

Анотація. Проаналізовані рівняння дисоціації газових гідратів у пористих середовищах. Даний аналіз дозволяє побудувати ефективні обчислювальні алгоритми для вирішення рівнянь, що розглядаються. Розроблене обчислювальне середовище дає можливість моделювати процеси, що вивчаються, в інтерактивному режимі.

Ключові слова: газові гідрати, математичне моделювання.

Аннотация. Проанализированы уравнения диссоциации газовых гидратов в пористых средах. Данный анализ позволяет построить эффективные вычислительные алгоритмы для решения рассматриваемых уравнений. Разработанная вычислительная среда дает возможность моделировать изучаемые процессы в интерактивном режиме.

Ключевые слова: газовые гидраты, математическое моделирование.

Abstract. The equations of gas hydrates dissociation in porous media are analyzed. This analysis allows to create effective computing algorithms for solving of considered equations. Developed computational environment enables to model studied processes in interactive mode.

Keywords: gas hydrates, mathematical modeling.

1. Введение

В настоящее время к газовым гидратам привлечено большое внимание как к потенциальным источникам углеводородов [1–3]. По имеющимся данным, объем углеводородного газа, содержащегося в гидратах, значительно превосходит остальные его запасы.

В основе математического описания процессов диссоциации газовых гидратов в пористой среде лежат уравнения механики сплошной среды, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии [4].

Целью работы является математическое исследование соответствующей системы дифференциальных уравнений в частных производных. Систему удается частично расщепить на блоки, соответствующие динамике сатурационных параметров и давления, что позволяет выделить уравнения, близкие к гиперболическому и параболическому типам, и дает возможность при численном моделировании примерить методы решения, подходящие для уравнений данного типа. Результаты математического анализа позволяют выявить комбинации параметров, имеющие непосредственный физический смысл и определяющие динамику системы (коэффициент бароемкости; скачки удельного объема и внутренней энергии).

2. Постановка задачи

Известно, что исходные уравнения в предположении выполнения закона Дарси могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m(S_v S_w \rho_w + (1 - S_v) \rho_v \beta_w)\} + \operatorname{div} \left[\rho_w \vec{V}_w \right] + q_w = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{m(S_v (1 - S_w) \rho_g + (1 - S_v) \rho_v (1 - \beta_w))\} + \operatorname{div} \left[\rho_g \vec{V}_g \right] + q_g = 0, \quad (2)$$

$$\vec{V}_w = -\frac{kk_{rw}}{\mu_w} (\nabla P - g \rho_w \vec{k}), \quad (3)$$

$$\vec{V}_g = -\frac{kk_{rg}}{\mu_g}(\nabla P - g\rho_g \vec{k}), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ m(S_v(S_w \rho_w \varepsilon_w + (1-S_w)\rho_g \varepsilon_g) + (1-S_v)\rho_v \varepsilon_v) + (1-m)\rho_s \varepsilon_s \right\} + \\ & + \operatorname{div} \left\{ \rho_w \varepsilon_w \vec{V}_w + \rho_g \varepsilon_g \vec{V}_g + P(\vec{V}_w + \vec{V}_g) \right\} + \operatorname{div} W + q_\varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где
$$\vec{W} = -\left(m(S_v(S_w \lambda_w + (1-S_w)\lambda_g) + (1-S_v)\lambda_v) + (1-m)\lambda_s \right) \nabla T,$$

$$T = A \ln P + B. \quad (6)$$

Формулы (1), (2) – уравнения неразрывности; (3), (4) – закон Дарси; (5) – уравнение энергии; (6) – соотношение фазового равновесия для гидратов.

Обозначения, общепринятые в гидратной флюидодинамике:

индексы g, w, v, s – относятся к газу, воде, гидрату, скелету пористой среды, l – индекс, указывающий фазу, P – давление, S_w – водонасыщенность, v – гидратонасыщенность, $S_v = 1 - v$ – растепленность, ρ – плотность, \vec{V} – скорость фильтрации, β_w – массовая доля воды в гидрате, \vec{r} – радиус-вектор, t – время, \vec{k} – вертикальный координатный орт, g – ускорение свободного падения, $k(\vec{r}, s_v, P)$ – абсолютная проницаемость, $m(\vec{r}, P)$ – пористость, $k_{rg}(S_w)$, $k_{rw}(S_w)$ – фазовые проницаемости, $\mu_g(P, T)$, $\mu_w(P, T)$ – вязкости, $\rho_l(P, T)$ – плотности фаз, $q_g(t, \vec{r}, S_w, S_v, P)$, $q_w(t, \vec{r}, S_w, S_v, P)$ – плотности источников, $\varepsilon_l(P, T)$ – внутренние энергии фаз.

