УДК 650.1

**А.А. ЛЯЛЕЦКИЙ**

# О КОРРЕКТНЫХ СПОСОБАХ РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ЗАДАЧ

***Анотація.*** *У роботі розглядається питання про те, як, уміючи робити якісь операції на довільній сукупності подій, слід робити аналогічні операції на нечітких множинах, що представляють прогнози відносно цих подій. Для того, щоб знайти відповідь на поставлене питання, розроблено спеціальний понятійний апарат, у рамках якого сформульовано поняття нечіткої задачі та наведено процедуру, яка дозволяє знаходити рішення нечітких задач. Наведено переконливі аргументи, які підтверджують коректність цієї процедури.*
***Ключові слова:*** *нечітка множина, операція, прогнозування, експертна система.*

***Аннотация.*** *В статье рассматривается вопрос о том, как, умея совершать какие-то действия на произвольной совокупности событий, следует совершать аналогичные действия на нечетких множествах, представляющих прогнозы относительно этих событий. Для того, чтобы найти ответ на поставленный вопрос, разработан специальный понятийный аппарат, в рамках которого сформулировано понятие нечеткой задачи и приведена процедура, позволяющая находить решения нечетких задач. Приведены убедительные доводы в пользу корректности этой процедуры.*
***Ключевые слова:*** *нечеткое множество, операция, прогнозирование, экспертная система.*

***Abstract.*** *The following question is being considered in the paper. Under assumption of being able to make some actions on an arbitrary set of events, how it is possible to make the same actions on fuzzy sets representing forecasting for these events? For answering the posed question, first, a special concept system permitting to give a notion of a fuzzy task is proposed, and, second, a procedure for solving fuzzy tasks is constructed. Besides, the conclusive proofs substantiating the correctness of this procedure are given.*
***Keywords:*** *fuzzy set, operation, forecasting, expert system.*

## 1. Введение

Предположим, что рассматривается некоторая конечно параметризованная задача $T$ с параметрами $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$ и известна функция $f : A_0 \times A_1 \times ... \times A_{n-1} \to B$ нахождения “точного” решения $T$, где каждое $A_i$ является множеством возможных значений соответствующего параметра $p_i$, а $B$ – множеством возможных решений $T$. То есть, $f$ сопоставляет каждым значениям $v_0, v_1, ..., v_{n-1}$ соответствующих параметров $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$ решение $f(v_0, v_1, ..., v_{n-1})$ задачи $T$. Теперь предположим, что значения параметров $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$ заданы “нечетко”, с некоторой “долей уверенности”. Тогда естественно полагать, что, во-первых, каждое из множеств $A_0, A_1, ..., A_{n-1}$ представляет собой совокупность попарно несовместных элементарных событий. Неформально это означает, что для каждого $i$ в какой-то соответствующий момент времени должно произойти в точности одно событие из $A_i$, и, во-вторых, что нечеткое значение каждого параметра $p_i$ представлено в виде соответствующего нечеткого множества $c_i \in [0,1]^{A_i}$. В этом “нечетком” случае возникают следующие вопросы:

– Что следует понимать под решением “нечеткой версии” задачи $T$?

– Какой информации достаточно для нахождения этого решения и как его вычислить?

– Как обосновать корректность найденного решения?

Для того, чтобы ответить на первые два вопроса, предложим понятия нечеткого контекста первого и второго порядков, а затем с их помощью – понятие нечеткой задачи и процедуры, позволяющие находить решения этих нечетких задач. Кроме того, будут приведены доводы, обосновывающие корректность этих процедур.

Результаты данной статьи были представлены на конференции TAAPSD’2011 [2]. Также отметим, что в [3, 4] приводится подход к решению поставленных вопросов, похожий на тот, который рассматривается в данной статье, причем в [3] вкратце описана соответствующая программная система, а в [5] описана программная система, реализующая другой подход.

## 2. Предварительные сведения

Предполагается, что читатель знаком с самыми базовыми понятиями теории частично упорядоченных множеств. Если $A$ – какое-то множество (неформально рассматриваемое как множество событий), то под нечетким множеством $c$ на $A$ мы, следуя [1], будем понимать функцию вида $c : A \to [0,1]$. Следовательно, $[0,1]^A$ обозначает совокупность всех нечетких множеств на А. Нечеткое множество $c$, такое, что множество $\{\varepsilon \mid c(\varepsilon) \neq 0\}$ не более чем счетно, будем называть вероятностным, если $\sum_{\varepsilon \in A} c(\varepsilon) = 1$. В этом случае элементы множества $A$ неформально интерпретируются как элементарные события.

