникам. Показано переваги використання вейвлетів для аналізу сигналів з особливостями. З допомогою комплексного функціоналу якості відібрано оптимальний вейвлетний базис для кожної конкретної моделі сигналу для БВП.

Wavelet Analysis of the Model Signals with Peculiarities.

1. Continuous Wavelet Transform

**O. V. Lazorenko, S. V. Lazorenko,
and L. F. Chernogor**

The continuous wavelet transform (CWT) is proposed for investigating the structure of the signals with peculiarities. Wavelet analysis of simple real models of the signals with peculiarities in time domain was made analytically and numerically. The results obtained are compared with those of the short-time Fourier transform. The wavelet and Fourier analysis results are shown in a special data format recommended for using by researchers. The advantages of the wavelet application for the analysis of the signals with peculiarities are shown. By using the integrated quality functional, the optimal wavelet basis used in CWT for each signal model is selected.