Внутренняя энергия гидрата выражается через энергии создающих его газа и воды следующим образом: $\beta_w i_w + (1 - \beta_w) i_g = i_v + h$, где h – скрытая теплота фазового перехода единицы массы гидрата, $i_l = \varepsilon_l + P / \rho_l$ – энтальпия, $\lambda_l(P, T)$ – коэффициенты теплопроводности.

A и B – эмпирические константы, входящие в соотношение фазового равновесия для гидрата (6).

В силу этого соотношения, в выражениях для всех параметров, где встречается зависимость от T , ее можно свести к зависимости от P .

Систему уравнений (1), (2) при фиксированных значениях определяющих термодинамических переменных будем называть сатурационным блоком, имея в виду, что эти уравнения служат для определения влагонасыщенности S_w и растепленности S_v .

Вышеприведенная система (1)–(6) является сложной квазилинейной системой уравнений математической физики смешанного типа. Прежде чем применять тот или иной численный метод для ее решения, необходимо вначале расщепить ее на функциональный блок, отвечающий за характеристический перенос сатурационных возмущений (в математическом плане – это гиперболичность в независимых переменных S_v, S_w на фоне фиксированных давлений P), и функциональный блок, представляющий собой диссипативные и характеристически переносные процессы, выраженные разворачивающейся нестационарностью ($\frac{\partial}{\partial t}$) над пространственными дифференциальными операциями второго порядка (в терминах вектора ∇). В последнем случае независимой переменной является давление P при фиксированных сатурациях S_v и S_w .

Оказывается, что полученное диссипативное гидратное уравнение содержит в своей структуре “термодинамические” блоки с некоторыми интегрирующими множителями $\frac{\Psi}{m\rho_v}$ и δ_ε в виде скачков удельных (на единицу массы) объемов и внутренней энергии при фазовом переходе. Эти неотрицательные множители или их аддитивные компоненты, отсутствующие в исходной дивергентной форме записи гидратных уравнений (1)–(6), могут быть использованы как для корректного физического анализа параметров задачи (например, $(S_w)_{\min}, (S_w)_{\max}$ для относительных фазовых проницаемостей), так и для численного явного выделения эволюционно устойчивых аппроксимируемых блоков.

Приведем пример диссипативного уравнения теории гидратов.

3. Диссипативное уравнение теории гидратов

Из уравнений массовых флюидобалансов (1), (2) следует

$$\frac{S_w}{\rho_w} \frac{\partial}{\partial t} (m S_v \rho_w) + \frac{1-S_w}{\rho_g} \frac{\partial}{\partial t} (m S_v \rho_g) + \left(\frac{\beta_w}{\rho_w} + \frac{1-\beta_w}{\rho_g} \right) \frac{\partial}{\partial t} [m(1-S_v)\rho_v] + DIG = 0. \quad (7)$$

$$DIG = \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div}(\rho_w \vec{V}_w) + \frac{1}{\rho_g} \operatorname{div}(\rho_g \vec{V}_g) + \left(\frac{q_w}{\rho_w} + \frac{q_g}{\rho_g} \right). \quad (8)$$

Из уравнения баланса внутренней энергии системы (5), с учетом (1), (2), аналогично следует

$$m S_v [S_w \rho_w \frac{\partial \varepsilon_w}{\partial t} + (1-S_w) \rho_g \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t}] + \frac{\partial}{\partial t} [m(1-S_v) \rho_v \varepsilon_v] + (1-m) \rho_s \varepsilon_s - \\ - [\varepsilon_w \beta_w + \varepsilon_g (1-\beta_w)] \frac{\partial}{\partial t} [m(1-S_v) \rho_v] + DIG_\varepsilon = 0, \quad (9)$$

где

$$DIG_\varepsilon = [\operatorname{div}(\rho_w \varepsilon_w \vec{V}_w) - \varepsilon_w \operatorname{div}(\rho_w \vec{V}_w)] + [\operatorname{div}(\rho_g \varepsilon_g \vec{V}_g) - \varepsilon_g \operatorname{div}(\rho_g \vec{V}_g)] + \\ + \operatorname{div}[P(\vec{V}_w + \vec{V}_g)] + \operatorname{div} \vec{W} + (q_\varepsilon - \varepsilon_w q_w - \varepsilon_g q_g) = \\ = \rho_w \vec{V}_w \nabla \varepsilon_w + \rho_g \vec{V}_g \nabla \varepsilon_g + \\ + \operatorname{div}[P(\vec{V}_w + \vec{V}_g)] + \operatorname{div} \vec{W} + (q_\varepsilon - \varepsilon_w q_w - \varepsilon_g q_g). \quad (10)$$

В уравнениях (7), (9) влагонасыщенность S_w уже не содержится под знаком дифференцирования по времени $\frac{\partial}{\partial t}$.