## 3. Формализация понятия нечеткой задачи

Нечеткий контекст – это упорядоченная тройка $Q = < f, <, \varphi >$, компоненты которой представляют собой следующее. Как и во введении, $f(v_0, v_1, ..., v_{n-1})$ – $n$-арная функция “нахождения точного решения”. Зафиксируем какие-то нечеткие множества $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$, где $c_i \in [0,1]^{A_i}$, рассматриваемые как нечеткие значения соответствующих параметров рассматриваемой задачи. По определению $<$ является отношением строгого порядка на множестве $\{0,1,..., n-1\}$, которое имеет следующую неформальную интерпретацию: $i < j \Leftrightarrow$ множество событий $A_i$ “зависит” или “может зависеть” от нечёткого множества $A_j$, где под термином “зависимость” содержательно понимается способность зависимого нечёткого множества $c_j$ изменяться в зависимости от того, какое событие из $A_i$ произойдёт во множестве $c_i$ (это, в частности, предполагает, что событие из $A_i$ должно произойти раньше, чем событие из $A_j$). Тогда “независимость” совокупности множеств событий $\{A_0, A_1, ..., A_{n-1}\}$ в рамках рассматриваемого нечеткого контекста просто означает, что любые события $\varepsilon_o$ и $\varepsilon_1$, где $\varepsilon_o \in A_{i_0}$, $\varepsilon_1 \in A_{i_1}$ и $i_0 \neq i_1$, являются независимыми между собой, и в этом случае отношение $<$ совпадает с пустым множеством $\varnothing$. Если число $i$ не является $<$-минимальным, то ему приписывается функция $\varphi(i) = \varphi_i$. Если для каждого $i$ функция $\varphi_i$ имеет вид

$$\varphi_i : [0,1]^{A_i} \times (A_{j_0} \times A_{j_1} \times ... \times A_{j_{k-1}}) \to [0,1]^{A_i},$$

где $\{j_0, j_1, ..., j_{k-1}\} = \{m \mid m < i\}$, то $Q = < f, <, \varphi >$ называется нечетким контекстом первого порядка; в этом случае $\varphi_i$ описывает изменения нечёткого множества $c_i$ в зависимости от того, какое именно событие случилось в каждом $A_j$, $<$-предшествующем $A_i$. Если же для каждого $i$ функция $\varphi_i$ имеет вид

$$\varphi_i : [0,1]^{A_i} \times ([0,1]^{A_{j_0}} \times [0,1]^{A_{j_1}} \times \ldots \times [0,1]^{A_{j_{k-1}}}) \to [0,1]^{A_i},$$

где опять $\{j_0, j_1, ..., j_{k-1}\} = \{m \mid m < i\}$, то $Q = < f, <, \varphi >$ называется нечетким контекстом второго порядка. В этом случае $\varphi_i$ описывает зависимость нечёткого множества $c_i$ от прогнозов, описываемых нечеткими множествами $c_j$, где $j < i$. Нечеткий контекст $Q$ называется независимым, если $< = \varnothing$ (в этом случае область определения $\varphi$ равна $\varnothing$, а поэтому и сама $\varphi$ также равна $\varnothing$). Ясно, что независимый контекст можно рассматривать как частный случай контекста первого порядка, а контекст первого порядка – как частный случай контекста второго порядка.

Под нечеткой задачей естественно считать упорядоченную двойку $< Q, < c_0, c_1, ..., c_{n-1} >>$, где $Q$ – нечеткий контекст и $< c_0, c_1, ..., c_{n-1} >$ – набор нечетких множеств, таких, что $c_i \in [0,1]^{A_i}$.

## 4. Нечеткие множества, представляющие решения нечетких задач

Посмотрим, как можно естественно определить нечеткое множество $F_Q(c_0, c_1, ..., c_{n-1}) \in [0,1]^B$, представляющее решение рассматриваемой нечеткой задачи. Отдельно рассмотрим три случая: когда контекст $Q$ является независимым, когда $Q$ имеет первый порядок и когда – второй.

**Независимый контекст.** Вначале рассмотрим случай, если в контексте $Q = < f, <, \varphi >$ рассматриваемой нечеткой задачи $< Q, < c_0, c_1, ..., c_{n-1} >>$ отношение $<$ равно $\varnothing$, т.е., когда множества событий $A_0, A_1, ..., A_{n-1}$ являются попарно независимыми. В этом случае, следуя классической теории вероятностей, определяем $F_Q(c_0, c_1, ..., c_{n-1})$ с помощью правила

$$F_Q(c_0, c_1, ..., c_{n-1})(b) = \sum_{f(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}) = b} c_0(\varepsilon_0) \cdot c_1(\varepsilon_1) \cdot ... \cdot c_{n-1}(\varepsilon_{n-1}) \qquad (*)$$

для каждого $b \in B$.

**Контекст первого порядка.** Теперь рассмотрим случай, когда в контексте $Q = < f, <, \varphi >$ рассматриваемой нечеткой задачи $< Q, < c_0, c_1, ..., c_{n-1} >>$ отношение $< \neq \varnothing$ и $Q$ – контекст первого порядка. Тогда $F_Q(c_0, c_1, ..., c_{n-1})$ определяется следующим образом. Пусть $\{m_0, m_1, ..., m_{l-1}\}$ является подмножеством $\{0,1, ..., n-1\}$, состоящим из всех чисел, которые не являются $<$-максимальными. Положим

$$S = \{\{\varepsilon_{m_0}, \varepsilon_{m_1}, ..., \varepsilon_{m_{l-1}}\} \mid \varepsilon_{m_i} \in A_{m_i}\}.$$

Зафиксируем некоторую выборку $\sigma = \{\varepsilon_{m_0}, \varepsilon_{m_1}, ..., \varepsilon_{m_{l-1}}\} \in S$. Через $c_i^\sigma \in [0,1]^{A_i}$ обозначим нечеткое множество, которое, если $i$ является $<$-минимальным, совпадает с $c_i$, либо, в противном случае, $c_i^\sigma$ равно $\phi_i(c_i, \varepsilon_{j_0}, \varepsilon_{j_1}, ..., \varepsilon_{j_{k_i-1}})$, где $\{j_0, j_1, ..., j_{k_i-1}\} = \{m \mid m < i\}$.

Введем ещё одно вспомогательное нечеткое множество $C^\sigma$ как решение $F_{Q'}(c_0^\sigma, c_1^\sigma, ..., c_{n-1}^\sigma)$ нечеткой задачи $< Q', < c_0^\sigma, c_1^\sigma, ..., c_{n-1}^\sigma >>$ с независимым контекстом $Q' = < f, \varnothing, \varnothing >$. Наконец, решение исходной нечеткой задачи $< Q, < c_0, c_1, ..., c_{n-1} >>$ – это нечеткое множество, определяемое с помощью формулы

$$F_Q(c_0,c_1,...,c_{n-1}) = \sum_{\sigma=\{\varepsilon_{m_0},\varepsilon_{m_1},...,\varepsilon_{m_{l-1}}\}\in S} (c_0^\sigma(\varepsilon_{m_0})\cdot c_1^\sigma(\varepsilon_{m_1})\cdot ...\cdot c_{n-1}^\sigma(\varepsilon_{m_{n-1}}))\cdot C^\sigma \qquad (**)$$

(здесь выражение $k\cdot C$, где $k\in\Re$ и $C\in\Re^B$ обозначают результат обычного умножения константы на функцию и, аналогично, выражение $C_0+C_1$, где $C_0,C_1\in\Re^B$ обозначает обычную сумму функций).

Содержательно, нечеткое множество $C^\sigma$ – это решение исходной нечеткой задачи $<Q,<c_0,c_1,...,c_{n-1}>>$ в предположении, что произошли события $\varepsilon_{m_0},\varepsilon_{m_1},...,\varepsilon_{m_{l-1}}$, составляющие рассматриваемую выборку $\sigma$; следовательно, коэффициент, стоящий перед $C^\sigma$ в $(**)$,– это вероятность того, что произойдут именно $\varepsilon_{m_0},\varepsilon_{m_1},...,\varepsilon_{m_{l-1}}$. Поэтому $(**)$ по существу представляет из себя, как и $(*)$, простой перебор по всевозможным комбинациям событий, но с учетом “зависимостей”, описываемых с помощью функции $\varphi$**.** Также отметим, что из элементарных свойств сложения и умножения следует, что если каждое из нечетких множеств $c_0,c_1,...,c_{n-1}$ является вероятностным, то решение $F_Q(c_0^\sigma,c_1^\sigma,...,c_{n-1}^\sigma)$ – тоже вероятностное нечеткое множество.