Действуя аналогичным образом и вводя при фазовом переходе неотрицательные величины:

– скачок удельного объема (на единицу массы)

$$\frac{\Psi}{m\rho_v} = \left(\varphi - \frac{1}{\rho_v} \right) \geq 0, \quad \varphi = \frac{\beta_w}{\rho_w} + \frac{(1-\beta_w)}{\rho_g}; \quad (11)$$

– скачок удельной внутренней энергии (на единицу массы)

$$\delta_\varepsilon = \beta_w \varepsilon_w + (1 - \beta_w) \varepsilon_g - \varepsilon_v \geq 0, \quad (12)$$

исключим из-под знака дифференцирования по времени $\frac{\partial}{\partial t}$ в уравнениях (7), (9) и вторую сатурационную переменную – растепленность S_v . Получим

$$\begin{aligned} m\delta_\varepsilon \{ S_v [S_w \frac{(\rho_w)_t}{\rho_w} + (1 - S_w) \frac{(\rho_g)_t}{\rho_g}] + (1 - S_v) \frac{(\rho_v)_t}{\rho_v} + \frac{(m)_t}{m} \} + \\ + \frac{\Psi}{m\rho_v} \{ m \{ S_v [S_w \rho_w (\varepsilon_w)_t + (1 - S_w) \rho_g (\varepsilon_g)_t] + (1 - S_v) \rho_v (\varepsilon_v)_t \} + [(1 - m) \rho_s \varepsilon_s]_t + \\ + \delta_\varepsilon DIG + \frac{\Psi}{m\rho_v} DIG_\varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Это есть основное диссипативное уравнение теории гидратов для определения давления P . Вводя коэффициент бароемкости гидратной системы

$$\begin{aligned} D_p = m\delta_\varepsilon \{ S_v [S_w \frac{(\rho_w)_p}{\rho_w} + (1 - S_w) \frac{(\rho_g)_p}{\rho_g}] + (1 - S_v) \frac{(\rho_v)_p}{\rho_v} + \frac{(m)_p}{m} \} + \\ + \frac{\Psi}{m\rho_v} \{ m \{ S_v [S_w \rho_w (\varepsilon_w)_p + (1 - S_w) \rho_g (\varepsilon_g)_p] + (1 - S_v) \rho_v (\varepsilon_v)_p \} + [(1 - m) \rho_s \varepsilon_s]_p, \end{aligned} \quad (14)$$

перепишем уравнение (13) в более компактной форме:

$$D_p \frac{\partial P}{\partial t} + \delta_\varepsilon DIG + \frac{\Psi}{m\rho_v} DIG_\varepsilon = 0. \quad (15)$$

В (14) берется полная производная по давлению с учетом зависимости (6).

4. Некоторые исследования гиперболических свойств сатурационного блока (1), (2)

Для простоты исследуем систему уравнений (1), (2) в одномерном случае.

Проанализировав уравнения характеристик для этой системы, удалось установить, что сатурационный блок (1), (2) на фоне “зафиксированной термодинамики”, т.е. при фиксированных давлении P и температуре T обладает в основном гиперболическими свойствами. Термин “в основном” означает, что строго доказать это удастся либо в отсутствие гравитации, либо при нахождении градиента давления $p'_x = \frac{\partial p}{\partial x}$ вне интервала $(g\rho_g, g\rho_w)$.

Это означает, что сеточные аппроксимации необходимо строить с учетом того, чтобы они соответствовали гиперболичности системы (если она имеет место) или были просто допустимы в ее отсутствие. С другой стороны, даже в “чисто гиперболическом” случае, применение классических разностных схем (типа схемы Роя), переносящих инварианты гиперболической системы уравнений вдоль характеристик, слишком громоздко в случае моделирования гидратных явлений, и такой выбор вряд ли разумен. После теоретического анализа “чистой гиперболичности” сатурационного блока (из которого следует, что характеристики направлены в разные стороны – налево и направо) для непосредственного конструирования разностного алгоритма следует перейти в приближенную “диагонально-характеристическую” форму записи системы гиперболических уравнений. В этой форме оба инварианта понимаются упрощенно. Это, собственно, сами сатурации: растепленность S_v и влагонасыщенность S_w , а перенос их вдоль характеристик связан, соответственно, со сносом вниз и вверх по потоку. Выбор потоковых знаков отдельно для флюидокомпонент определяется следующим образом:

1. Понимая под знаками потоков по растепленности S_v знаки величин $\{-(p'_x - g\rho_w) | -(p'_x - g\rho_g)\}$, будем брать соответствующие в флюидокомпонентах k (и k'_{sv}) вниз по потоку.