**Контекст второго порядка.** Рассмотрим последний случай, когда в контексте $Q=<f,<,\varphi>$ рассматриваемой нечеткой задачи $<Q,<c_0,c_1,...,c_{n-1}>>$ отношение $<\neq\varnothing$ и $Q$ – контекст второго порядка**.** Мы приведем два описания по-существу одной и той же процедуры, позволяющей построить искомое решение $F_Q(c_0,c_1,...,c_{n-1})\in[0,1]^B$. Первое из них излагается на языке, более привычном для математики, второе же более пригодно для программной реализации.

**Описание 1.** Вводим в рассмотрение помеченное, строго упорядоченное множество $L=<\{0,1,...,n-1\},<,\lambda>$, рассматриваемое как помеченный граф, где $\lambda_0(i)=c_i$ для каждой вершины $i$, $0\le i\le n-1$, т.е. $\lambda$ – функция, сопоставляющая каждой вершине $L$ соответствующее нечеткое множество. Определим попарно непересекающиеся множества $I_h$ вершин высоты $h$, где $h\in N$:

$$I_0=\{i\mid i \text{ является } <\text{-минимальным}\},$$

$$I_{h+1}=\{i\mid \forall j(j<i\Rightarrow(j\in I_l\ \&\ l<h+1))\ \&\ \exists j'<i(j'\in I_h)\}.$$

Множество $Con$ следствий из $<c_0,c_1,...,c_{n-1}>$ определяется следующим образом. Положим

$$Con_0=\{\ c_i\mid i \text{ является } <\text{-минимальным}\}=\{c_i\mid i\in I_0\},$$

$$Con_{h+1}=\{\varphi_i(d_{j_0},d_{j_1},...,d_{j_{i-1}})\mid i\in I_{h+1}\ \&\ d_{j_m}\in(Con_0\cup Con_1\cup...\cup Con_h)\}.$$

Наконец, положим $Con=\cup Con_h$. Ясно, что при некотором $h<n-1$ равенство $Con_h=Con_{h+k}$ выполняется при любом натуральном $k$ и что совокупность $Con$ состоит в точности из $n-1$ нечетких множеств. Пусть этими множествами являются $d_0\in[0,1]^{A_0}, d_1\in[0,1]^{A_1},...,d_{n-1}\in[0,1]^{A_{n-1}}$. Тогда решение $F_Q(c_0,c_1,...,c_{n-1})$ нечеткой задачи $<Q,<c_0,c_1,...,c_{n-1}>>$ определяется как решение $F_{Q'}(d_0,d_1,...,d_{n-1})$ задачи с независимым контекстом $Q'=<f,\varnothing,\varnothing>$.

Таким образом, смысл приведенной процедуры состоит в том, что, “двигаясь снизу вверх” по помеченному строго упорядоченному множеству $L$, мы как бы учитываем “зависимости", описываемые с помощью функций $\varphi$. Однако в отличие от случая, когда мы рассматривали нечеткие задачи с контекстом первого порядка, в общем случае нельзя гарантировать, что если каждое из нечетких множеств $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ является вероятностным, то таким же является и решение $F_Q(c_0^\sigma, c_1^\sigma, ..., c_{n-1}^\sigma)$ рассматриваемой задачи $Q$ с контекстом второго порядка. На практике нечеткие задачи второго порядка появляются как некоторые экспертные оценки; поэтому "мера приближенности" $C = F_Q(c_0^\sigma, c_1^\sigma, ..., c_{n-1}^\sigma)$ к тому, что $\sum_{\varepsilon \in A} C(\varepsilon) = 1$, т.е. число, равное $|1 - \sum_{\varepsilon \in A} C(\varepsilon)|$, может рассматриваться как один из критериев корректности рассматриваемой экспертной оценки.

**Описание 2**. Помеченное строго упорядоченное множество

$$L_0 =< S_0, <_0, \lambda_0 >$$

будем рассматривать как помеченный граф, где $S_0 = \{0,1,...,n-1\}$, $<_1 = <$ и $\lambda_0(i) = c_i$ для каждой вершины $i$, $0 \le i \le n-1$, т.е. $\lambda_0$ – функция, расставляющая метки. Находим такое число $i_0 \in S_0$, которое, само не являясь $<_0$-минимальным, покрывает только $<_0$-минимальные вершины. В $L_0$ в качестве метки вершины $i_0$ заменяем нечеткое множество $c_{i_0}$ на $c'_{i_0} = \phi_{i_0}(c_{i_0}, c_{j_0}^{i_0}, c_{j_1}^{i_0}, ..., c_{j_{k0-1}}^{i_0})$, где $\{j_0^{i_0}, j_1^{i_0}, ..., j_{k_0-1}^{i_0}\} = \{m \mid m < i_0\}$, и вычеркиваем из $L_0$ вершины $j_0^{i_0}, j_1^{i_0}, ..., j_{k_0-1}^{i_0}$, полагая $S_1 = S_0 \setminus \{j_0^{i_0}, j_1^{i_0}, ..., j_{k_0-1}^{i_0}\}$ и $<_1 = <_0 \cap (S_1)^2$. Получим помеченное строго упорядоченное множество, которое обозначим через