Понимая под знаками потоков по влагонасыщенности S_w знаки величин $\{-(p'_x - g\rho_w)\psi_g | -(p'_x - g\rho_g)\psi_w\}$, будем брать соответствующие в флюидокомпонентах k_{rw} (и $(k_{rw})'_{sw}$), k_{rg} (и $(k_{rg})'_{sw}$) вверх по потоку.

2. Определившиеся в “гиперболическом” анализе некоторые аддитивные фазовые скачки объемов $\frac{\psi_w}{m\rho_w} + \frac{\psi_g}{m\rho_g} = \frac{\psi}{m\rho_v}$ воды и газа:

– определяют знаки потоков флюидокомпонент при $S_v < 1$ в приближенном потоково-характеристическом анализе переноса влагонасыщенности S_w (в схеме вверх по потоку);

– зависят от влагонасыщенности S_w ;

– существенны покомпонентно при неперевышении максимального (для ψ_w) и после достижения минимального (для ψ_g) значений влагонасыщенности S_w .

Полученные результаты вместе с изученными условиями сшивки гидратной и безгидратной частей позволяют построить численные методы, адекватные данной задаче. Некоторые из них были построены и применены к ряду конкретных вычислений.

5. Заключение

Получены следующие результаты:

1. В теоретическом отношении методами математической физики исследована система массово-энергетических балансов, описывающая флюидодинамику совместного поведения гидратов, свободных воды, газа и их энергетическое взаимодействие с неподвижным скелетом. В результате исходная краевая задача расщеплена на основное диссипативное уравнение теории гидратов, определяющее “термодинамическую” эволюцию параметров системы, и сатурационную часть, описывающую “гиперболическое” поведение насыщенных среды гидратом и флюидами. Установлена определяющая роль скачков удельных объемов и внутренней энергии в процессе фазовых превращений, влияющая на устойчивость эволюции системы как в диссипативно-термодинамическом блоке системы, так и в формировании ее характеристического поведения в сатурационно-гиперболической части. Сформулированы условия эволюционности характеристической сшивки решений в гидратной и безгидратной частях пространства. Результаты этих исследований позволяют как корректно строить вычислительные алгоритмы для соответствующих типов задач математической физики, так и адаптивно привлекать ранее существовавшие наработки в вычислительной физике применительно к численному моделированию гидратно-флюидодинамических пластовых явлений.

2. В рамках этого подхода реализован и протестирован ряд вычислительных задач.

3. Методами современных интернет-технологий разработана и сопровождается вычислительная среда, автоматизирующая в смысле системного наполнения работу территориально разьединенной рабочей группы, моделирующей расчеты гидратных процессов.

В интернет мастер-классе в единую технологическую линию программирования гидратных явлений включены как пилоты-разработчики компонент функционального наполнения, так и его потенциальные пользователи, осуществляющие тестирование реализованных компонент аналитическими методами (закрывая теоретический цикл исследований), настройку на историю разработки месторождений, выход на прогноз. Представляется важ-

ной близость в естественном учебном процессе пользователей функционального программного наполнения к его разработчикам и теоретикам алгоритмов.

4. Ряд результатов получен впервые. Уровень достижений не ниже мирового.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басниев К.С. Трехмерная математическая модель разложения гидратов метанов в пористой среде под действием тепла / К.С. Басниев, А.В. Нифантов // Наука и техника в газовой промышленности. – 2004. – № 1–2. – С. 61 – 67.
2. К вопросу разработки газогидратных залежей / К.С. Басниев, А.И. Ермолаев, В.В. Кульчицкий [и др.] // «Газовая промышленность» по проблемам газовых гидратов. – 2006. – Спецвыпуск. – С. 15 – 18.
3. Басниев К.С. От газогидратного месторождения Маллик будущему газовой промышленности / К.С. Басниев, В.А. Истомина, А.В. Щebetов // Газовая промышленность. – 2004. – № 2. – С. 8 – 9.
4. Басниев К.С. Подземная гидромеханика: учебник для вузов / Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. – М.: Недра, 1993. – 416 с.

Стаття надійшла до редакції 25.10.2011