$$L_1 =< S_1, <_1, \lambda_1 >.$$

Далее, аналогично, находим число $i_1 \in S_1$, которое само не является $<_1$-минимальным, но покрывает только $<_1$-минимальные вершины. В $L_1$ в качестве метки вершины $i_1$ заменяем нечеткое множество $c_{i1}$ на $c'_{i_1} = \phi_{i_1}(c_{i_1}, c_{j_0}^{i_1}, c_{j_1}^{i_1}, ..., c_{j_{k1-1}}^{i_1})$, где $\{c_{j_0}^{i_1}, c_{j_1}^{i_1}, ..., c_{j_{k1-1}}^{i_1}\} = \{m \mid m < i_1\}$, и вычеркиваем из $L_1$ вершины $j_0^{i_1}, j_0^{i_1}, ..., j_{k_1-1}^{i_1}$, полагая $S_2 = S_1 \setminus \{j_0^{i_1}, j_0^{i_1}, ..., j_{k_1-1}^{i_1}\}$ и $<_2 = <_1 \cap (S_2)^2$. Получим помеченное строго упорядоченное множество

$$L_2 =< S_2, <_2, \lambda_2 >.$$

Продолжаем этот процесс построения $L_i$ до тех пор, пока, для некоторого натурального числа $t$, множество вершин $S_t = \varnothing$. Таким образом, мы построим граф $L_{t-1}$, вершины которого помечены нечеткими множествами $d_0, d_1, ..., d_{n-1}$, где каждое $d_i$ равно либо $c_i$, если оно является $<$-минимальным, либо $c'_i$ – в противном случае. Тогда решение $F_Q(c_0^\sigma, c_1^\sigma, ..., c_{n-1}^\sigma)$ рассматриваемой задачи $< Q, < c_0, c_1, ..., c_{n-1} >>$ определяется как нечеткое множество $F_{Q'}(d_0, d_1, ..., d_{n-1})$, являющееся решением задачи $< Q', < d_0, d_1, ..., d_{n-1} >>$ с независимым контекстом $Q' =< f, \varnothing, \varnothing >$.

## 5. Выводы

Предложенный математический аппарат можно понимать как такой, который, зная, как совершать какие-то операции над "четкими" данными, фактически обеспечивает возможность совершать такие же операции над прогнозами над этими данными. Поэтому неудивительно, что он имеет широкий спектр практических приложений. В первую очередь это касается экспертных систем, которые как раз и имеют дело с теми или иными нечеткими задачами. Кроме того, отметим, что предложенная процедура поддается программной имплементации, что очень существенно, поскольку оперирование над нечеткими данными требует большого объема вычислений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений / Заде Л. – М.: Мир, 1976. – 165 с.

2. Ляледкий А.А. Об абстрактных операциях над нечеткими данными // Тезисы докладов Междунар. конф. TAAPSD’2011, (Ялта, сентябрь 2011 г.). – Ялта, 2011. – С. 119 – 122.

3. Ляледкий А.А. Об одном методе решения конечно-параметризованных задач и его программная реализация / А.А. Ляледкий, О.М. Яремчук // Proc. of the X-th International Conference Knowledge-Dialog-Solution. – Varna (Bulgaria), 2003. – June 12–26. – P. 12 – 26.

4. Lyaletsky A.A. On Prediction Based Method in Fuzzy Logic and its Software Implementation / A.A. Lyaletsky, O.M. Yaremckuk // Proc. of the 19th International Conference on Artificial Intelligence (AI’19). – Siedlce, Poland, 2004. – September 21–24. – P. 43 – 48.

5. Бочарников В.П. Прогнозные коммерческие расчеты и анализ рисков на Fuzzy for Excel / Бочарников В.П., Свешников С.В., Возняк С.Н. – К.: Инекс, 2000. – 159 с.

*Стаття надійшла до редакції 03.10.2011*